


# Introducción al Análisis complejo con aplicaciones

Segunda edición

Dennis G. Zill
Patrick D. Shanahan

SEGUNDA EDICIÓN

SE PROHIBE
Subrayar y/o marginar este libro;
en caso de devolverlo subrayado.
SE COBRARA SU VALOR

Introducción al

# ANÁLISIS COMPLEJO

## CON APLICACIONES

SEGUNDA EDICIÓN

Introducción al

# ANÁLISIS COMPLEJO

## CON APLICACIONES

Dennis G. Zill
Patrick D. Shanahan
Universidad Loyola Marymount

Traducción:

Dra. Ana Elizabeth García Hernández
Universidad La Salle, Morelia

Revisión técnica:

Dr. Ernesto Filio López
Unidad Profesional en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas
Instituto Politécnico Nacional

M. en C. Manuel Robles Bernal
Escuela Superior de Física y Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional




Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

CENGAGE
Learning™

***Introducción al análisis complejo con aplicaciones***
Segunda edición.
Zill, Dennis G. y Shanahan, Patrick D.

**Director de producto y desarrollo Latinoamérica**
Daniel Oti Yvonnet

**Director editorial y de producción Latinoamérica:**
Raúl D. Zendejas Espejel

**Editor de desarrollo:**
Sergio R. Cervantes González

**Coordinadora de producción editorial:**
Abril Vega Orozco

**Editor de producción:**
Omar A. Ramírez Rosas

**Coordinador de manufactura:**
Rafael Pérez González

**Diseño de portada:**
Mariana Sierra Enríquez

**Imagen de portada:**
©stitcherladyxx/Dreamstime.com

**Composición tipográfica:**
Hunura Servicios Editoriales

© D.R. 2011 por Cengage Learning Editores, S.A. de C.V., una Compañía de Cengage Learning, Inc.
Corporativo Santa Fe
Av. Santa Fe núm. 505, piso 12
Col. Cruz Manca, Santa Fe
C.P. 05349, México, D.F.
Cengage Learning™ es una marca registrada usada bajo permiso.

DERECHOS RESERVADOS. Ninguna parte de este trabajo, amparado por la Ley Federal del Derecho de Autor, podrá ser reproducida, transmitida, almacenada o utilizada en cualquier forma o por cualquier medio, ya sea gráfico, electrónico o mecánico, incluyendo, pero sin limitarse a lo siguiente: fotocopiado, reproducción, escaneo, digitalización, grabación en audio, distribución en internet, distribución en redes de información o almacenamiento y recopilación en sistemas de información, a excepción de lo permitido en el Capítulo III, Artículo 27 de la Ley Federal del Derecho de Autor, sin el consentimiento por escrito de la Editorial.

Traducido del libro *A first course in complex analysis with applications. Second Edition*
Dennis G. Zill and Patrick D. Shanahan
Publicado en inglés por Jones and Bartlett Publishers, LLC
© 2009
ISBN: 978-0-7637-5772-4

Datos para catalogación bibliográfica:
Zill, Dennis G. y Patrick D. Shanahan
*Introducción al análisis complejo con aplicaciones*
Segunda edición
ISBN: 978-607-481-596-2

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

Impreso en México
1 2 3 4 5 6 7 14 13 12 11

515.9
Z69:2
C.4

*Para Dana, Kasey y Cody*

BIBLIOTECA CENTRAL (Universidad) Q. 258.93 E 3 OCT 2014

41.H.C. 0108631 2014

# Contenido

# Prefacio

**Filosofía** La primera edición de este libro surgió del material de los capítulos 17-20 de *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, tercera edición (editores Jones y Bartlett, 2006), de Dennis G. Zill y del fallecido Michael R. Cullen. Esta segunda edición presenta una revisión y expansión del material original y está diseñada para utilizarse tanto en un semestre como en un curso de un trimestre. Su objetivo es introducir los principios básicos y aplicaciones del análisis complejo a los estudiantes que no tienen conocimiento previo de este tema. La escritura es sencilla y refleja el estilo lógico de las *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería.*

La motivación para adaptar el material de *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería* en un libro proviene de nuestro descontento con la sucesión de libros de texto que se han utilizado durante años en nuestro departamento de cursos universitarios que se ofrecen de análisis complejo. Nuestra experiencia con los libros que dicen ser accesibles a los estudiantes es que con frecuencia se han escrito a un nivel demasiado alto para nuestra audiencia. La "audiencia" para el curso de nivel inicial consta de algunas carreras en matemáticas y algunas en física, pero principalmente en aquellas de ciencias de la computación y en ingeniería eléctrica. En nuestra institución, un típico estudiante de ciencias o ingeniería no está obligado a tomar cursos de matemáticas teóricas, tales como métodos de demostración, álgebra lineal, álgebra abstracta, cálculo avanzado o introducción al análisis real. El único requisito para nuestro curso universitario en análisis complejo es la realización del tercer semestre de la secuencia de cálculo. Entonces, para la mayoría, el cálculo es todo lo que suponemos como preparación para que un estudiante utilice este libro, aunque ciertos conocimientos de ecuaciones diferenciales serían útiles en las secciones dedicadas a las aplicaciones. Hemos mantenido la teoría en este libro en lo que esperamos sea un nivel manejable, concentrándonos sólo en lo que consideramos necesario en un primer curso. Se presentan muchos conceptos en un estilo informal y conceptual más que en la definición convencional/teorema/formato de demostración. Pensamos que sería justo caracterizar a este libro como una continuación de los estudios de cálculo, pero esta vez como el estudio de las funciones de cálculo de variable compleja. Pero no malinterpreten las palabras anteriores, no hemos abandonado la teoría en favor de "recetas de cocina". Se presentan demostraciones de los principales resultados y se usa mucho la terminología estándar en todo. De hecho, hay muchos problemas en los conjuntos de ejercicios en que se pide al estudiante comprobar algo. Estamos dispuestos a admitir que cualquier estudiante, no sólo los de la carrera de matemáticas, puede tener cierta idea y madurez matemática para intentar una demostración. Sin embargo, también sabemos que la mayoría de los estudiantes no tienen idea de cómo empezar una demostración. Así, en algunos de nuestros problemas de "demostración" se guía al lector a través de pasos a seguir o se le hace una fuerte sugerencia sobre cómo proceder.

**Cambios en esta edición** En primer lugar vamos a decir lo que no se cambió en esta edición:

- La filosofía original, el número de capítulos y el orden de las secciones dentro de cada capítulo son los mismos que en la primera edición. Hemos mantenido el número de capítulos en este libro en siete. Esto se hizo por dos razones: para proporcionar una cantidad adecuada de material para que la mayor parte sea razonablemente cubierta en un curso de seis meses, y al mismo tiempo se minimice el costo.

Nuestro principal objetivo para esta segunda edición fue mejorar los puntos fuertes del texto original. Para lo que se hizo lo siguiente:

- Muchos problemas nuevos, especialmente, problemas conceptuales se han agregado a los ejercicios. Además, se han mejorado algunos de los problemas existentes, mientras que se quitaron los considerados ineficaces.
- Se ha reescrito algo del texto y un número de ejemplos con el fin de aclarar o ampliar los temas analizados. En algunos casos encontramos que aclarar la exposición podría mejorarse si se adopta más actitud y menos lamentos.
- Se han corregido errores y erratas de la primera edición.
- Se ha cambiado la numeración de las figuras, teoremas y definiciones. Hemos cambiado a un sistema de numeración decimal doble. Por ejemplo, la interpretación de la "Figura 1.2.3" es

  Capítulo ↓ ↓ Sección
  1.2.3 ← Tercera figura en esta sección

  Creemos que este tipo de numeración hará que sea más fácil encontrar cifras, teoremas, definiciones y cuando se hace referencia en las secciones o capítulos posteriores.

**Características de este texto** Se han conservado muchas de las características de la edición anterior. Cada capítulo comienza con su propia página de inicio, la cual incluye una tabla de contenidos y una breve introducción que describe el material que se va cubrir en el capítulo. Por otra parte, cada sección en un capítulo inicia con comentarios introductorios acerca de detalles específicos cubiertos en esa sección. La mayor parte de las secciones termina con una característica denominada Observaciones, en la que se les comenta a los estudiantes acerca de las áreas donde el cálculo real y complejo difieren o se analizan temas de interés adicionales (tales como la esfera de Riemann y las superficies de Riemann), que están relacionados, pero que no se cubren formalmente en la sección. Varias de las secciones más largas, aunque se unifican por tema, se han dividido en subsecciones, lo cual fue hecho para facilitar que se cubra el material en varias clases. El conjunto de ejercicios correspondiente se dividió de la misma forma para hacer más fácil la asignación de tareas. Comentarios, aclaraciones y algunas palabras de precaución son generosamente repartidos en todo el texto mediante anotaciones al margen.

Hemos proporcionado muchos ejemplos y nos hemos esforzado mucho para proporcionar todos los detalles pertinentes en su solución. Debido a que con frecuencia las aplicaciones de análisis complejo son agrupadas en un solo capítulo colocado al final del libro, a veces los profesores tienen dificultades para cubrir las aplicaciones en el curso. El análisis complejo es una

herramienta poderosa de matemáticas aplicadas. Para facilitar la cobertura de este bello aspecto del tema, hemos decidido terminar cada capítulo con un apartado especial acerca de las aplicaciones.

Los conjuntos de ejercicios están construidos de forma piramidal y cada conjunto tiene al menos dos partes. La primera parte en una serie de ejercicios es una generosa cantidad de problemas de rutina para profundizar; la segunda parte consiste de conceptos escritos y problemas geométricos. En conjuntos de muchos ejercicios hay una tercera parte dedicada al uso de tecnología. Ya que el modo operacional por defecto en todos los sistemas algebraicos computacionales es análisis complejo, hemos hecho hincapié en el tipo de software. Aunque en el libro hemos analizado el uso de Mathematica®, los problemas son de naturaleza general.

Cada capítulo termina con preguntas de repaso. Pensamos que algo más conceptual sería un poco más interesante que el refrito de los mismos viejos problemas dados en los ejercicios tradicionales de repaso del capítulo.

Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar se presentan en la parte final del libro. Puesto que algunos problemas conceptuales se podrían usar como temas de análisis en clase, hemos decidido no incluir sus respuestas.

Para los recursos del estudiante y del profesor, por favor contacte a los representates de Jones and Bartlett Publishers al 1-800-832-0034 o al info@jbpub.com.

**Reconocimientos** Nos gustaría expresar nuestro agradecimiento a nuestros colegas de la Universidad Loyola Marymount que han enseñado con el libro, así como los profesores que se han tomado el tiempo para contactarnos, o sus palabras de aliento, críticas, correcciones e inteligentes sugerencias. Un reservado reconocimiento especial para nuestra colega Lily Khadjavi, que proporcionó numerosas sugerencias útiles tanto para la primera como para la segunda edición del libro. También queremos reconocer la valiosa ayuda de los pasados estudiantes LMU que utilizaron este libro en las versiones preliminar y publicada. Por último, un muy sentido y profundo "gracias" para los siguientes revisores que contribuyeron a la primera edición del libro:

Nicolae H. Pavel, Universidad de Ohio
Marcos Jardim, Universidad de Pensilvania
Ilia A. Binder, Universidad de Harvard

Y "gracias" nuevamente a todos los que revisaron esta edición para nosotros:

Joyati Debnath, Universidad estatal Winona
Rich Mikula, William Paterson, Universidad de Nueva Jersey
Jim Vance, Universidad estatal Wright
Chris Masters, Universidad Doane
George J. Miel, Universidad de Nevada, Las Vegas
Jeffrey Lawson, Universidad Occidental de Carolina
Javad Namazi, Universidad de Fairleigh Dickinson
Irl Bivens, Universidad de Davidson

Por último, nos gustaría dar las gracias a nuestro editor, Tim Anderson, por su constante insistencia, pero buen carácter, y al personal del departamento de producción por otro trabajo bien hecho.

**Solicitud final** La compilación de un libro de matemáticas, aun de este modesto tamaño, implica miles de malabares con palabras y símbolos. La experiencia nos ha enseñado que los errores —errores ortográficos o simplemente errores— parecen ser un inevitable subproducto de la empresa de escritura de libros de texto. Nos disculpamos de antemano por cualquier error que pueda encontrar y le exhortamos a indicárnoslo. Puede enviarlos por correo electrónico directamente a nuestro editor a tanderson@jbpub.com.

Dennis G. Zill Patrick D. Shanahan

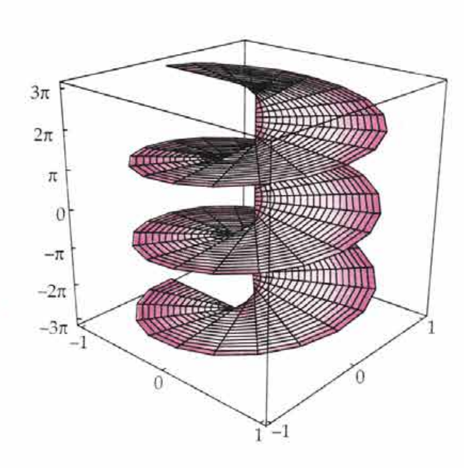
CAPÍTULO

# 1

# Números complejos y el plano complejo

## Contenido del capítulo






Superficie de Riemann para arg(z). Vea la página 88.

**Introducción** En los cursos elementales usted aprendió acerca de la existencia, y algunas de las propiedades, de los números complejos. Pero en los cursos de cálculo, lo más probable es que ni siquiera vio un número complejo. En este libro no sólo estudiamos números complejos; también abordaremos al cálculo de funciones de una variable compleja.

Empezamos con un examen profundo de la aritmética y del álgebra de los números complejos.

## 1.1 Números complejos y sus propiedades

Ninguna persona "inventó" los números complejos, pero las controversias que rodean el uso de estos números ya existían en el siglo XVI. En la búsqueda por resolver ecuaciones polinomiales con fórmulas que implican radicales, los primeros apasionados de las matemáticas se vieron obligados a admitir la existencia de otra clase de números, además de los números enteros positivos. Ecuaciones tales como $x^2 + 2x + 2 = 0$ y $x^3 = 6x + 4$ daban las "soluciones" $1 + \sqrt{-1}$ y $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-2}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-2}}$ que causaban consternación en particular dentro de la incipiente comunidad de estudiosos de las matemáticas porque *todos* sabían que no existían números tales como $\sqrt{-1}$ y $\sqrt{-2}$, números cuyo cuadrado es negativo. Estos "números" sólo existen en la imaginación, o como opinó un filósofo, "lo imaginario, lo íntimo del niño del misticismo complejo". Con el tiempo estos "números imaginarios" no desaparecieron, principalmente porque los matemáticos, como un grupo, son tenaces y algunos hasta prácticos. Un famoso matemático afirmó que, aunque "existen en nuestra imaginación... nada nos impide... que se utilicen en los cálculos". Los matemáticos también odian tirar cosas. Después de todo, aún persistía el recuerdo de que los números negativos en un primer momento fueron tildados de "ficticios". El concepto de *número*, evolucionó durante siglos, creciendo el conjunto de los números enteros de sólo positivos con la inclusión de los números negativos, los racionales y los números irracionales. Pero en el siglo XVIII el concepto de número dio un paso gigantesco en su evolución cuando el matemático alemán Carl Friedrich Gauss puso a los así llamados números imaginarios, o *números complejos*, como ya se estaban empezando a llamar, en una base lógica y consistente al tratarlos como una extensión del sistema de los números reales.

Nuestro objetivo en esta primera sección es examinar algunas definiciones básicas y la aritmética de los números complejos.

**La unidad imaginaria** Aún después de ganar una amplia respetabilidad, por medio de los trabajos seminales de Carl Friedrich Gauss y del matemático francés Augustin Louis Cauchy, el desafortunado nombre "imaginario" ha sobrevivido a través de los siglos. El símbolo $i$ se utilizó originalmente como un disfraz para el nada adecuado símbolo $\sqrt{-1}$. Ahora decimos que $i$ es la **unidad imaginaria** y se define por la propiedad $i^2 = -1$. Usando la unidad imaginaria, construimos un número general complejo a partir de dos números reales.

**Definición 1.1.1 Números complejos**

Un **número complejo** es cualquier número de la forma $z = a + ib$, donde $a$ y $b$ son números reales e $i$ es la unidad imaginaria.

**Terminología** Las notaciones $a + ib$ y $a + bi$ se utilizan indistintamente. El número real $a$ en $z = a + ib$ se llama la **parte real** de $z$, el número real $b$ se llama la **parte imaginaria** de $z$. Las partes real e imaginaria de un número complejo $z$ se abrevian $\text{Re}(z)$ e $\text{Im}(z)$, respectivamente. Por ejemplo, si $z = 4 - 9i$, entonces, $\text{Re}(z) = 4$ e $\text{Im}(z) = -9$. Un múltiplo constante real de la unidad imaginaria se llama un **número imaginario puro**. Por ejemplo, $z = 6i$ es un número imaginario puro. Dos números complejos son **iguales** si sus correspondientes partes reales e imaginarias son iguales. Puesto que este sencillo concepto a veces es útil, se formalizará el último enunciado en la siguiente definición.

*Nota:* La parte imaginaria de $z = 4 - 9i$ es $-9$ **no** $-9i$.

**Definición 1.1.2 Igualdad**

Los números complejos $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$ son **iguales**, $z_1 = z_2$, si $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$.

En términos de los símbolos $\operatorname{Re}(z)$ e $\operatorname{Im}(z)$, la definición 1.1.2 establece que $z_1 = z_2$ si $\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2)$ e $\operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)$.

La totalidad de los números complejos o el conjunto de números complejos normalmente se denota por el símbolo **C**. Debido a que *cualquier* número real $a$ se puede escribir como $z = a + 0i$, vemos que el conjunto **R** de los números reales es un subconjunto de **C**.

**Operaciones aritméticas** Los números complejos se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir. Si $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$, estas operaciones se definen como sigue.

*Suma:* $$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

*Resta:* $$z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

*Multiplicación:* $$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 - b_1b_2 + i(b_1a_2 + a_1b_2)$$

*División:* $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2}, \; a_2 \neq 0, \text{ o } b_2 \neq 0 = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

Las conocidas leyes conmutativa, asociativa y distributiva valen para números complejos:

*Leyes conmutativas:* $$\begin{cases} z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \\ z_1z_2 = z_2z_1 \end{cases}$$

*Leyes asociativas:* $$\begin{cases} z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \\ z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3 \end{cases}$$

*Ley distributiva:* $$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$$

Considerando estas leyes, no hay necesidad de memorizar las definiciones de suma, resta y multiplicación.

***Suma, resta y multiplicación***

(*i*) *Para sumar (o restar) dos números complejos, simplemente sume (o reste) las correspondientes partes real e imaginaria.*

(*ii*) *Para multiplicar dos números complejos, utilice la ley distributiva y el hecho de que* $i^2 = -1$.

La definición de división merece más elaboración, y, por tanto, en breve analizaremos esta operación con más detalle.

**EJEMPLO 1 Suma y multiplicación**

Si $z_1 = 2 + 4i$ y $z_2 = -3 + 8i$, determine (**a**) $z_1 + z_2$ y (**b**) $z_1 z_2$.

**Solución** (**a**) Sumando las partes real e imaginaria, la suma de los dos números complejos $z_1$ y $z_2$ es

$$z_1 + z_2 = (2 + 4i) + (-3 + 8i) = (2 - 3) + (4 + 8)i = -1 + 12i.$$

(**b**) Por la ley distributiva e $i^2 = -1$, el producto de $z_1$ y $z_2$ es

$$\begin{aligned} z_1 z_2 = (2 + 4i)(-3 + 8i) &= (2 + 4i)(-3) + (2 + 4i)\,(8i) \\ &= -6 - 12i + 16i + 32i^2 \\ &= (-6 - 32) + (16 - 12)i = -38 + 4i. \end{aligned}$$

❑

**Cero y unidad** El **cero** en el sistema de números complejos es el número $0 + 0i$, y la **unidad** es $1 + 0i$. El cero y la unidad se denotan por 0 y 1, respectivamente. El cero es la **identidad aditiva** en el sistema de números complejos ya que, para cualquier número complejo $z = a + ib$, se tiene $z + 0 = z$. Para ver esto, se utiliza la definición de suma:

$$z + 0 = (a + ib) + (0 + 0i) = a + 0 + i(b + 0) = a + ib = z.$$

De manera similar, la unidad es la **identidad multiplicativa** del sistema ya que, para cualquier número complejo $z$, tenemos $z \cdot 1 = z \cdot (1 + 0i) = z$.

**Conjugado** Si $z$ es un número complejo, el número que se obtiene al cambiar el signo de su parte imaginaria se llama **complejo conjugado**, o simplemente **conjugado**, de $z$ y se denota con el símbolo $\bar{z}$. En otras palabras, si $z = a + ib$, entonces su conjugado es $\bar{z} = a - ib$. Por ejemplo, si $z = 6 + 3i$, entonces $\bar{z} = 6 - 3i$; si $z = -5 - i$, entonces $\bar{z} = -5 + i$. Si $z$ es un número real, por ejemplo, $z = 7$, entonces $\bar{z} = 7$. De las definiciones de la suma y la resta de números complejos, se demuestra fácilmente que el conjugado de la suma y la resta de dos números complejos es la suma y la resta de los conjugados:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2. \tag{1}$$

Además, tenemos las siguientes tres propiedades adicionales:

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad \bar{\bar{z}} = z. \tag{2}$$

Por supuesto, el conjugado de cualquier suma finita (o producto) de números complejos es la suma (o producto) de los conjugados.

Las definiciones de suma y multiplicación muestran que la suma y el producto de un número complejo $z$ con su conjugado $\bar{z}$ es un número real:

$$z + \bar{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a \tag{3}$$

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2. \tag{4}$$

La diferencia de un número complejo $z$ con su conjugado $\bar{z}$ es un número imaginario puro:

$$z - \bar{z} = (a + ib) - (a - ib) = 2ib. \tag{5}$$

Ya que $a = \text{Re}(z)$ y $b = \text{Im}(z)$, con las ecuaciones (3) y (5) se obtienen dos fórmulas útiles:

$$\text{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} \quad \text{y} \quad \text{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}. \tag{6}$$

Sin embargo, (4) es *la* relación importante en este análisis ya que permite utilizar a la división en una forma práctica.

### *División*

*Para dividir $z_1$ entre $z_2$, multiplique el numerador y el denominador de $z_1/z_2$ por el conjugado de $z_2$. Es decir,*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} \tag{7}$$

*y después utilice el hecho de que $z_2\bar{z}_2$ es la suma de los cuadrados de las partes real e imaginaria de $z_2$.*

El procedimiento descrito en (7) se muestra en el ejemplo siguiente.

**EJEMPLO 2 División**

Si $z_1 = 2 - 3i$ y $z_2 = 4 + 6i$, determine $z_1/z_2$.

**Solución** Multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado $\bar{z}_2 = 4 - 6i$ del denominador $z_2 = 4 + 6i$ y después utilice (4):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{4+6i} = \frac{2-3i}{4+6i}\frac{4-6i}{4-6i} = \frac{8-12i-12i+18i^2}{4^2+6^2} = \frac{-10-24i}{52}.$$

Ya que queremos una respuesta en la forma $a + bi$, rescribimos el último resultado al dividir la parte real e imaginaria del numerador $-10 - 24i$ entre 52 y simplificando los términos:

$$\frac{z_1}{z_2} = -\frac{10}{52} - \frac{24}{52}i = -\frac{5}{26} - \frac{6}{13}i.$$

❑

**Inversas** En el sistema de números complejos, cada número $z$ tiene un único **inverso aditivo**. Como en el sistema de números reales, el inverso aditivo de $z = a + ib$ es su *negativo*, $-z$, donde $-z = -a - ib$. Para cualquier número complejo $z$, tenemos $z + (-z) = 0$. Similarmente, cada número complejo diferente $z$ de cero tiene un **inverso multiplicativo**. En símbolos, para $z \neq 0$ existe uno y sólo un número complejo diferente de cero $z^{-1}$ tal que $zz^{-1} = 1$. El inverso multiplicativo $z^{-1}$ es igual al **recíproco** $1/z$.

**EJEMPLO 3 Recíproco**

Determine el recíproco de $z = 2 - 3i$.

**Solución** Por la definición de división, obtenemos

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{2-3i}=\frac{1}{2-3i}\frac{2+3i}{2+3i}=\frac{2+3i}{4+9}=\frac{2+3i}{13}.$$

La respuesta debe estar en la forma $a + ib$.

Esto es,

$$\frac{1}{z}=z^{-1}=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i.$$

Le toma unos segundos comprobar la multiplicación

$$zz^{-1}=(2-3i)\left(\tfrac{2}{13}+\tfrac{3}{13}i\right)=1.$$

❑

## Observaciones *Comparación con el análisis real*

(*i*) Muchas de las propiedades del sistema de números reales **R** valen en el sistema de números complejos **C**, pero en realidad hay también algunas notables diferencias. Por ejemplo, el concepto de orden en el sistema de los números reales no se pasa al sistema de números complejos. En otras palabras, no podemos comparar dos números complejos $z_1 = a_1 + ib_1$, $b_1 \neq 0$, y $z_2 = a_2 + ib_2$, $b_2 \neq 0$, usando desigualdades. Enunciados tales como $z_1 < z_2$ o $z_2 \geq z_1$ no tienen sentido en **C**, excepto en el caso especial en que los dos números $z_1$ y $z_2$ son reales. Vea el problema 55 de los ejercicios 1.1. Por tanto, si ve un enunciado tal como $z_1 = \alpha z_2$, $\alpha > 0$, está implícito en el uso de la desigualdad $\alpha > 0$ que el símbolo $\alpha$ representa un número real.

(*ii*) Algunas cosas que damos por imposibles en el análisis real, tal como $e^x = -2$ y sen $x = 5$ cuando $x$ es una variable real, son perfectamente correctas y comunes en el análisis complejo cuando el símbolo $x$ se interpreta como variable compleja. Vea el ejemplo 3 de la sección 4.1 y el ejemplo 2 de la sección 4.3.

En lo que resta del libro continuaremos indicando otras diferencias entre el análisis real y el complejo.

## EJERCICIOS 1.1

*Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-1.*

**1.** Evalúe las siguientes potencias de $i$.

(**a**) $i^8$ (**b**) $i^{11}$

(**c**) $i^{42}$ (**d**) $i^{105}$

**2.** Escriba el número dado en la forma $a + ib$.

(**a**) $2i^3 - 3i^2 + 5i$ (**b**) $3i^5 - i^4 + 7i^3 - 10i^2 - 9$

(**c**) $\frac{5}{i}+\frac{2}{i^3}-\frac{20}{i^{18}}$ (**d**) $2i^6 + \left(\frac{2}{-i}\right)^3 + 5i^{-5} - 12i$

En los problemas 3 a 20 escriba el número dado en la forma $a + ib$.

**3.** $(5 - 9i) + (2 - 4i)$

**4.** $3(4 - i) - 3(5 + 2i)$

**5.** $i(5 + 7i)$

**6.** $i(4 - i) + 4i(1 + 2i)$

**7.** $(2 - 3i)(4 + i)$

**8.** $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i\right)\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3}i\right)$

**9.** $3i + \dfrac{1}{2 - i}$

**10.** $\dfrac{i}{1 + i}$

**11.** $\dfrac{2 - 4i}{3 + 5i}$

**12.** $\dfrac{10 - 5i}{6 + 2i}$

**13.** $\dfrac{(3 - i)(2 + 3i)}{1 + i}$

**14.** $\dfrac{(1 + i)(1 - 2i)}{(2 + i)(4 - 3i)}$

**15.** $\dfrac{(5 - 4i) - (3 + 7i)}{(4 + 2i) + (2 - 3i)}$

**16.** $\dfrac{(4 + 5i) + 2i^3}{(2 + i)^2}$

**17.** $i(1 - i)(2 - i)(2 + 6i)$

**18.** $(1 + i)^2(1 - i)^3$

**19.** $(3 + 6i) + (4 - i)(3 + 5i) + \dfrac{1}{2 - i}$

**20.** $(2 + 3i)\left(\dfrac{2 - i}{1 + 2i}\right)^2$

En los problemas 21 a 24 utilice el **teorema del binomio***

$$(A + B)^n = A^n + \frac{n}{1!}A^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2!}A^{n-2}B^2 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}A^{n-k}B^k + \cdots + B^n,$$

donde $n = 1, 2, 3, \ldots$, para escribir el número dado en la forma $a + ib$.

**21.** $(2 + 3i)^2$

**22.** $\left(1 - \frac{1}{2}i\right)^3$

**23.** $(-2 + 2i)^5$

**24.** $(1 + i)^8$

En los problemas 25 y 26 determine $\text{Re}(z)$ e $\text{Im}(z)$.

**25.** $z = \left(\dfrac{i}{3 - i}\right)\left(\dfrac{1}{2 + 3i}\right)$

**26.** $z = \dfrac{1}{(1 + i)(1 - 2i)(1 + 3i)}$

En los problemas 27 a 30 sea $z = x + iy$. Exprese la cantidad dada en términos de $x$ y $y$.

**27.** $\text{Re}(1/z)$

**28.** $\text{Re}(z^2)$

**29.** $\text{Im}(2z + 4\bar{z} - 4i)$

**30.** $\text{Im}(\bar{z}^2 + z^2)$

En los problemas 31 a 34 sea $z = x + iy$. Exprese la cantidad dada en términos de los símbolos $\text{Re}(z)$ e $\text{Im}(z)$.

**31.** $\text{Re}(iz)$

**32.** $\text{Im}(iz)$

**33.** $\text{Im}((1 + i)z)$

**34.** $\text{Re}(z^2)$

En los problemas 35 y 36 demuestre que los números indicados satisfacen la ecuación dada. En cada caso explique por qué se pueden encontrar soluciones adicionales.

**35.** $z^2 + i = 0$, $z_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$. Determine una solución adicional, $z_2$.

**36.** $z^4 = -4$; $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 + i$. Determine dos soluciones adicionales, $z_3$ y $z_4$.

---

*Recuerde que los coeficientes en los desarrollos de $(A + B)^2$, $(A + B)^3$, etcétera, también se pueden obtener usando el triángulo de Pascal.

En los problemas 37 a 42 utilice la definición 1.1.2 para resolver cada ecuación para $z = a + ib$.

**37.** $2z = i(2 + 9i)$

**38.** $z - 2\bar{z} + 7 - 6i = 0$

**39.** $z^2 = i$

**40.** $\bar{z}^2 = 4z$

**41.** $z + 2\bar{z} = \dfrac{2-i}{1+3i}$

**42.** $\dfrac{z}{1+\bar{z}} = 3 + 4i$

En los problemas 43 y 44 resuelva el sistema de ecuaciones dado para $z_1$ y $z_2$.

**43.** $iz_1 - iz_2 = 2 + 10i$

$-z_1 + (1 - i)z_2 = 3 - 5i$

**44.** $iz_1 + (1 + i)z_2 = 1 + 2i$

$(2 - i)z_1 + 2iz_2 = 4i$

## Enfocando los conceptos

**45.** ¿Qué podemos decir acerca del número complejo $z$ si $z = \bar{z}$? ¿Si $(z)^2 = (\bar{z})^2$?

**46.** Piense en una solución alternativa al problema 24. Después, sin realizar un arduo trabajo, evalúe $(1 + i)^{5404}$.

**47.** Para un entero no negativo $n$, $i^n$ puede ser uno de los cuatro valores: 1, $i$, $-1$, y $-i$. En cada uno de los siguientes cuatro casos, exprese el exponente entero $n$ en términos del símbolo $k$, donde $k = 0, 1, 2, \ldots$

**(a)** $i^n = 1$

**(b)** $i^n = i$

**(c)** $i^n = -1$

**(d)** $i^n = -i$

**48.** Existe un procedimiento alternativo al dado en (7). Por ejemplo, el cociente $(5 + 6i)/(1 + i)$ debe expresarse en la forma $a + ib$:

$$\frac{5+6i}{1+i} = a + ib.$$

Por tanto, $5 + 6i = (1 + i)(a + ib)$. Utilice este último resultado y la definición 1.1.2 para determinar el cociente dado. Utilice este método para determinar el recíproco de $3 - 4i$.

**49.** Suponga por el momento que $\sqrt{1+i}$ tiene sentido en el sistema de números complejos. Entonces, ¿cómo demostraría la validez de la igualdad

$$\sqrt{1+i} = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}} + i\sqrt{-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}}?$$

**50.** Suponga que $z_1$ y $z_2$ son números complejos. ¿Qué puede decir acerca de $z_1$ o $z_2$ si $z_1z_2 = 0$?

**51.** Suponga que el producto $z_1z_2$ de dos números complejos es una constante real diferente de cero. Demuestre que $z_2 = k\bar{z}_1$, donde $k$ es un número real.

**52.** Sin hacer mucho trabajo, explique por qué se sigue inmediatamente de (2) y (3) que $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 = 2\text{Re}(z_1\bar{z}_2)$.

**53.** A los matemáticos les gusta demostrar que ciertas "cosas" en un sistema matemático son únicas. Por ejemplo, una demostración de una proposición tal como "La unidad en el sistema de los números complejos es única" por lo general comienza con la suposición de que existen dos unidades *diferentes*, por ejemplo, $1_1$ y $1_2$, y después se procede a demostrar que esta suposición conduce a cierta contradicción. De una contradicción si se supone que existen dos unidades diferentes.

**54.** Siga el procedimiento indicado en el problema 53 para demostrar que la proposición "El cero en el sistema de números complejos es único".

**55.** Un sistema numérico se dice que es un **sistema ordenado** siempre que éste contenga un subconjunto $P$ con las siguientes dos propiedades:

*Primero, para cualquier número x diferente de cero en el sistema, ya sea x o −x (pero no ambos) está en P.*

*Segundo, si $x$ y $y$ son números en $P$, entonces tanto $xy$ como $x + y$ están en $P$.*

En el sistema de números reales el conjunto $P$ es el conjunto de números *positivos*. En el sistema de números reales decimos que $x$ es mayor que $y$, escribiendo $x > y$, si y sólo si $x - y$ está en $P$. Analice por qué el sistema de números complejos no tiene dicho subconjunto $P$. [*Sugerencia:* Considere $i$ y $-i$.]

## 1.2 Plano complejo

Un número complejo $z = x + iy$ está unívocamente determinado por un *par ordenado* de números reales $(x, y)$. La primera y segunda entradas del par ordenado corresponden, a su vez, con las partes real e imaginaria del número complejo. Por ejemplo, el par ordenado $(2, -3)$ corresponde al número complejo $z = 2 - 3i$. Inversamente, $z = 2 - 3i$ determina al par ordenado $(2, -3)$. Los números 7, $i$ y $-5i$ son equivalentes a $(7, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -5)$, respectivamente. De esta forma podemos asociar un número complejo $z = x + iy$ con un *punto* $(x, y)$ en un plano coordenado.

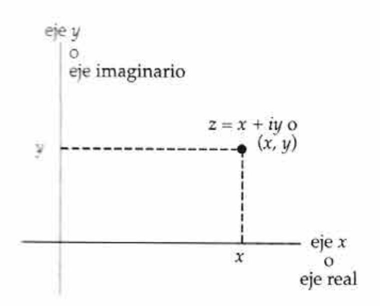



Figura 1.2.1 Plano $z$

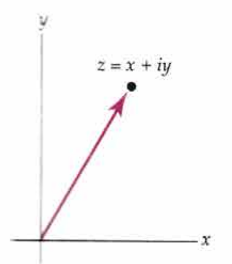



Figura 1.2.2 $z$ como un vector de posición

**Plano complejo** Debido a la correspondencia entre un número complejo $z = x + iy$ y un y sólo un punto $(x, y)$ en un plano coordenado, utilizaremos los términos *número complejo* y *punto* indistintamente. El plano coordenado que se muestra en la figura 1.2.1 se llama **plano complejo** o simplemente **plano z.** El eje horizontal o eje $x$ se llama **eje real** ya que cada punto en dicho eje representa un número real. El eje vertical o eje $y$ se llama **eje imaginario** ya que un punto en dicho eje representa un número imaginario puro.

**Vectores** En otros cursos sin duda ha visto que los números en un par ordenado de números reales se pueden interpretar como las componentes de un vector. Así, un número complejo $z = x + iy$ también se puede ver como un vector de posición bidimensional, es decir, un vector cuyo punto inicial es el origen y cuyo punto terminal es el punto $(x, y)$. Vea la figura 1.2.2. Esta interpretación vectorial nos indica cómo definir la longitud del vector $z$ como la distancia $\sqrt{x^2 + y^2}$ del origen al punto $(x, y)$. Esta longitud recibe un nombre especial.

**Definición 1.2.1 Módulo**

El **módulo** de un número complejo $z = x + iy$ es el número real

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1}$$

El módulo $z$ de un número complejo $z$ también se denomina el **valor absoluto** de $z$. Utilizaremos ambas *módulo* y *valor absoluto* en todo el libro.

**EJEMPLO 1 Módulo de un número complejo**

Si $z = 2 - 3i$, entonces de (1) determinamos el módulo del número como $|z| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$. Si $z = -9i$, entonces con (1) se obtiene $|-9i| = \sqrt{(-9)^2} = 9$.

❑

**Propiedades** Recuerde de (4) de la sección 1.1 que, para cualquier número complejo $z = x + iy$, el producto $z\bar{z}$ es un número real; específicamente, $z\bar{z}$ es la suma de los cuadrados de las partes real e imaginaria de $z$: $z\bar{z} = x^2 + y^2$. La inspección de (1) muestra entonces que $|z|^2 = x^2 + y^2$. Las relaciones

$$|z|^2 = z\bar{z} \quad \text{y} \quad |z| = \sqrt{z\bar{z}} \tag{2}$$

merecen ser guardadas en la memoria. El módulo de un número complejo $z$ tiene las propiedades adicionales,

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2| \quad \text{y} \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}. \tag{3}$$

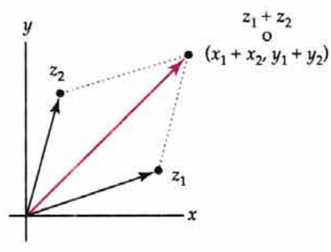
Observe que cuando $z_1 = z_2 = z$, la primera propiedad en (3) demuestra que

$$|z^2| = |z|^2. \tag{4}$$

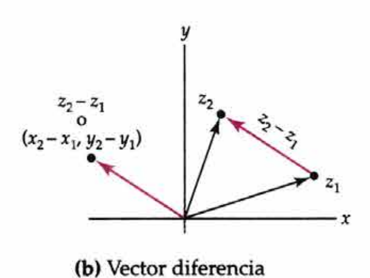
La propiedad $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$ se puede demostrar usando (2) y se deja como un ejercicio. Vea el problema 49 en los ejercicios 1.2.

**De nuevo distancia** La suma de números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ dada en la sección 1.1, cuando se establece en términos de pares ordenados:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$




**(a)** Vector suma




**(b)** Vector diferencia

Figura 1.2.3 Suma y diferencia de vectores

es simplemente la definición de las componentes del vector suma. La interpretación vectorial de la suma $z_1 + z_2$ es el vector que se muestra en la figura 1.2.3(a) como la diagonal principal de un paralelogramo cuyo punto inicial es el origen y punto terminal es $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. La diferencia $z_2 - z_1$ se puede obtener ya sea comenzando del punto terminal de $z_1$ y finalizando en el punto terminal de $z_2$, o como un vector de posición cuyo punto inicial es el origen y punto terminal es $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Vea la figura 1.2.3(b). En el caso $z = z_2 - z_1$, se sigue de (1) y de la figura 1.2.3(b) que la **distancia entre dos puntos** $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ en el plano complejo es igual a la distancia entre el origen y el punto $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$; es decir, $|z| = |z_2 - z_1| = |(x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)|$ o

$$|z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{5}$$

Cuando $z_1 = 0$, de nuevo vemos que el módulo $|z_2|$ representa la distancia entre el origen y el punto $z_2$.

---

**EJEMPLO 2 Conjunto de puntos en el plano complejo**

Describa el conjunto de puntos $z$ en el plano complejo que satisface que $|z| = |z - i|$

**Solución** Podemos interpretar la ecuación dada como igualdad de distancias: la distancia de un punto $z$ al origen iguala la distancia desde $z$ al punto $i$. Geométricamente, esto parece plausible de la figura 1.2.4 que el conjunto de puntos $z$ se encuentra sobre una recta horizontal. Para establecer esto analíticamente, utilizamos (1) y (5) para escribir $|z| = |z - i|$ como:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + y^2} &= \sqrt{x^2 + (y-1)^2}\\ x^2 + y^2 &= x^2 + (y-1)^2\\ x^2 + y^2 &= x^2 + y^2 - 2y + 1.\end{aligned}$$

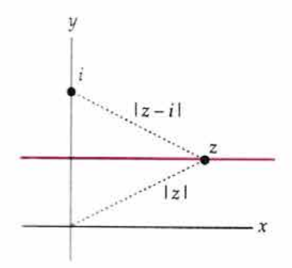



Figura 1.2.4 La recta horizontal es el conjunto de puntos que satisfacen que $|z| = |z - i|$.

Con la última ecuación se obtiene $y = \frac{1}{2}$. Ya que la igualdad es verdadera para $x$ arbitraria y $y = \frac{1}{2}$, lo cual es la ecuación de la recta horizontal que se muestra en color en la figura 1.2.4. Los números complejos que satisfacen $|z| = |z - i|$ se pueden entonces escribir como $z = x + \frac{1}{2}i$. ❑

**Desigualdades** En las observaciones del final de la última sección indicamos que no se puede definir ninguna relación de orden en el sistema de números complejos. Sin embargo, ya que $|z|$ es un número real, podemos comparar los valores absolutos de dos números complejos. Por ejemplo, si $z_1 = 3 + 4i$ y $z_2 = 5 - i$, entonces $|z_1| = \sqrt{25} = 5$ y $|z_2| = \sqrt{26}$ y, por tanto, $|z_1| < |z_2|$. En vista de (1), una interpretación geométrica de la última desigualdad es simple: *El punto* (3, 4) *está más cerca del origen que el punto* (5, −1).

Ahora considere el triángulo dado en la figura 1.2.5 con vértices en el origen, $z_1$, y $z_1 + z_2$. Sabemos de la geometría que la longitud del lado del triángulo correspondiente al vector $z_1 + z_2$ no puede ser mayor que la suma de las longitudes de los dos lados restantes. En símbolos podemos expresar esta observación con la desigualdad

La desigualdad se puede deducir usando las propiedades de los números complejos de la sección 1.1. Vea el problema 50 de los ejercicios 1.2.

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \tag{6}$$

El resultado (6) se conoce como la **desigualdad del triángulo.** Ahora de la identidad $z_1 = z_1 + z_2 + (-z_2)$, con la ecuación (6) se obtiene

$$|z_1| = |z_1 + z_2 + (-z_2)| \leq |z_1 + z_2| + |-z_2|.$$

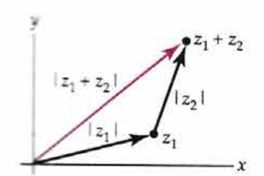



Figura 1.2.5 Triángulo formado por lados vectoriales

Ya que $|z_2| = |-z_2|$ (vea el problema 47 en los ejercicios 1.2), despejando del último resultado a $|z_1 + z_2|$ se obtiene otra importante desigualdad:

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|. \tag{7}$$

Pero ya que $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, la ecuación (7) se puede escribir en la forma alternativa $|z_1 + z_2| = |z_2 + z_1| \geq |z_2| - |z_1| = -(|z_1| - |z_2|)$ y así combinada con el último resultado implica

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2|. \tag{8}$$

También se sigue de (6) que sustituyendo $z_2$ con $-z_2$ se obtiene $|z_1 + (-z_2)| \leq |z_1| + |(-z_2)| = |z_1| + |z_2|$. Este resultado es igual a

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \tag{9}$$

De (8) con $z_2$ sustituida por $-z_2$, también encontramos

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|. \tag{10}$$

En conclusión, observamos que la desigualdad del triángulo (6) se extiende para cualquier suma finita de números complejos:

$$|z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + \cdots + |z_n|. \tag{10}$$

Las desigualdades (6), (8) y (10) serán importantes cuando trabajemos con integrales en los capítulos 5 y 6.

**EJEMPLO 3 Una cota superior**

Determine una cota superior para $\left|\dfrac{-1}{z^4+3z^2+2}\right|$ si $|z|=2$.

**Solución** Por el segundo resultado en (3), el valor absoluto de un cociente es el cociente de los valores absolutos. Así, con $|-1|=1$ queremos determinar un número real positivo $M$ tal que

$$\frac{1}{|z^4+3z^2+2|}\leq M.$$

Para lograr esta tarea queremos que el denominador sea tan pequeño como sea posible. Puesto que $z^4+3z^2+2=(z^2+1)\ (z^2+2)$ podemos utilizar el primer resultado en (3) y (8) para escribir

$$|z^4+3z^2+2|=|z^2+1|\cdot|z^2+2|\geq\big||z^2|-1\big|\cdot\big||z^2|-2\big|. \qquad (12)$$

Usando $|z|=2$, la expresión (12) se convierte en

$$\begin{aligned}|z^4+3z^2+2|\geq\big||z^2|-1\big|\cdot\big||z^2|-2\big| &= \big||z^2|-1\big|\cdot\big||z^2|-2\big|\\ &=|4-1|\cdot|4-2|\\ &=6.\end{aligned}$$

Por tanto para $|z|=2$ tenemos

$$\left|\frac{-1}{z^4+3z^2+2}\right|=\frac{1}{|z^4+3z^2+2|}\leq\frac{1}{6}.$$

❑

## Observaciones

Hemos visto que la desigualdad del triángulo $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ indica que la longitud del vector $z_1+z_2$ no puede ser mayor que la suma de las longitudes de cada uno de los vectores $z_1$ y $z_2$. Pero los resultados dados en (3) son interesantes. El producto $z_1z_2$ y el cociente $z_1/z_2, (z_2\neq 0)$, son números complejos y también son vectores en el plano complejo. Las igualdades $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$ y $|z_1/z_2|=|z_1|/|z_2|$ indican que las longitudes de los vectores $z_1z_2$ y $z_1/z_2$ son exactamente iguales al producto y al cociente de las longitudes, de cada uno de los vectores $z_1$ y $z_2$, respectivamente.

## EJERCICIOS 1.2

*Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-2.*

En los problemas 1 a 4 interprete $z_1$ y $z_2$ como vectores. Trace la gráfica $z_1$, $z_2$, y la suma y diferencia indicadas como vectores.

1. $z_1=4+2i$, $z_2=-2+5i$; $z_1+z_2$, $z_1-z_2$
2. $z_1=1-i$, $z_2=1+i$; $z_1+z_2$, $z_1-z_2$
3. $z_1=5+4i$, $z_2=-3i$; $3z_1+5z_2$, $z_1-2z_2$
4. $z_1=4-3i$, $z_2=-2+3i$; $2z_1+4z_2$, $z_1-z_2$
5. Dado que $z_1=5-2i$ y $z_2=-1-i$, determine un vector $z_3$ en la misma dirección que $z_1+z_2$, pero cuatro veces más largo.

**6.** (**a**) Dibuje los puntos $z_1 = -2 - 8i$, $z_2 = 3i$, $z_3 = -6 - 5i$.

(**b**) Los puntos en el inciso (a) determinan un triángulo con vértices en $z_1$, $z_2$ y $z_3$, respectivamente. Exprese cada lado del triángulo como una diferencia de vectores.

**7.** En el problema 6, determine si los puntos $z_1$, $z_2$ y $z_3$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

**8.** Los tres puntos $z_1 = 1 + 5i$, $z_2 = -4 - i$, $z_3 = 3 + i$ son los vértices de un triángulo. Determine la longitud de la mediana de $z_1$ al lado de $z_3 - z_2$.

En los problemas 9 a 12 determine el módulo del número complejo dado.

**9.** $(1 - i)^2$

**10.** $i(2-i)-4\left(1+\frac{1}{4}i\right)$

**11.** $\dfrac{2i}{3-4i}$

**12.** $\dfrac{1-2i}{1+i}+\dfrac{2-i}{1-i}$

En los problemas 13 y 14 sea $z = x + iy$. Exprese la cantidad dada en términos de $x$ y $y$.

**13.** $|z - 1 - 3i|^2$

**14.** $|z + 5\bar{z}|$

En los problemas 15 y 16 determine cuál de los dos números complejos dados está más cerca del origen. ¿Cuál está más cerca de $1 + i$?

**15.** $10 + 8i$, $11 - 6i$

**16.** $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}i$, $\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{6}i$

En los problemas 17 a 26 describa el conjunto de puntos $z$ en el plano complejo que satisfaga la ecuación dada.

**17.** $\text{Re}((1 + i)z - 1) = 0$

**18.** $[\text{Im}(i\bar{z})]^2 = 2$

**19.** $|z - i| = |z - 1|$

**20.** $\bar{z} = z^{-1}$

**21.** $\text{Im}(z^2) = 2$

**22.** $\text{Re}(z^2) = |\sqrt{3} - i|$

**23.** $|z - 1| = 1$

**24.** $|z - i| = 2|z - 1|$

**25.** $|z - 2| = \text{Re}(z)$

**26.** $|z| = \text{Re}(z)$

En los problemas 27 y 28 establezca la desigualdad simultánea dada.

**27.** Si $|z| = 2$, entonces $8 \leq |z + 6 + 8i| \leq 12$.

**28.** Si $|z| = 1$, entonces $2 \leq |z^2 - 3| \leq 4$.

**29.** Determine una cota superior para el módulo de $3z^2 + 2z + 1$ si $|z| \leq 1$.

**30.** Determine una cota superior e inferior para el recíproco del módulo de $z^4 - 5z^2 + 6$ si $|z| = 2$. [*Sugerencia:* $z^4 - 5z^2 + 6 = (z^2 - 3)(z^2 - 2)$.]

En los problemas 31 y 32 determine un número $z$ que satisface la ecuación dada.

**31.** $|z| - z = 2 + i$

**32.** $|z|^2 + 1 + 12i = 6z$

## Enfocando los conceptos

**33.** (**a**) Dibuje el par de puntos $z = a + ib$ y $\bar{z} = a - ib$ en el plano complejo si $a > 0$. $b > 0$; $a > 0$, $b < 0$; $a < 0$, $b > 0$; y $a < 0$, $b < 0$.

(**b**) En general, ¿cómo se podría describir geométricamente la relación entre un número complejo $z = a + ib$ y su conjugado $\bar{z} = a - ib$?

(**c**) Describa geométricamente la relación entre $z = a + ib$ y $z_1 = -a + ib$.

**34.** ¿Cómo podría describir geométricamente la relación entre un número complejo diferente de cero $z = a + ib$ y su

(**a**) negativo, $-z$?

(**b**) inverso, $z^{-1}$? [*Sugerencia:* Lea nuevamente el problema 33 y después recuerde que $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$.]

**35.** Considere los números complejos $z_1 = 4 + i$, $z_2 = -2 + i$, $z_3 = -2 - 2i$, $z_4 = 3 - 5i$.

(**a**) Utilice cuatro diferentes bosquejos para dibujar los cuatro pares de puntos $z_1$, $iz_1$; $z_2$, $iz_2$; $z_3$, $iz_3$ y $z_4$, $iz_4$.

(**b**) En general, ¿cómo podría describir geométricamente el efecto de multiplicar un número complejo $z = x + iy$ por $i$? ¿Por $-i$?

**36.** ¿Cuál es el único número complejo con módulo 0?

**37.** ¿Bajo qué circunstancias $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$?

**38.** Usando la variable compleja $z$, determine una ecuación de una circunferencia en el plano complejo de radio 5 centrado en $3 - 6i$. [*Sugerencia:* Utilice la ecuación (5)].

**39.** Describa el conjunto de puntos $z$ en el plano complejo que satisfacen $z = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, donde $\theta$ se mide en radianes a partir del eje positivo $x$.

**40.** Usando la variable compleja $z$, determine una ecuación de una elipse en el plano complejo con focos en $-2 + i$ y $2 + i$ cuyo eje mayor es de 8 unidades de longitud.

**41.** Suponga que $z = x + iy$. En la ecuación (6) de la sección 1.1 vimos que $x$ y $y$ se podían expresar en términos de $z$ y $\bar{z}$. Utilice estos resultados para expresar las siguientes ecuaciones cartesianas en forma compleja.

(**a**) $x = 3$

(**b**) $y = 10$

(**c**) $y = x$

(**d**) $x + 2y = 8$

**42.** Usando notación compleja, determine una ecuación paramétrica del segmento de recta entre cualesquier dos números complejos distintos $z_1$ y $z_2$ en el plano complejo.

**43.** Suponga que $z_1$, $z_2$ y $z_3$ son tres puntos distintos en el plano complejo y $k$ es un número real. Interprete geométricamente a $z_3 - z_2 = k(z_2 - z_1)$.

**44.** Suponga que $z_1 \neq z_2$. Interprete geométricamente a $\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) = 0$ en términos de los vectores $z_1$ y $z_2$.

**45.** Suponga que $w = \bar{z}/z$. Sin hacer ningún cálculo, explique por qué $|w| = 1$.

**46.** Sin hacer ningún cálculo, explique por qué las desigualdades $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ y $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$ valen para todos los números complejos $z$.

**47.** Demuestre que

(**a**) $|z| = |-z|$

(**b**) $|z| = |\bar{z}|$.

**48.** Para cualesquier dos números complejos $z_1$ y $z_2$, demuestre que

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

**49.** En este problema empezamos demostrando la primera propiedad $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$ en (3). Por el primer resultado en (2) podemos escribir $|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)\,\overline{(z_1 z_2)}$. Ahora utilice la primera propiedad en (2) de la sección 1.1 para continuar la demostración.

**50.** En este problema lo guiaremos a través de una demostración analítica de la desigualdad del triángulo (6).

Puesto que $|z_1 + z_2|$ y $|z_1| + |z_2|$ son números positivos reales, tenemos que $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ si y sólo si $|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$. Por lo que, es suficiente demostrar que $|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$.

(**a**) Explique por qué $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2$.

(**b**) Explique por qué $(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + 2|z_1\bar{z}_2| + |z_2|^2$.

(**c**) Utilice los incisos (a) y (b) junto con los resultados del problema 46 para deducir (6).

## 1.3 Forma polar de números complejos

Recuerde del cálculo que un punto $P$ en el plano cuyas coordenadas rectangulares son $(x, y)$ se puede describir también en términos de **coordenadas polares.** El sistema de coordenadas polares, inventado por Isaac Newton, consiste de un punto $O$ llamado **polo**, y de una semirrecta que sale del polo llamada **eje polar.** Si $r$ es una distancia dirigida del polo a $P$ y $\theta$ es un ángulo de inclinación (en radianes) medido del eje polar a la recta $OP$, entonces el punto se puede describir con el par ordenado $(r, \theta)$, llamado coordenadas polares de $P$. Vea la figura 1.3.1.

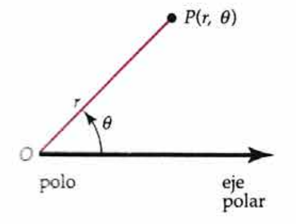


Figura 1.3.1 Coordenadas polares

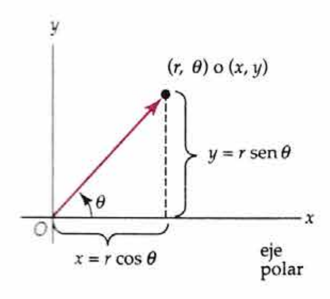


Figura 1.3.2 Coordenadas polares en el plano complejo

**Forma polar** Suponga, como se muestra en la figura 1.3.2, que un sistema coordenado polar está sobrepuesto en el plano complejo con el eje polar coincidiendo con el eje positivo $x$ y el polo $O$ en el origen. Entonces $x$, $y$, $r$ y $\theta$ están relacionadas por $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$. Estas ecuaciones nos permiten expresar un número complejo diferente de cero $z = x + iy$ como $z = (r\cos\theta) + i(r\,\text{sen}\,\theta)$ o

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta). \tag{1}$$

Decimos que (1) es la **forma polar** o **representación polar** del número complejo $z$. De nuevo, de la figura 1.3.2 vemos que la coordenada $r$ se puede interpretar como la distancia del origen al punto $(x, y)$. En otras palabras, adoptamos la convención de que $r$ *nunca es negativa*,* por lo que podemos considerar a $r$ como el módulo de $z$, que es, $r = |z|$. El ángulo $\theta$ de inclinación del vector $z$, que *siempre se medirá en radianes* del eje real positivo, es positivo cuando se mide en contra del sentido del reloj y negativo cuando se mide en el sentido del reloj. El ángulo $\theta$ se llama **argumento** de $z$ y se denota con $\theta = \arg(z)$. Un argumento $\theta$ de un número complejo debe satisfacer las ecuaciones $\cos\theta = x/r$ y $\text{sen}\,\theta = y/r$. Un argumento de un número complejo $z$ no es único, ya que $\cos\theta$ y $\text{sen}\,\theta$ tienen periodo $2\pi$; en otras palabras, si $\theta_0$ es un argumento de $z$, entonces necesariamente los ángulos $\theta_0 \pm 2\pi$, $\theta_0 \pm 4\pi$,... son también argumentos de $z$. En la práctica utilizamos $\tan\theta = y/x$ para determinar $\theta$. Sin embargo, ya que $\tan\theta$ tiene periodo $\pi$, se debe tener cierto cuidado al usar la última ecuación. Una calculadora dará sólo ángulos que satisfacen $-\pi/2 < \tan^{-1}(y/x) < \pi/2$, estos son ángulos en el primer y cuarto cuadrantes. Hemos elegido $\theta$ consistentemente con el cuadrante en el que se localiza $z$; esto puede requerir sumar o restar $\pi$ a $\tan^{-1}(y/x)$ cuando sea apropiado. El siguiente ejemplo muestra cómo se hace esto.

Sea cuidadoso cuando use $\tan^{-1}(y/x)$ ➡

**EJEMPLO 1 Un número complejo en forma polar**

Exprese $-\sqrt{3} - i$ en forma polar.

**Solución** Con $x = -\sqrt{3}$ y $y = -1$ obtenemos $r = |z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$. Ahora $y/x = -1/(-\sqrt{3}) = 1/\sqrt{3}$, y así una calculadora da $\tan^{-1}(1/\sqrt{3}) = \pi/6$, que es un ángulo cuyo lado terminal está en el primer cuadrante. Pero ya que el punto $-\sqrt{3} - i$ se encuentra en el tercer cuadrante, tomamos la solución de $\tan\theta = -1/(-\sqrt{3}) = 1/\sqrt{3}$ como $\theta = \arg(z) = \pi/6 + \pi = 7\pi/6$. Vea la figura 1.3.3. Se sigue de (1) que una forma polar del número es

$$z = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{6}\right). \tag{2}$$

❑

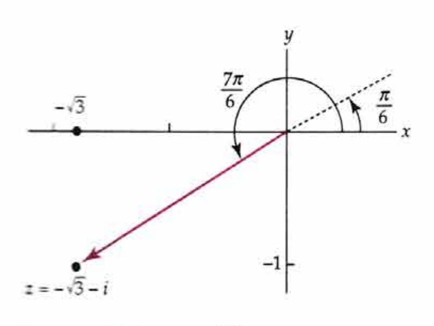


Figura 1.3.3 $\arg(-\sqrt{3} - i)$

*En general, en la descripción polar $(r, \theta)$ de un punto $P$ en el plano cartesiano, podemos tener $r \geq 0$ o $r < 0$.

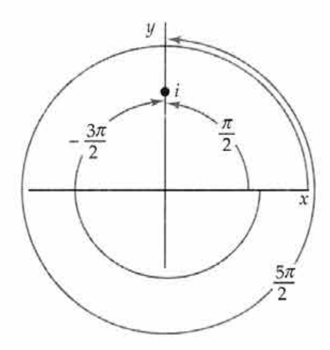



Figura 1.3.4 Algunos argumentos de $i$

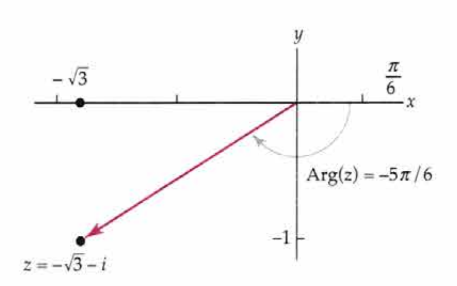



Figura 1.3.5 Argumento principal $z=-\sqrt{3}-i$

**Argumento principal** El símbolo arg(z) representa un conjunto de valores, pero la elección de un argumento $\theta$ de un número complejo que se encuentra en el intervalo $-\pi < \theta \leq \pi$ se llama **valor principal** del arg(z) o **argumento principal** de $z$. El argumento principal de $z$ es *único* y se representa con el símbolo Arg($z$), esto es,

$$-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi.$$

Por ejemplo, si $z = i$, vemos en la figura 1.3.4 que algunos valores de arg($i$) son $\pi/2$, $5\pi/2$, $-3\pi/2$, y así sucesivamente, pero Arg($i$) $= \pi/2$. Similarmente, vemos de la figura 1.3.5 que el argumento de $-\sqrt{3} - i$ que se encuentra en el intervalo $(-\pi, \pi]$, el argumento principal de $z$, es $\text{Arg}(z) = \pi/6 - \pi = -\dfrac{5\pi}{6}$. Usando Arg($z$) podemos expresar el número complejo en (2) en forma polar alternativa:

$$z = 2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right].$$

En general, arg($z$) y Arg($z$) están relacionados por

$$\arg(z) = \text{Arg}(z) + 2n\pi, \qquad n = 0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \ldots \tag{3}$$

Por ejemplo, $\arg(i) = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$ . Para las elecciones $n = 0$ y $n = -1$, (3) da $\arg(i) = \text{Arg}(i) = \pi/2$ y $\arg(i) = -3\pi/2$, respectivamente.

**Multiplicación y División** La forma polar de un número complejo es especialmente conveniente cuando multiplicamos o dividimos dos números complejos. Suponga

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1) \qquad \text{y} \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2),$$

donde $\theta_1$ y $\theta_2$ son argumentos cualesquier de $z_1$ y $z_2$, respectivamente. Entonces

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2 + i\,(\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2)] \tag{4}$$

y, para $z_2 \neq 0$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,[\cos\theta_1\cos\theta_2 + \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2 + i(\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2)] \tag{5}$$

Usando las fórmulas de suma* para el coseno y el seno, (4) y (5) se pueden rescribir como

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \tag{6}$$

y

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 - \theta_2)]. \tag{7}$$

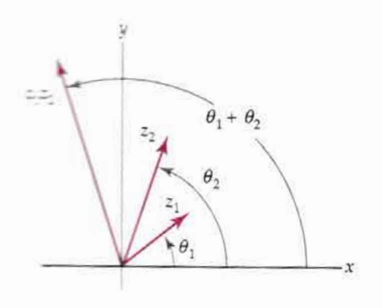



Figura 1.3.6 $\arg(z_1z_2) = \theta_1 + \theta_2$

Examinando las expresiones en (6) y (7) y la figura 1.3.6 se encuentra que las longitudes de los dos vectores $z_1z_2$ y $z_1/z_2$ son el producto de las longitudes de $z_1$ y de $z_2$ y del cociente de las longitudes de $z_1$ y $z_2$, respectivamente. Vea (3) de la sección 1.2. Además, los argumentos de $z_1z_2$ y $z_1/z_2$ están dados por

$$\arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad \text{y} \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2). \tag{8}$$

**EJEMPLO 2 Argumento de un producto y de un cociente**

Acabamos de ver que para $z_1 = i$ y $z_2 = -\sqrt{3} - i$ el $\mathrm{Arg}(z_1) = \pi/2$ y $\mathrm{Arg}(z_2) = -5\pi/6$, respectivamente. Por lo que los argumentos para el producto y cociente

$$z_1z_2 = i(-\sqrt{3} - i) = 1 - \sqrt{3}i \quad \text{y} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{i}{-\sqrt{3} - i} = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$$

se puede obtener de (8):

$$\arg(z_1z_2) = \frac{\pi}{2} + \left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{3} \quad \text{y} \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{4\pi}{3}.$$

Valores adicionales de $\arg(z_1z_2)$ y $\arg(z_1/z_2)$ se pueden encontrar al sumar múltiplos enteros de $2\pi$ a $= \pi/3$ o $4\pi/3$, respectivamente. ❑

**Potencias enteras de $z$** Podemos determinar potencias enteras de un número complejo $z$ de los resultados en (6) y (7). Por ejemplo, si $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, entonces con $z_1 = z_2 = z$, en (6) se obtiene

$$z^2 = r^2\,[\cos(\theta + \theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta + \theta)] = r^2(\cos 2\theta + i\,\mathrm{sen}\,2\theta).$$

Ya que $z^3 = z^2z$, entonces se tiene que

$$z^3 = r^3\,(\cos 3\theta + i\,\mathrm{sen}\,3\theta),$$

y así sucesivamente. Además, si tomamos $\arg(1) = 0$, entonces de (7) se obtiene

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}[\cos(0-\theta) + i\,\mathrm{sen}(0-\theta)] = r^{-1}[\cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta)].$$

Continuando de esta forma, obtenemos una fórmula para la $n$-ésima potencia de $z$ para cualquier entero $n$:

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta). \tag{9}$$

Cuando $n = 0$, obtenemos el conocido resultado $z^0 = 1$.

*$\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \mp \mathrm{sen}\,A\,\mathrm{sen}\,B$ y $\mathrm{sen}(A \pm B) = \mathrm{sen}\,A\cos B \pm \cos A\,\mathrm{sen}\,B$

**EJEMPLO 3 Potencia de un número complejo**

Calcule $z^3$ para $z = -\sqrt{3} - i$.

**Solución** En (2) del ejemplo 1 vimos que un forma polar del número dado es $z = 2[\cos(7\pi/6) + i\,\text{sen}(7\pi/6)]$. Usando (9) con $r = 2$, $\theta = 7\pi/6$. y $n = 3$ obtenemos

$$\left(-\sqrt{3} - i\right)^3 = 2^3\left[\cos\left(3\frac{7\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(3\frac{7\pi}{6}\right)\right] = 8\left[\cos\frac{7\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{7\pi}{2}\right] = -8i$$

ya que $\cos(7\pi/2) = 0$ y $\text{sen}(7\pi/2) = -1$. ❑

Observe en el ejemplo 3, si también queremos el valor de $z^{-3}$, entonces procederíamos en dos maneras: ya sea determinamos el recíproco de $z^3 = -8i$ o utilizamos (9) con $n = -3$.

**Fórmula de De Moivre** Cuando $z = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$, tenemos $|z| = r = 1$, y así de (9) se obtiene

$$(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta. \qquad (10)$$

Este último resultado se conoce como **fórmula de De Moivre** y es útil en la deducción de ciertas identidades trigonométricas que implican $\cos n\theta$ y $\text{sen}\,n\theta$. Vea los problemas 33 y 34 de los ejercicios 1.3.

**EJEMPLO 4 Fórmula de De Moivre**

De (10), con $\theta = \pi/6$, $\cos\theta = \sqrt{3}/2$, y $\text{sen}\,\theta = 1/2$:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^3 = \cos 3\theta + i\,\text{sen}\,3\theta = \cos\left(3\cdot\frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(3\cdot\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{2} = i.$$

❑

**Observaciones** *Comparación con el análisis real*

(*i*) Observe en el ejemplo 2 que, aunque usemos los argumentos principales de $z_1$ y $z_2$ que, $\arg(z_1/z_2) = 4\pi/3 \neq \text{Arg}(z_1/z_2)$. Si bien (8) es verdadera para cualquier argumento de $z_1$ y $z_2$, en general, *no es cierto* que $\text{Arg}(z_1z_2) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)$ y $\text{Arg}(z_1/z_2) = \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2)$. Vea los problemas 37 y 38 de los ejercicios 1.3.

(*ii*) Se puede asignar un argumento a cualquier número complejo *z diferente de cero.* Sin embargo, para $z = 0$, $\arg(z)$ no se puede definir en una forma significativa.

(*iii*) Si tomamos $\arg(z)$ del intervalo $(-\pi, \pi]$, la relación **entre** un número complejo $z$ y su argumento es univaluada; esto es, cada número complejo diferente de cero tiene precisamente *un* ángulo en $(-\pi, \pi]$. Pero no existe nada especial en el intervalo $(-\pi, \pi]$, también establecemos una relación univaluada al usar el intervalo $(0, 2\pi]$ para definir el valor principal del argumento de $z$. Para el intervalo $(-\pi, \pi]$, el eje real negativo es análogo a un barrera que acordamos no cruzar; el nombre técnico de esta barrera es un **corte de rama.** Si utilizamos $(0, 2\pi]$, el corte de rama es el eje real positivo. El concepto de corte de rama es importante y se examinará con gran detalle cuando estudiemos funciones en los capítulos 2 y 4.

(*iv*) La parte "coseno *i* seno" de la forma polar de un número complejo algunas veces se abrevia cis. Es decir,

$$z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = r\operatorname{cis}\theta.$$

Esta notación usada principalmente en ingeniería, no la usaremos en este libro.

## EJERCICIOS 1.3

*Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-2.*

En los problemas 1 a 10 escriba el número complejo dado en la forma polar usando primero un argumento $\theta \neq \operatorname{Arg}(z)$, y después usando $\theta = \operatorname{Arg}(z)$.

**1.** $2$

**2.** $-10$

**3.** $-3i$

**4.** $6i$

**5.** $1 + i$

**6.** $5 - 5i$

**7.** $-\sqrt{3} + i$

**8.** $-2 - 2\sqrt{3}i$

**9.** $\dfrac{3}{-1+i}$

**10.** $\dfrac{12}{\sqrt{3}+i}$

En los problemas 11 y 12 utilice un calculadora para escribir el número complejo dado primero en forma polar usando un argumento $\theta \neq \operatorname{Arg}(z)$, y después usando $\theta = \operatorname{Arg}(z)$.

**11.** $-\sqrt{2} + \sqrt{7}i$

**12.** $-12 - 5i$

En los problemas 13 y 14 escriba el número complejo cuyas coordenadas polares $(r, \theta)$ están dadas en la forma $a + ib$. Si es necesario utilice una calculadora.

**13.** $(4, -5\pi/3)$

**14.** $(2, 2)$

En los problemas 15 a 18 escriba el número complejo cuya forma polar está dada en la forma $a + ib$. Si es necesario utilice una calculadora.

**15.** $z = 5\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{6}\right)$

**16.** $z = 8\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{4} + i\operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{4}\right)$

**17.** $z = 6\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{8}\right)$

**18.** $z = 10\left(\cos\dfrac{\pi}{5} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{5}\right)$

En los problemas 19 y 20 utilice (6) y (7) para determinar $z_1z_2$ y $z_1/z_2$. Escriba el número en la forma $a + ib$.

**19.** $z_1 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{8}\right)$, $z_2 = 4\left(\cos\dfrac{3\pi}{8} + i\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{8}\right)$

**20.** $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$, $z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{12}\right)$

En los problemas 21 a 24 escriba cada número complejo en forma polar. Después utilice ya sea (6) o (7) para obtener la forma polar del número dado. Finalmente, escriba la forma polar en la forma $a + ib$.

**21.** $(3 - 3i)(5 + 5\sqrt{3}i)$

**22.** $(4 + 4i)(-1 + i)$

**23.** $\dfrac{-i}{1+i}$

**24.** $\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}i}{-1 + \sqrt{3}i}$

En los problemas 25 a 30 utilice (9) para calcular las potencias indicadas.

**25.** $(1 + \sqrt{3}i)^9$

**26.** $(2 - 2i)^5$

**27.** $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10}$

**28.** $(-\sqrt{2} + \sqrt{6}i)^4$

**29.** $\left[\left(\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8} + i\sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}\right)\right]^{12}$

**30.** $\left[\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{9}\right)\right]^6$

En los problemas 31 y 32 escriba en forma polar el número complejo dado y después en la forma $a + ib$.

**31.** $\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{9}\right)^{12}\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)\right]^5$

**32.** $\dfrac{\left[8\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{8}\right)\right]^3}{\left[2\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{16}\right)\right]^{10}}$

**33.** Utilice la fórmula de De Moivre (10) con $n = 2$ para determinar identidades trigonométricas para $\cos 2\theta$ y $\operatorname{sen} 2\theta$.

**34.** Utilice la fórmula de De Moivre (10) con $n = 3$ para determinar identidades trigonométricas para $\cos 3\theta$ y $\operatorname{sen} 3\theta$.

En los problemas 35 y 36 determine un entero positivo $n$ para el que valga la igualdad.

**35.** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^n = -1$

**36.** $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^n = 1$

**37.** Para los números complejos $z_1 = -1$ y $z_2 = 5i$, compruebe que:

(**a**) $\operatorname{Arg}(z_1z_2) \neq \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2)$

(**b**) $\operatorname{Arg}(-z_2/z_1) = \operatorname{Arg}(-z_2) - \operatorname{Arg}(z_1)$.

**38.** Para los números complejos dados en el problema 37, compruebe que:

(**a**) $\arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

(**b**) $\arg(-z_2/z_1) = \arg(-z_2) - \arg(z_1)$.

## Enfocando los conceptos

**39.** Suponga que $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$. Describa geométricamente el efecto de multiplicar $z$ por un número complejo de la forma $z_1 = \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha$, cuando $\alpha > 0$ y cuando $\alpha < 0$.

**40.** Suponga $z = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$. Si $n$ es un entero, evalúe $z^n + \bar{z}^n$ y $z^n - \bar{z}^n$.

**41.** Escriba una ecuación que relacione a $\arg(z)$ con $\arg(1/z)$, $z \neq 0$.

**42.** ¿Hay algún caso especial en el que $\operatorname{Arg}(z_1z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2)$? Pruebe sus afirmaciones.

**43.** ¿Cómo están relacionados los números complejos $z_1$ y $z_2$ si $\arg(z_1) = \arg(z_2)$?

**44.** Describa el conjunto de puntos $z$ en el plano complejo que satisfacen que $\arg(z) = \pi/4$.

45. La estudiante A establece que, aunque no puede encontrar esto en el libro, piensa que $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$. Por ejemplo, dice, si $z = 1 + i$, entonces $\bar{z} = 1 - i$, y $\arg(z) = \pi/4$ y $\arg(\bar{z}) = -\frac{\pi}{4}$. El estudiante $B$ no está de acuerdo, ya que siente que tiene un contraejemplo: Si $z = i$, entonces $\bar{z} = -i$; podemos tomar $\arg(i) = \pi/2$ y $\arg(-i) = 3\pi/2$, y así $\arg(i) \neq -\arg(-i)$. Tome partido y defienda su posición.

46. Suponga que $z_1$, $z_2$ y $z_1 z_2$ son números complejos en el primer cuadrante y que los puntos $z = 0$, $z = 1$, $z_1$, $z_2$, y $z_1 z_2$ están etiquetadas por $O$, $A$, $B$, $C$ y $D$, respectivamente. Estudie la fórmula en (6) y después analice cómo están relacionados los triángulos $OAB$ y $OCD$.

47. Suponga que $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$. Si $z_1 = z_2$, entonces, ¿cómo están relacionados $r_1$ y $r_2$? ¿Cómo están relacionados $\theta_1$ y $\theta_2$?

48. Suponga que $z_1$ está en el primer cuadrante. Para cada $z_2$ analice el cuadrante en el que se pudiera ubicar $z_1 z_2$.

(a) $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ (b) $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$

(c) $z_2 = -i$ (d) $z_2 = -1$

49. (a) Para $z \neq 1$, compruebe la identidad

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

(b) Utilice el inciso (a) y los resultados adecuados de esta sección para establecer que

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}\,(n + \frac{1}{2})\theta}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta}.$$

para $0 < \theta < 2\pi$. El resultado anterior se conoce como **identidad de Lagrange** y es útil en la teoría de series de Fourier.

50. Suponga que $z_1$, $z_2$, $z_3$ y $z_4$ son cuatro números complejos distintos. Interprete geométricamente:

$$\arg\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

## 1.4 Potencias y raíces

Recuerde del álgebra que $-2$ y $2$ se dice que son *raíces cuadradas* del número 4, ya que $(-2)^2 = 4$ y $(2)^2 = 4$. En otras palabras, las dos raíces cuadradas de 4 son soluciones distintas de la ecuación $w^2 = 4$. De igual manera decimos que $w = 3$ es una raíz cúbica de 27 pues $w^3 = 3^3 = 27$. Esta última ecuación nos indica de nuevo la dirección de las variables complejas, ya que cualquier número real tiene sólo una raíz cúbica *real* y *dos raíces complejas.* En general, decimos que un número $w$ es una ***n*-ésima raíz** de un número complejo diferente de cero $z$ si $w^n = z$, donde $n$ es un entero positivo. Por ejemplo, le pedimos que compruebe que $w_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i$ y $w_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i$ son las dos raíces cuadradas del número complejo $z = i$, ya que $w_1^2 = i$ y $w_2^2 = i$. Vea el problema 39 en los ejercicios 1.1.

Ahora demostraremos que existen exactamente $n$ soluciones de la ecuación $w^n = z$.

**Raíces** Suponga que $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ y $w = \rho(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi)$ son formas polares de los números complejos $z$ y $w$. Entonces, usando (9) de la sección 1.3,

la ecuación $w^n = z$ será

$$\rho^n(\cos n\phi + i \operatorname{sen} n\phi) = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta). \tag{1}$$

De (1) podemos concluir que

$$\rho^n = r \tag{2}$$

y

$$\cos n\phi + i \operatorname{sen} n\phi = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta. \tag{3}$$

Vea el problema 47 en los ejercicios 1.3.

De (2), definimos $\rho = \sqrt[n]{r}$ es la única raíz $n$-ésima positiva del número positivo real $r$. De (3), la definición de la igualdad de dos números complejos implica que

$$\cos n\phi = \cos\theta \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} n\phi = \operatorname{sen}\theta.$$

Estas igualdades, a su vez, indican que los argumentos $\theta$ y $\phi$ están relacionados por $n\phi = \theta + 2k\pi$, donde $k$ es un entero. Por lo que,

$$\phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

Como $k$ toma los valores enteros sucesivos $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$ obtenemos $n$ raíces $n$-ésimas *distintas* de $z$; estas raíces tienen el mismo módulo $\sqrt[n]{r}$ pero argumentos diferentes. Observe que para $k \geq n$ obtenemos las mismas raíces ya que el seno y coseno tienen periodos $2\pi$. Para ver por qué esto es así, suponga que $k = n + m$, donde $m = 0, 1, 2, \ldots$. Entonces

$$\phi = \frac{\theta + 2(n + m)\pi}{n} = \frac{\theta + 2m\pi}{n} + 2\pi$$

y $$\operatorname{sen}\phi = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2m\pi}{n}\right), \quad \cos\phi = \cos\left(\frac{\theta + 2m\pi}{n}\right).$$

Resumimos este resultado. Las $n$ raíces $n$-ésima de un número complejo $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ diferente de cero están dadas por

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right], \tag{4}$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

---

## EJEMPLO 1 Raíces cúbicas de un número complejo

Determine las tres raíces cúbicas de $z = i$.

**Solución** Considere que estamos básicamente resolviendo la ecuación $w^3 = i$. Ahora con $r = 1$, $\theta = \arg(i) = \pi/2$, una forma polar del número dado está dado por $z = \cos(\pi/2) + i \operatorname{sen}(\pi/2)$. De (4), con $n = 3$, entonces obtenemos

$$w_k = \sqrt[3]{1}\left[\cos\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2.$$

Por tanto, las tres raíces son

$$k = 0, \quad w_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$k = 1, \quad w_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$k = 2, \quad w_2 = \cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = -i.$$

❑

**Raíz $n$-ésima principal** En la página 15 indicamos que el símbolo $\arg(z)$ realmente se establece para un *conjunto* de argumentos para un número complejo $z$. Enunciando de otra manera, para un número complejo dado $z \neq 0$, $\arg(z)$ es *infinitamente-valuada.* De manera parecida, $z^{1/n}$ es $n$-valuada; es decir, el símbolo $z^{1/n}$ representa el conjunto de $n$ *raíces n-ésimas* $w_k$ de $z$. La *única* raíz de un número complejo $z$ (obtenido al usar el valor principal de $\arg(z)$ con $k = 0$) naturalmente se refiere como la ***n*-ésima raíz principal** de $w$. En el ejemplo 1, ya que $\text{Arg}(i) = \pi/2$, vemos que $w_0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i$ es la raíz cúbica principal de $i$. La elección de $\theta = \text{Arg}(z)$ y $k = 0$ nos garantiza que cuando $z$ es un número positivo real $r$, la $n$-ésima raíz principal es $\sqrt[n]{r}$.

$\sqrt{4} = 2$ y $\sqrt[3]{27} = 3$ son la raíz cuadrada principal de 4 y la raíz cúbica principal de 27, respectivamente.

Ya que las raíces dadas en (4) tienen el mismo módulo, las $n$ raíces $n$-ésimas de un número complejo diferente de cero $z$ se encuentra en una circunferencia de radio $\sqrt[n]{r}$ centrado en el origen en el plano complejo. Además, ya que la diferencia entre los argumentos de cualesquiera dos raíces sucesivas $w_k$ y $w_{k+1}$ es $2\pi/\text{n}$, las $n$ raíces $n$-ésimas de $z$ están igualmente espaciadas en esta circunferencia, empezando con la raíz cuyo argumento es $\theta/n$. La figura 1.4.1 muestra las tres raíces cúbicas de $i$ obtenidas en el ejemplo 1 espaciadas en intervalos angulares iguales de $2\pi/3$ en la circunferencia de un círculo unitario iniciando con la raíz $w_0$ cuyo argumento es $\pi/6$.

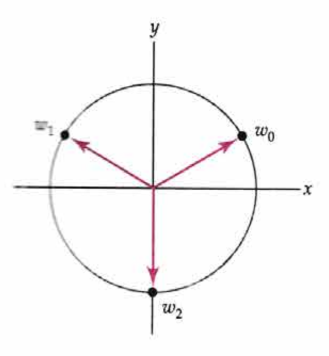



Figura 1.4.1 Tres raíces cúbicas de $i$

Como muestra el siguiente ejemplo, las raíces de un número complejo no tienen que ser números "agradables" como en el ejemplo 1.

---

**EJEMPLO 2 Raíces cuartas de un número complejo**

Determine las cuatro raíces cuartas de $z = 1 + i$.

**Solución** En este caso, $r = \sqrt{2}$ y $\theta = \arg(z) = \pi/4$. De (4) con $n = 4$, obtenemos

$$w_k = \sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi/4 + 2k\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi/4 + 2k\pi}{4}\right)\right], \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Con la ayuda de una calculadora determinamos

$$k = 0, \quad w_0 = \sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{\pi}{16} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{16}\right] \approx 1.0696 + 0.2127i$$

$$k = 1, \quad w_1 = \sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{9\pi}{16} + i\,\text{sen}\,\frac{9\pi}{16}\right] \approx -0.2127 + 1.0696i$$

$$k = 2, \quad w_2 = \sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{17\pi}{16} + i\,\text{sen}\,\frac{17\pi}{16}\right] \approx -1.0696 - 0.2127i$$

$$k = 3, \quad w_3 = \sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{25\pi}{16} + i\,\text{sen}\,\frac{25\pi}{16}\right] \approx 0.2127 - 1.0696i.$$

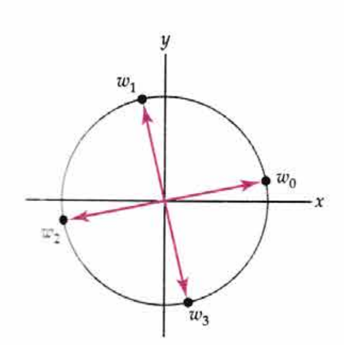



Figura 1.4.2 Cuatro raíces cúbicas de $1 + i$

Como se muestra en la figura 1.4.2, las cuatro raíces se encuentran en una circunferencia de radio $r = \sqrt[8]{2} \approx 1.09$ centrada en el origen y están espaciadas a iguales intervalos angulares de $2\pi/4 = \pi/2$ radianes, comenzando con la raíz cuyo argumento es $\pi/16$. Ya que $\theta = \text{Arg}(z) = \pi/4$, la cuarta raíz principal es $w_0$. ❑

## Observaciones *Comparación con el análisis real*

(*i*) Como una consecuencia de (4), podemos decir que el sistema de números complejos es *cerrado* bajo la operación de extracción de raíces. Esto significa que para cualquier $z$ en **C**, $z^{1/n}$ está también en **C**. El sistema de números reales no tiene una propiedad de cerradura similar, ya que si $x$ está en **R**, $x^{1/n}$ no está necesariamente en **R**.

(*ii*) Geométricamente, las $n$ raíces $n$-ésimas de un número complejo $z$ se pueden también interpretar como los vértices de un polígono regular con $n$ lados que está inscrito dentro de un círculo de radio $\sqrt[n]{r}$ centrado en el origen. Puede ver la viabilidad de este hecho al examinar de nuevo las figuras 1.4.1 y 1.4.2. Vea el problema 19 en los ejercicios 1.4.

(*iii*) Cuando $m$ y $n$ son enteros positivos con factores no comunes, entonces (4) nos permite definir una **potencia racional** de $z$, es decir, $z^{m/n}$. Se puede demostrar que el conjunto de valores $(z^{1/n})^m$ es igual que el conjunto de valores $(z^m)^{1/n}$. Este conjunto de $n$ valores comunes está definido como $z^{m/n}$. Vea los problemas 25 y 26 de los ejercicios 1.4.

## EJERCICIOS 1.4

*Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-2.*

En los problemas 1 a 14 use (4) para calcular todas las raíces. Obtenga la $n$-ésima raíz principal en cada caso. Ubique las raíces $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$, en una circunferencia adecuada centrada en el origen.

**1.** $(8)^{1/3}$

**2.** $(-1)^{1/4}$

**3.** $(-9)^{1/2}$

**4.** $(-125)^{1/3}$

**5.** $(i)^{1/2}$

**6.** $(-i)^{1/3}$

**7.** $(-1+i)^{1/3}$

**8.** $(1+i)^{1/5}$

**9.** $(-1+\sqrt{3}i)^{1/2}$

**10.** $(-1-\sqrt{3}i)^{1/4}$

**11.** $(3+4)^{1/2}$

**12.** $(5+12i)^{1/2}$

**13.** $\left(\dfrac{16i}{1+i}\right)^{1/8}$

**14.** $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^{1/6}$

**15.** (**a**) Compruebe que $(4+3i)^2 = 7+24i$.

(**b**) Use el inciso (a) para encontrar los dos valores de $(7+24i)^{1/2}$.

**16.** Trabaje nuevamente el problema 15 usando (4).

**17.** Determine todas las soluciones de la ecuación $z^4+1=0$.

**18.** Use el hecho de que $8i = (2+2i)^2$ para determinar todas las soluciones de la ecuación

$$z^2 - 8z + 16 = 8i.$$

Las $n$ **raíces $n$-ésimas distintas de la unidad** son soluciones de la ecuación $w^n = 1$. Los problemas 19 al 24 tratan con las raíces de la unidad.

**19.** (**a**) Demuestre que las raíces $n$-ésimas de la unidad están dadas por

$$(1)^{1/n} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\text{sen}\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

(**b**) Determine las raíces $n$-ésimas de la unidad para $n = 3$, $n = 4$ y $n = 5$.

(**c**) Con cuidado trace las raíces de la unidad encontradas en el inciso (b). Dibuje los polígonos regulares formados con las raíces como vértices. [*Sugerencia:* Vea (*ii*) en las Observaciones].

**20.** Suponga que $w$ es una raíz cúbica de la unidad correspondiente a $k = 1$. Vea el problema 19(a).

(**a**) ¿Cómo están relacionadas $w$ y $w^2$?

(**b**) Compruebe por cálculo directo que

$$1 + w + w^2 = 0.$$

(**c**) Explique cómo el resultado del inciso (b) es consecuencia de la definición básica de que $w$ es una raíz cúbica de 1, es decir, $w^3 = 1$. [*Sugerencia:* Factorice].

**21.** Para una $n$ fija, si tomamos $k = 1$ en el problema 19(a), obtenemos la raíz

$$w_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}.$$

Explique por qué las raíces $n$-ésimas de la unidad se pueden escribir como

$$1, w_n, w_n^2, w_n^3, \ldots, w_n^{n-1}.$$

**22.** Considere la ecuación $(z + 2)^n + z^n = 0$, donde $n$ es un entero positivo. Por cualquier medio, resuelva la ecuación para $z$ cuando $n = 1$. Cuando $n = 2$.

**23.** Considere la ecuación en el problema 22.

(**a**) En el plano complejo, determine la posición de todas las soluciones $z$ cuando $n = 5$. [*Sugerencia:* Escriba la ecuación en la forma $[(z + 2)/(-z)^5] = 1$ y use el inciso (a) del problema 19.]

(**b**) Examine nuevamente las soluciones de la ecuación en el problema 22 para $n = 1$ y $n = 2$. Forme una suposición acerca de la posición de todas las soluciones de $(z + 2)^n + z^n = 0$.

**24.** Para las raíces $n$-ésimas de la unidad dadas en el problema 21, demuestre que

$$1 + w_n + w_n^2 + w_n^3 + \cdots + w_n^{n-1} = 0.$$

[*Sugerencia:* Multiplique la suma $1 + w_n + w_n^2 + w_n^3 + \cdots + w_n^{n-1}$ por $w_n - 1$.]

Antes de trabajar con los problemas 25 y 26, lea (*iii*) en las Observaciones. Si $m$ y $n$ son enteros positivos sin factores comunes, entonces los $n$ valores de la potencia racional $z^{m/n}$ son

$$w_k = \sqrt[n]{r^m}\left[\cos\frac{m}{n}(\theta + 2k\pi) + i\operatorname{sen}\frac{m}{n}(\theta + 2k\pi)\right], \tag{5}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$. Las $w_k$ son las $n$ distintas soluciones de $w^n = z^m$.

**25.** (**a**) Primero calcule el conjunto de valores $i^{1/2}$ usando (4). Después calcule $(i^{1/2})^3$ usando (9) de la sección 1.3.

(**b**) Ahora calcule $i^3$. Después calcule $(i^3)^{1/2}$ usando (4). Compare estos valores con los resultados del inciso (b).

(**c**) Por último, calcule $i^{3/2}$ usando la fórmula (5).

**26.** Use (5) para encontrar todas las soluciones de la ecuación $w^2 = (-1 + i)^5$.

## Enfocando los conceptos

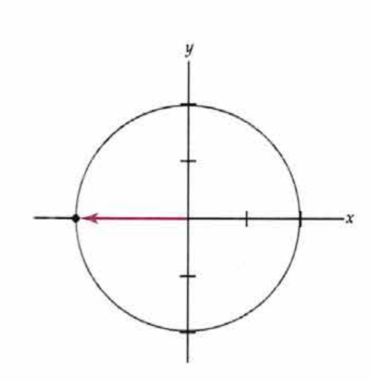


Figura 1.4.3 Figura para el problema 27

**27.** El vector dado en la figura 1.4.3 representa un valor de $z^{1/n}$. Usando sólo la figura y trigonometría, es decir, no utilice la fórmula (4), determine los valores restantes de $z^{1/n}$ cuando $n = 3$. Repita para $n = 4$ y $n = 5$.

**28.** Suponga que $n$ denota un entero no negativo. Determine los valores de $n$ tal que $z^n = 1$ tenga sólo soluciones reales. Defienda su respuesta con argumentos matemáticos.

**29.** **(a)** Proceda como en el ejemplo 2 para encontrar los valores aproximados de las dos raíces cuadradas $w_0$ y $w_1$ de $1 + i$.

**(b)** Demuestre que los valores exactos de las raíces en el inciso (a) son

$$w_0 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}, \quad w_1 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}.$$

**30.** Analice: ¿Cuál es el significado geométrico del resultado del problema 24?

**31.** Analice: Un número real, ¿puede tener una $n$-ésima raíz compleja? ¿Puede un número complejo no real tener una $n$-ésima raíz real?

**32.** Suponga que $w$ está ubicada en el primer cuadrante y es una raíz cúbica de un número complejo $z$. ¿Puede existir una segunda raíz cúbica de $z$ localizada en el primer cuadrante? Defienda su respuesta con argumentos matemáticos.

**33.** Suponga que $z$ es un número complejo que tiene una cuarta raíz $w$ que no es real ni imaginaria pura. Explique por qué las cuartas raíces restantes no son reales ni imaginarias puras.

**34.** Analice: Los vectores en la figura 1.4.4 representan las cuatro cuartas raíces de un número complejo $z$. ¿Puede determinar a partir de sólo esta figura cuál raíz es la cuarta raíz principal de $z$?

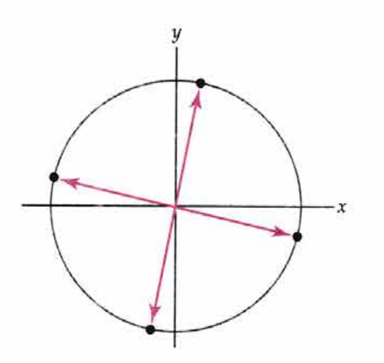


Figura 1.4.4 Figura para el problema 34

## Tareas del laboratorio de cómputo

En los problemas 35-40, use un SAC* para encontrar primero $z^n = w$ para el número complejo dado y el valor indicado de $n$. Después, usando la salida y el mismo valor de $n$, determine si $w^{1/n} = (z^n)^{1/n} = z$. Si no, explique por qué no.

**35.** $z = 2.5 - i$; $n = 10$

**36.** $z = -0.5 + 0.3i$; $n = 5$

**37.** $z = 1 + 3i$; $n = 8$

**38.** $z = 2 + 2i$; $n = 12$

**39.** $z = i$; $n = 21$

**40.** $z = -1 + \sqrt{3}i$; $n = 11$

# 1.5 Conjuntos de puntos en el plano complejo

En las secciones anteriores examinamos algunas nociones elementales de álgebra y geometría de los números complejos. Pero apenas hemos tocado la superficie del tema conocido como análisis complejo; el propósito principal de nuestro estudio está por venir. Nuestro objetivo en los capítulos que siguen es examinar las funciones de una sola variable compleja $z = x + iy$ y los cálculos de estas funciones.

Antes de introducir el concepto de una función en el capítulo 2, necesitamos establecer algunas definiciones esenciales y la terminología de conjuntos en el plano complejo.

**Círculos** Suponga $z_0 = x_0 + iy_0$. Puesto que $|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ es la distancia entre los puntos $z = x + iy$ y $z_0 = x_0 + iy_0$, los puntos $z = x + iy$ que satisfacen la ecuación

$$|z - z_0| = \rho, \quad \rho > 0, \tag{1}$$

se encuentran **en la circunferencia de un círculo** de radio $\rho$ centrado en el punto $z_0$. Vea la figura 1.5.1.

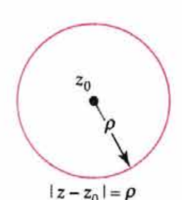


Figura 1.5.1 Círculo de radio $\rho$

*A lo largo del libro usaremos la abreviatura SAC para "sistema asistido de cómputo".

**EJEMPLO 1 Dos círculos**

**(a)** $|z| = 1$ es la ecuación de una circunferencia de un círculo unitario centrado en el origen.

**(b)** Al rescribir $|z - 1 + 3i| = 5$ como $|z - (1 - 3i)| = 5$, vemos de (1) que la ecuación describe la circunferencia de un círculo de radio 5 centrado en el punto $z_0 = 1 - 3i$.

❑

**Discos y vecindades** Los puntos $z$ que satisfacen la desigualdad $|z - z_0| \leq \rho$ pueden estar ya sea *sobre* la circunferencia del círculo $|z - z_0| = \rho$ o *dentro* del círculo. Decimos que el conjunto de puntos definido por $|z - z_0| \leq \rho$ es un **disco** de radio $\rho$ centrado en $z_0$. Pero los puntos $z$ que satisfacen la estricta desigualdad $|z - z_0| < \rho$ se encuentran dentro, y no sobre, la circunferencia de un círculo de radio $\rho$ centrado en el punto $z_0$. Este conjunto se llama una **vecindad** de $z_0$. A veces, necesitaremos usar una vecindad de $z_0$ que también *excluya* a $z_0$. Dicha vecindad está definida por la desigualdad simultánea $0 < |z - z_0| < \rho$ y se llama una **vecindad excluyente** de $z_0$. Por ejemplo, $|z| < 1$ define una vecindad del origen, mientras que $0 < |z| < 1$ define una vecindad excluyente del origen; $|z - 3 + 4i| < 0.01$ define una vecindad de $3 - 4i$, mientras que la desigualdad $0 < |z - 3 + 4i| < 0.01$ define una vecindad excluyente de $3 - 4i$.

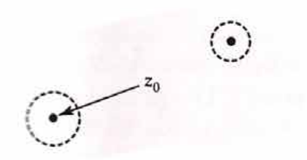



Figura 1.5.2 Conjunto abierto.

**Conjuntos abiertos** Se dice que un punto $z_0$ es un **punto interior** de un conjunto $S$ del plano complejo si existe alguna vecindad de $z_0$ que se encuentra completamente dentro de $S$. Si cada punto $z$ de un conjunto $S$ es un punto interior, entonces se dice que $S$ es un **conjunto abierto**. Vea la figura 1.5.2. Por ejemplo, la desigualdad $\text{Re}(z) > 1$ define la *mitad derecha del plano,* que es un conjunto abierto. Todos los números complejos $z = x + iy$ para los que $x > 1$ están en este conjunto. Si elegimos, por ejemplo, $z_0 = 1.1 + 2i$, entonces una vecindad de $z_0$ que se encuentra totalmente en el conjunto se define por $|z - (1.1 + 2i)| < 0.05$. Vea la figura 1.5.3. Por otra parte, el conjunto $S$ de puntos en el plano complejo definido por $\text{Re}(z) \geq 1$ *no* es abierto porque cada vecindad de un punto que se encuentra en la recta $x = 1$ debe contener puntos en $S$ y no hay puntos en $S$. Vea la figura 1.5.4.

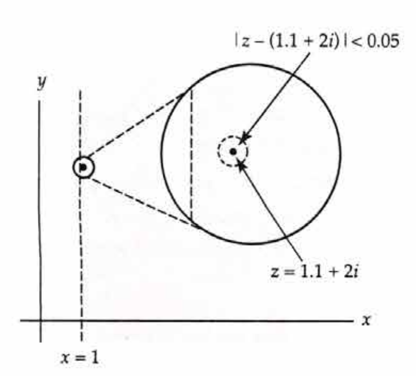



Figura 1.5.3 Conjunto abierto con vista amplificada de un punto cerca de $x = 1$

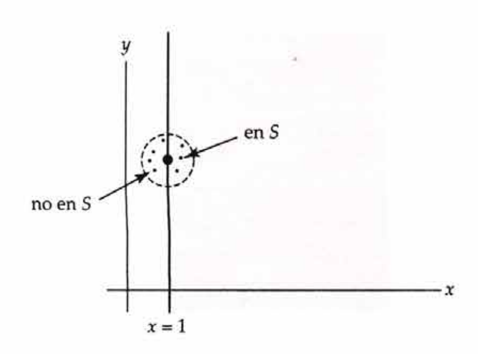
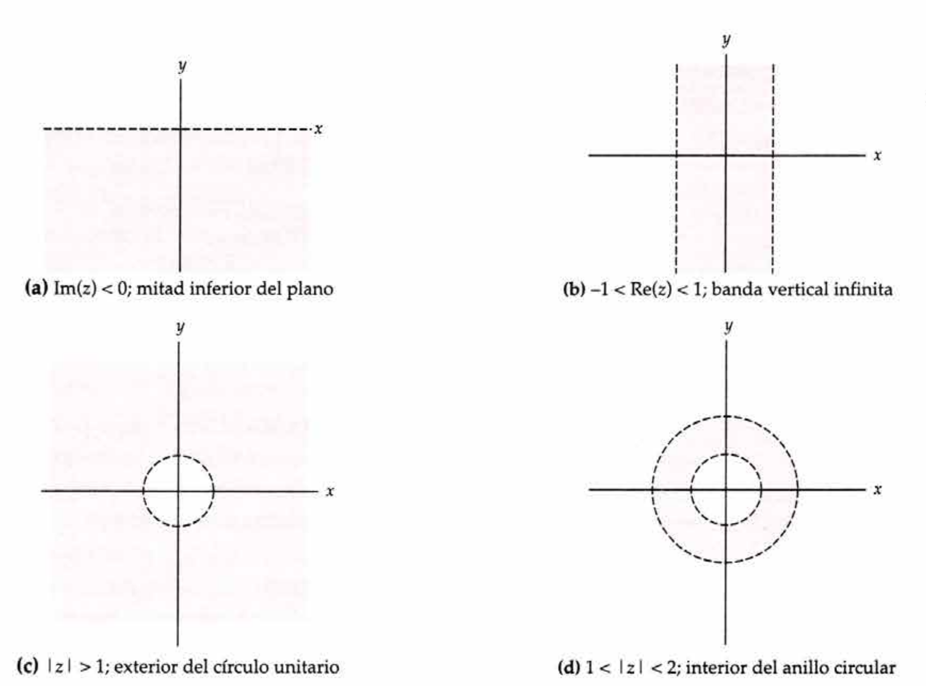
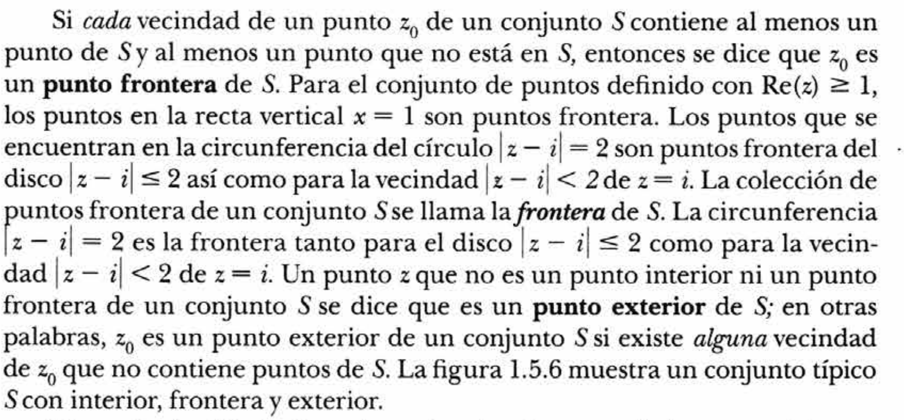



Figura 1.5.4 Conjunto $S$ no abierto



**(a)** Im($z$) < 0; mitad inferior del plano

**(b)** −1 < Re($z$) < 1; banda vertical infinita



**(c)** $|z| > 1$; exterior del círculo unitario

**(d)** $1 < |z| < 2$; interior del anillo circular

Figura 1.5.5 Cuatro ejemplos de conjuntos abiertos

## EJEMPLO 2 **Algunos conjuntos abiertos**

La figura 1.5.5 muestra algunos conjuntos abiertos adicionales. ❑

Si *cada* vecindad de un punto $z_0$ de un conjunto $S$ contiene al menos un punto de $S$ y al menos un punto que no está en $S$, entonces se dice que $z_0$ es un **punto frontera** de $S$. Para el conjunto de puntos definido con $\text{Re}(z) \geq 1$, los puntos en la recta vertical $x = 1$ son puntos frontera. Los puntos que se encuentran en la circunferencia del círculo $|z - i| = 2$ son puntos frontera del disco $|z - i| \leq 2$ así como para la vecindad $|z - i| < 2$ de $z = i$. La colección de puntos frontera de un conjunto $S$ se llama la ***frontera*** de $S$. La circunferencia $|z - i| = 2$ es la frontera tanto para el disco $|z - i| \leq 2$ como para la vecindad $|z - i| < 2$ de $z = i$. Un punto $z$ que no es un punto interior ni un punto frontera de un conjunto $S$ se dice que es un **punto exterior** de $S$; en otras palabras, $z_0$ es un punto exterior de un conjunto $S$ si existe *alguna* vecindad de $z_0$ que no contiene puntos de $S$. La figura 1.5.6 muestra un conjunto típico $S$ con interior, frontera y exterior.

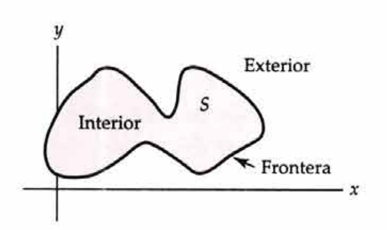


Figura 1.5.6 Interior, frontera y exterior del conjunto $S$

Un conjunto abierto $S$ puede ser tan simple como el plano complejo con un sólo punto $z_0$ excluido. La frontera de este "plano perforado" es $z_0$, y el único candidato para un punto exterior es $z_0$. Sin embargo, $S$ no tiene puntos exteriores ya que ninguna vecindad de $z_0$ puede estar libre de puntos del plano.

**Anillo** El conjunto $S_1$ de puntos que satisfacen la desigualdad $\rho_1 < |z - z_0|$ se encuentra en el exterior del círculo de radio $\rho_1$ centrado en $z_0$, mientras que el conjunto $S_2$ de puntos que satisfacen $|z - z_0| < \rho_2$ se encuentran en el interior del círculo de radio $\rho_2$ centrado en $z_0$. Por lo que, si $0 < \rho_1 < \rho_2$, entonces el conjunto de puntos que satisfacen la desigualdad simultánea

$$\rho_1 < |z - z_0| < \rho_2, \tag{2}$$

es la intersección de los conjuntos $S_1$ y $S_2$. Esta intersección es un anillo circular abierto centrado en $z_0$. La figura 1.5.5(d) muestra dicho anillo centrado en el origen. El conjunto definido por (2) se llama **anillo circular** abierto. Al permitir que $\rho_1 = 0$, obtenemos una vecindad excluyente de $z_0$.

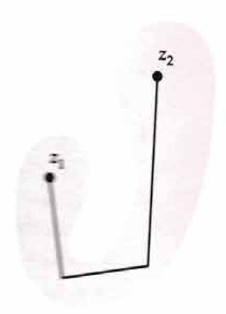



Figura 1.5.7 Conjuntos conexos

**Dominio** Si cualquier par de puntos $z_1$ y $z_2$ en un conjunto $S$ se puede conectar con una recta poligonal que consiste de un número finito de segmentos de rectas unidas por los extremos encontrados totalmente en el conjunto, entonces se dice que el conjunto $S$ es **conexo.** Vea la figura 1.5.7. Un conjunto conexo abierto se llama **dominio.** Todos los conjuntos abiertos de la figura 1.5.5 son conexos y cada uno es un dominio. El conjunto de números $z$ que satisfacen $\text{Re}(z) \neq 4$ es un conjunto abierto pero no es conexo ya que no es posible unir puntos en cualquier lado de la recta vertical $x = 4$ con una recta poligonal sin salir del conjunto (considere que los puntos en la recta $x = 4$ no están en el conjunto). Una vecindad de un punto $z_0$ es un conjunto conexo.

**Regiones** Una **región** es un dominio del plano complejo con todos, alguno o ninguno de sus puntos frontera. Ya que un conjunto abierto no contiene ningún punto frontera, ésta es automáticamente una región. Una región que contiene todos los puntos frontera se dice que es **cerrada**. El disco definido por $|z - z_0| \leq \rho$ es un ejemplo de una región cerrada y se le conoce como un **disco cerrado**. Una vecindad de un punto $z_0$ definido por $|z - z_0| < \rho$ es un conjunto abierto o una región abierta y se dice que es un **disco abierto.** Si el centro $z_0$ es excluido de ya sea un disco cerrado o de un disco abierto, las regiones definidas por $0 < |z - z_0| \leq \rho$ o $0 < |z - z_0| < \rho$ se llaman **discos perforados.** *Un disco perforado abierto es lo mismo que una vecindad excluyente de* $z_0$. Una región puede no ser abierta ni cerrada; la región anular definida por la desigualdad $1 \leq |z - 5| < 3$ contiene sólo algunos de estos puntos frontera (los puntos que se encuentran en la circunferencia del círculo $|z - 5| = 1$), y así ésta *no es abierta ni cerrada.* En (2) definimos una región anular circular; en una interpretación más general, un anillo o **región anular** puede tener la apariencia que se muestra en la figura 1.5.8.

Nota: "Cerrado" no significa "no abierto"



Figura 1.5.8 Región anular

**Conjuntos acotados** Finalmente, decimos que un conjunto $S$ en el plano complejo está **acotado** si existe un número real $R > 0$ tal que $|z| < R$ para cada $z$ en $S$. Es decir, $S$ está acotado si se puede encerrar completamente dentro de *cierta* vecindad del origen. En la figura 1.5.9, el conjunto $S$ que se muestra en color está acotado porque está completamente contenido dentro de la vecindad circular con línea punteada del origen. Un conjunto es **no acotado** si no está acotado. Por ejemplo, el conjunto de la figura 1.5.5(d) es acotado, mientras que los conjuntos en las figuras 1.5.5(a), 1.5.5(b) y 1.5.5(c) son no acotados.

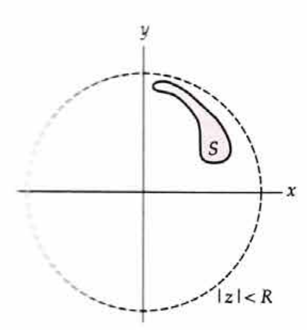



Figura 1.5.9 El conjunto $S$ está acotado ya que cierta vecindad del origen encierra totalmente a $S$

## Observaciones *Comparación con el análisis real*

En su estudio de las matemáticas indudablemente tuvo que enfrentarse con el concepto de *infinito.* Por ejemplo, en un curso de cálculo trató con *límites al infinito,* donde examinó el comportamiento de las funciones cuando $x$ aumentaba o disminuía sin cota. Puesto que tenemos dos direcciones en una recta numérica, es conveniente representar los conceptos de "aumentando sin cota" y "disminuyendo sin cota" simbólicamente con $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$, respectivamente. A su vez éstos se pueden obtener sin la designación de $\pm\infty$ al tratar con un "punto ideal" llamado **punto al infinito,** que se denota simplemente con $\infty$. Para hacer esto, identificamos cualquier número real $a$ con un punto $(x_0, y_0)$ en una circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$, trazando una línea recta desde el punto $(a, 0)$ en

el eje $x$ o recta horizontal al punto (0, 1) en la circunferencia. El punto $(x_0, y_0)$ es el punto de intersección de la recta con la circunferencia. Vea el problema 47 de los ejercicios 1.5. Debe quedar claro a partir de la figura 1.5.10(a) que está más distante del punto $(a, 0)$ que del origen, más cerca de $(x_0, y_0)$ está (0, 1). El único punto en la circunferencia que no corresponde a un número real $a$ es (0, 1). Para completar la correspondencia con *todos* los puntos en la circunferencia, identificamos a (0, 1) con $\infty$. Al conjunto que consiste de los números reales **R** unidos con $\infty$ se le llama **sistema de números reales extendido**.

En nuestro estudio el análogo de la recta numérica es el plano complejo. Recuerde que dado que **C** no está ordenado, las nociones de que $z$ "aumente" o "disminuya" no tienen ningún significado. Sin embargo, si sabemos que aumenta el módulo $|z|$ de un número complejo $z$, el número se aleja del origen. Si permitimos que $|z|$ no tenga cotas, por ejemplo, a lo largo de los ejes real e imaginario, no hay que distinguir entre "direcciones" de estos ejes con otras notaciones tales como $z \to +\infty$, $z \to -\infty$, $z \to +i\infty$ y $z \to -i\infty$. En análisis complejo, sólo se utiliza una única noción de $\infty$, ya que podemos ampliar el sistema de números complejos **C** de una manera análoga a la que acabamos de describir para el sistema de números reales **R**. Sin embargo, esta vez asociamos un número complejo a un punto sobre una esfera unitaria llamada **esfera de Riemann**. Trazando una recta del número $z = a + ib$, que se escribe como $(a, b, 0)$, en el plano complejo al polo norte (0, 0, 1) de la esfera, $x^2 + y^2 + u^2 = 1$, se determina un punto único, $(x_0, y_0, u_0)$ sobre una esfera unitaria. Como se puede visualizar de la figura 1.5.10(b), un número complejo con un módulo muy grande está muy lejos del origen (0, 0, 0) y, en consecuencia, el punto $(x_0, y_0, u_0)$ está cerca de (0, 0, 1). De esta manera se identifica cada número complejo con un único punto sobre la esfera. Vea los problemas 48-50 de los ejercicios 1.5. Debido a que al punto (0, 0, 1) no le corresponde ningún número $z$ en el plano, le corresponde $\infty$. Por supuesto el sistema que consiste de **C** unido con el "punto ideal" $\infty$ se llama **sistema de números complejos extendido**.

A esta manera de corresponder o mapear a los números complejos con una esfera, excluyendo al polo-norte (0, 0, 1), se le llama **proyección estereográfica**.

Para un número finito $z$, tenemos $z + \infty = \infty + z = \infty$, y para $z \neq 0$, $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty$. Por otra parte, para $z \neq 0$ escribimos $z/0 = \infty$ y para $z \neq \infty$, $z/\infty = 0$. A expresiones como $\infty - \infty$, $\infty/\infty$, $\infty^0$ y $1^\infty$ no se les puede dar una definición significativa y se les llama indeterminadas.

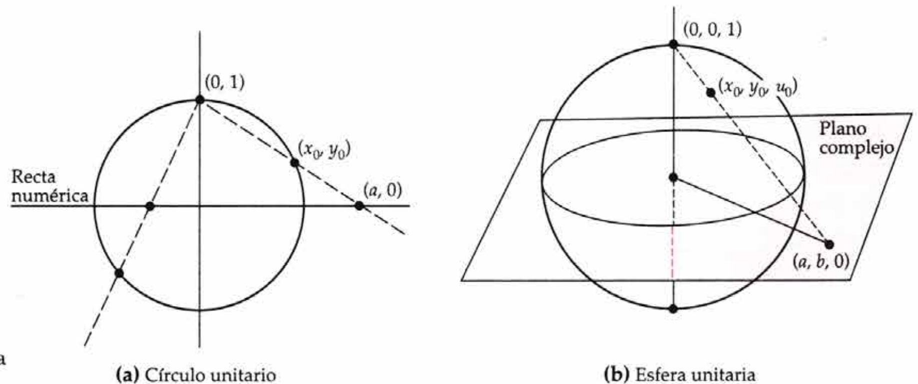



Figura 1.5.10 El método de correspondencia en (b) es una proyección estereográfica

## EJERCICIOS 1.5

*Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-3.*

En los problemas 1 a 12, trace la gráfica de la ecuación dada en el plano complejo.

**1.** $|z - 4 + 3i| = 5$

**2.** $|z + 2 + 2i| = 2$

**3.** $|z + 3i| = 2$

**4.** $|2z - 1| = 4$

**5.** $\text{Re}(z) = 5$

**6.** $\text{Im}(z) = -2$

**7.** $\text{Im}(\bar{z} + 3i) = 6$

**8.** $\text{Im}(z - i) = \text{Re}(z + 4 - 3i)$

**9.** $|\text{Re}(1 + i\bar{z})| = 3$

**10.** $z^2 + \bar{z}^2 = 2$

**11.** $\text{Re}(z^2) = 1$

**12** $\arg(z) = \pi/4$

En los problemas 13 a 24 bosqueje el conjunto $S$ de puntos en el plano complejo que satisfacen la desigualdad dada. Determine si el conjunto es (**a**) abierto, (**b**) cerrado, (**c**) un dominio, (**d**) acotado o (**e**) conexo.

**13.** $\text{Re}(z) < -1$

**14.** $|\text{Re}(z)| > 2$

**15.** $\text{Im}(z) > 3$

**16.** $\text{Re}((2 + i)z + 1) > 0$

**17.** $2 < \text{Re}(z - 1) < 4$

**18.** $-1 \leq \text{Im}(z) < 4$

**19.** $\text{Re}(z^2) > 0$

**20.** $\text{Im}(z) < \text{Re}(z)$

**21.** $|z - i| > 1$

**22.** $2 < |z - i| < 3$

**23.** $1 \leq |z - 1 - i| < 2$

**24** $2 \leq |z - 3 + 4i| \leq 5$

**25.** Dé los puntos frontera de los conjuntos en los problemas 13 a 24.

**26.** Considere el conjunto $S$ que consiste del plano complejo con el círculo de circunferencia $|z| = 5$ excluido. Dé los puntos frontera de $S$. ¿Es $S$ conexo?

En los problemas 27 y 28 bosqueje el conjunto de puntos en el plano complejo que satisfacen la desigualdad dada.

**27.** $0 \leq \arg(z) \leq \pi/6$

**28.** $-\pi < \arg(z) < \pi/2$

En los problemas 29 y 30 describa el conjunto sombreado de la figura dada usando $\arg(z)$ y una desigualdad.

**29.**

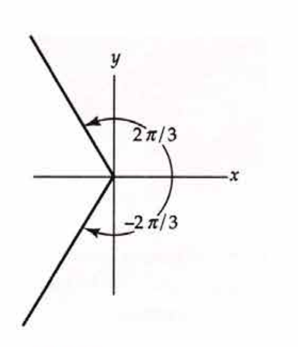



Figura 1.5.11 Figura para el problema 29

**30.**

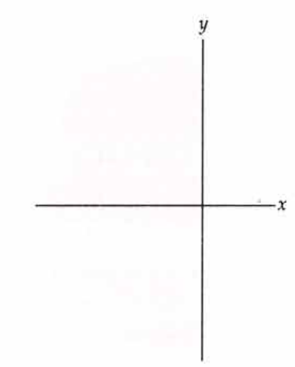



Figura 1.5.12 Figura para el problema 30

En los problemas 31 y 32 resuelva el par dado de ecuaciones simultáneas.

**31.** $|z| = 2, \quad |z - 2| = 2$

**32.** $|z - i| = 5, \quad \arg(z) = \pi/4$

## Enfocando los conceptos

**33.** En la página 28 establecimos que si $\rho_1 > 0$, entonces el conjunto de puntos que satisfacen $\rho_1 < |z - z_0|$ es el exterior del círculo de radio $\rho_1$ centrado en $z_0$. En general, describa el conjunto si $\rho_1 = 0$. En particular, describa el conjunto definido por $|z + 2 - 5i| > 0$.

**34.** (**a**) ¿Cuáles son los puntos frontera de una vecindad excluyente de $z_0$?

(**b**) ¿Cuáles son los puntos frontera del plano complejo?

(**c**) Dé varios ejemplos, no incluya el dado en la página 29, de un conjunto $S$ en el plano complejo que ni es abierto ni cerrado.

**35.** Use notación compleja y desigualdades en los incisos (a) y (b).

(**a**) Haga una lista de cinco conjuntos en el plano complejo que sean conexos.

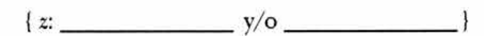
(**b**) Haga una lista de cinco conjuntos en el plano complejo que no sean conexos.

**36.** Considere el disco centrado en $z_0$ definido con $|z - z_0| \leq \rho$. Demuestre que este conjunto está acotado encontrando una $R > 0$, por lo que todos los puntos $z$ en el disco satisfacen que $|z| < R$. [*Sugerencia:* Vea el análisis de desigualdades de la sección 1.2].

**37.** Suponga que $z_0$ y $z_1$ son puntos distintos. Usando sólo el concepto de distancia, describa con palabras el conjunto de puntos $z$ en el plano complejo que satisfacen que $|z - z_0| = |z - z_1|$.

**38.** Usando sólo el concepto de distancia, describa con palabras el conjunto de puntos $z$ en el plano complejo que satisface $|z - i| + |z + i| = 1$.

En los problemas 39 y 40 describa el conjunto sombreado en la figura dada llenando los dos espacios en blanco usando notación de conjuntos




usando notación compleja para ecuaciones o desigualdades y una de las palabras *y* u *o*.

**39.**

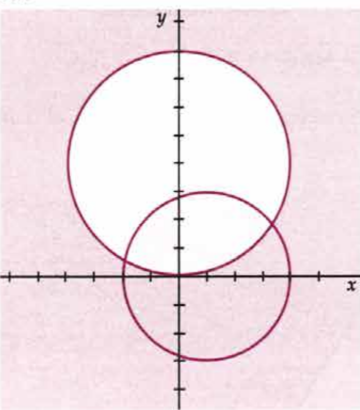



Figura 1.5.13 Figura para el problema 39

**40.**

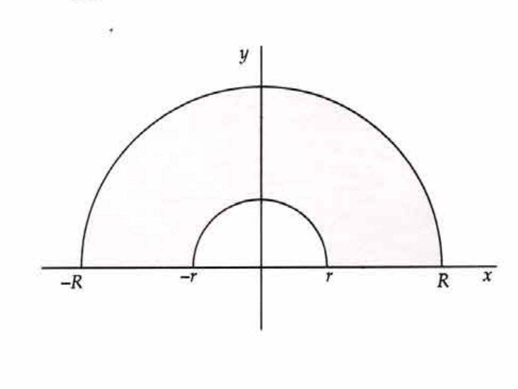



Figura 1.5.14 Figura para el problema 40

**41.** Considere el conjunto $S$ de puntos en el plano complejo definido por $\{i/n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Analice cuál de los siguientes términos se aplica a $S$: *frontera, abierto, cerrado, conexo, acotado.*

**42.** Considere un conjunto finito $S$ de números complejos $\{z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n\}$. Analice si $S$ está necesariamente acotado. Defienda su respuesta con argumentos matemáticos.

**43.** Se dice que un conjunto $S$ es **convexo** si cada par de puntos $P$ y $Q$ en $S$ se puede unir mediante un segmento de recta $\overline{PQ}$ tal que cada punto del segmento de recta también se encuentre en $S$.

Determine cuál de los conjuntos $S$ en el plano complejo definido por las condiciones siguientes son convexos.

(a) $|z - 2 + i| < 3$ (b) $1 < |z| < 2$

(c) $x > 2, y \leq -1$ (d) $y < x^2$

(e) $\text{Re}(z) \leq 5$ (f) $\text{Re}(z) \neq 0$

**44.** Analice: ¿Es un conjunto convexo, definido en el problema 43, necesariamente conexo?

**45.** Analice y decida si el conjunto vacío $\varnothing$ es un conjunto abierto.

**46.** Suponga que $S_1$ y $S_2$ son conjuntos abiertos en el plano complejo.

(a) Analice: ¿es la unión $S_1 \cup S_2$ un conjunto abierto? Si piensa que el enunciado es cierto, intente demostrarlo. Si piensa que el enunciado es falso, encuentre un contraejemplo.

(b) Repita el inciso (a) para la intersección $S_1 \cap S_2$.

Antes de responder los problemas 47 a 50, lea nuevamente las observaciones del final de esta sección.

**47.** Determine el punto $(x_0, y_0)$ en la circunferencia unitaria que corresponde a cada uno de los números reales: $-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -3, 1, 10$. Vea la figura 1.5.10(a).

**48.** Determine un punto $(x_0, y_0, u_0)$ en la esfera unitaria que corresponde al número complejo $2 + 5i$. Vea la figura 1.5.10(b).

**49.** Describa el conjunto de puntos en la esfera unitaria que corresponde a cada uno de los siguientes conjuntos en el plano complejo.

(a) Los números en la circunferencia unitaria $|z| = 1$

(b) Los números dentro del disco abierto $|z| < 1$

(c) Los números exteriores al círculo unitario, que son, $|z| > 1$

**50.** Exprese las coordenadas del punto $(x_0, y_0, u_0)$ en la esfera unitaria de la figura 1.5.10(b) en términos de las coordenadas del punto $(a, b, 0)$ en el plano complejo. Use estas fórmulas para comprobar su respuesta al problema 48. [*Sugerencia:* Primero demuestre que todos los puntos en la recta que contiene a $(0, 0, 1)$ y $(a, b, 0)$ son de la forma $(ta, tb, 1 - t)$.]

## 1.6 Aplicaciones

**En esta sección vamos a examinar algunas de las aplicaciones simples de los números complejos. Se supondrá en el análisis que el lector tiene cierta familiaridad con métodos elementales de la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias.**

**En la sección 1.4 vimos cómo determinar las raíces de números complejos. Con esta base ahora estamos en condiciones de examinar la forma de resolver una ecuación cuadrática con coeficientes complejos usando la versión compleja de la fórmula cuadrática. Después examinamos cómo se utilizan los números complejos y la exponencial compleja en ecuaciones diferenciales. Este último análisis nos conduce a la fórmula de Euler y a una nueva manera compacta de escribir de nuevo la forma polar de un número complejo. Por último, exploramos algunas formas de utilizar los números complejos en la ingeniería eléctrica.**

**Álgebra** Probablemente encontró por primera vez a los números complejos en un curso de álgebra donde aprendió que las raíces de las ecuaciones polinomiales pueden ser tanto complejas como reales. Por ejemplo, cualquier ecuación polinomial de segundo grado, o cuadrática, se puede resolver completando el cuadrado. En el caso general, $ax^2 + bx + c = 0$, donde los coeficientes $a \neq 0$, $b$ y $c$ son reales, al completar el cuadrado en $x$ se obtiene la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{1}$$

Cuando el discriminante $b^2 - 4ac$ es negativo, las raíces de la ecuación son complejas. Por ejemplo, por (1) las dos raíces de $x^2 - 2x + 10 = 0$ son

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2}. \tag{2}$$

En los cursos elementales la unidad imaginaria $i$ se escribe $i = \sqrt{-1}$ y se hace la suposición de que las leyes de exponentes valen para un número tal como $\sqrt{-36}$, que se puede escribir como $\sqrt{-36} = \sqrt{36}\sqrt{-1} = 6i$. Denotemos las dos raíces complejas en (2) como $z_1 = 1 + 3i$ y $z_2 = 1 - 3i$.

*Nota:* Las raíces $z_1$ y $z_2$ son conjugadas. Vea el problema 26 en los ejercicios 1.6.

**Fórmula cuadrática** La fórmula cuadrática es perfectamente válida cuando los coeficientes $a \neq 0$, $b$ y $c$ de una ecuación polinomial cuadrática $az^2 + bz + c = 0$ son números complejos. Aunque la fórmula se puede obtener exactamente de la misma forma que (1), elegimos escribir el resultado como

$$z = \frac{-b + (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a}. \tag{3}$$

Observe que el numerador de la parte derecha de (3) se ve un poco diferente al tradicional $-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$ dado en (1). Considere que cuando $b^2 - 4ac \neq 0$, el símbolo $(b^2 - 4ac)^{1/2}$ representa el conjunto de dos raíces cuadradas de los números complejos $b^2 - 4ac$. Por lo que con (3) se obtienen *dos* soluciones complejas. A partir de aquí nos reservamos el uso del símbolo $\sqrt{\ }$ para números reales donde $\sqrt{a}$ denota la raíz positiva del número real $a \geq 0$. El siguiente ejemplo muestra el uso de (3).

Interpretación de $\sqrt{\ }$ en este libro

**EJEMPLO 1 Uso de la fórmula cuadrática**

Resuelva la ecuación cuadrática $z^2 + (1 - i)z - 3i = 0$.

**Solución** De (3), con $a = 1$, $b = 1 - i$ y $c = -3i$, tenemos

$$z = \frac{-(1-i) + [(1-i)^2 - 4(-3i)]^{1/2}}{2} = \frac{1}{2}\left[-1 + i + (10i)^{1/2}\right]. \tag{4}$$

Para calcular $(10i)^{1/2}$ usamos (4) de la sección 1.4 con $r = \sqrt{10}$, $\theta = \pi/2$ y $n = 2$. Las dos raíces cuadradas de $10i$ son:

$$w_0 = \sqrt{10}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{5} + \sqrt{5}i$$

y

$$w_1 = \sqrt{10}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{10}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -\sqrt{5} - \sqrt{5}i$$

Por tanto, (4) da dos valores:

$$z_1 = \frac{1}{2}\left[-1 + i + \left(\sqrt{5} + \sqrt{5}i\right)\right] \quad \text{y} \quad z_2 = \frac{1}{2}\left[-1 + i + \left(-\sqrt{5} - \sqrt{5}i\right)\right].$$

Estas soluciones de la ecuación original, escritas en la forma $z = a + ib$, son

$$z_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) + \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right)i \quad \text{y} \quad z_2 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right) - \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)i.$$

*Nota:* Las raíces $z_1$ y $z_2$ no son conjugadas. Vea el problema 26 en los ejercicios 1.6.

❑

**Factorización de un polinomio cuadrático** Para encontrar todas las raíces de una ecuación polinomial podemos factorizar el polinomio completo. Este enunciado es corolario de un importante teorema que se demostrará en la sección 5.5. Por el momento, observe que si $z_1$ y $z_2$ son las raíces definidas por (3), entonces, un polinomio cuadrático $az^2 + bz + c$ se factoriza como

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2). \tag{5}$$

Por ejemplo, ya hemos usado (2) para demostrar que la ecuación cuadrática $x^2 - 2x + 10 = 0$ tiene raíces $z_1 = 1 + 3i$ y $z_2 = 1 - 3i$. Con $a = 1$, (5) nos permite factorizar al polinomio $x^2 - 2x + 10$ usando números complejos:

$$x^2 - 2x + 10 = [x - (1 + 3i)][x - (1 - 3i)] = (x - 1 - 3i)(x - 1 + 3i).$$

Similarmente, la factorización del polinomio cuadrático $z^2 + (1 - i)z - 3i$ en el ejemplo 1 es

$$z^2 + (1 - i)z - 3i = \left[z - \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) - \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)i\right]\left[z + \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) + \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)i\right].$$

Debido a que un primer curso de cálculo trata principalmente con cantidades reales, probablemente no vio ningún número complejo hasta que tomó un curso de ecuaciones diferenciales o de ingeniería eléctrica.

**Ecuaciones diferenciales** El primer paso para resolver una ecuación diferencial lineal de segundo orden $ay'' + by' + cy = f(x)$ con coeficientes reales $a$, $b$ y $c$ es resolver la ecuación homogénea asociada $ay'' + by' + cy = 0$. La última ecuación tiene soluciones de la forma $y = e^{mx}$. Para ver esto, sustituimos $y = e^{mx}$, $y' = me^{mx}$ y $y'' = m^2e^{mx}$ en $ay'' + by' + cy = 0$:

$$ay'' + by' + cy = am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0.$$

De $e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0$, vemos que $y = e^{mx}$ es una solución de la ecuación homogénea siempre que $m$ sea la raíz de la ecuación polinomial $am^2 + bm + c = 0$. La última ecuación cuadrática se conoce como **ecuación auxiliar.** Ahora, cuando los coeficientes de una ecuación polinomial son *reales*, la ecuación puede no tener sólo *una* raíz compleja; es decir, las raíces complejas deben presentarse siempre en pares conjugados. Por lo que, si la ecuación auxiliar tiene raíces complejas $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$, $\beta > 0$, entonces las dos soluciones de $ay'' + by' + cy = 0$ son funciones exponenciales complejas $y = e^{(\alpha+i\beta)x}$ y $y = e^{(\alpha-i\beta)x}$. Para obtener soluciones reales de la ecuación diferencial usamos la **fórmula de Euler**

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta, \tag{6}$$

donde $\theta$ es real. Con $\theta$ sustituida, a su vez, por $\beta$ y $-\beta$, usamos (6) para escribir

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\,\text{sen}\,\beta x) \quad \text{y} \quad e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\,\text{sen}\,\beta x). \tag{7}$$

Ahora, puesto que la ecuación diferencial es homogénea, las combinaciones lineales

$$y_1 = \frac{1}{2}\left[e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x}\right] \quad \text{y} \quad y_2 = \frac{1}{2i}\left[e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}\right]$$

PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
Biblioteca Central

son también soluciones. Pero por (7), las dos expresiones anteriores son funciones reales

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{y} \quad y_2 = e^{\alpha x}\,\text{sen}\;\beta x. \tag{8}$$

**EJEMPLO 2 Solución de una ecuación diferencial**

Resuelva la ecuación diferencial $y'' + 2y' + 2y = 0$.

**Solución** Aplicamos la fórmula cuadrática a la ecuación auxiliar $m^2 + 2m + 2 = 0$ y obtenemos las raíces complejas $m_1 = -1 + i$ y $m_2 = \overline{m}_1 = -1 - i$. Con las identificaciones $\alpha = -1$ y $\beta = 1$, la ecuación (8) nos da dos soluciones $y_1 = e^{-x}\cos x$ y $y_2 = e^{-x}\,\text{sen}\,x$. ❑

Puede que recuerde que la así llamada solución general de una ecuación diferencial homogénea de orden $n$ consiste de una combinación lineal de $n$ soluciones linealmente independientes. Por lo que en el ejemplo 2, la solución general de la ecuación diferencial de segundo orden dada es $y_1 = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^{-x}\cos x + c_2e^{-x}\text{sen}\,x$, donde $c_1$ y $c_2$ son constantes arbitrarias.

## Forma exponencial de un número complejo

Nos apresuramos a indicar que los resultados dados en (6) y (7) fueron suposiciones, ya que la función exponencial compleja aún no había sido definida. Como un breve anticipo del material de las secciones 2.1 y 4.1, la exponencial compleja $e^z$ es el número complejo *definido* por

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\,\text{sen}\,y). \tag{9}$$

Aunque la prueba se pospone hasta la sección 4.1, (9) se puede utilizar para demostrar que la conocida ley de los exponentes es válida para los números complejos $z_1$ y $z_2$:

$$e^{z_1}\,e^{z_2} = e^{z_1+z_2}. \tag{10}$$

porque de (10), los resultados en (7) son válidos. Además, observe que la fórmula de Euler (4) es un caso especial de (9) cuando $z$ es un número imaginario puro, es decir, con $x = 0$ y $y$ sustituido por $\theta$. La fórmula de Euler proporciona una notación conveniente para los varios conceptos que se consideran al principio de este capítulo. La forma polar de un número complejo $z$, $z = r(\cos\theta + i\;\text{sen}\;\theta)$, ahora se puede escribir más compacta

$$z = re^{i\theta}. \tag{11}$$

Esta forma conveniente se llama **forma exponencial** de un número complejo $z$. Por Ejemplo, $i = e^{\pi i/2}$ y $1 + i = \sqrt{2}e^{\pi i/4}$. Además, la fórmula para las raíces $n$-ésimas de un número complejo, (4) de la sección 1.4, se convierte en

$$z^{1/n} = \sqrt[n]{r}e^{\,i(\theta+2k\pi)/n},\; k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{12}$$

## Ingeniería Eléctrica

En la aplicación de las matemáticas a situaciones físicas, los matemáticos y los ingenieros suelen enfocar el problema con formas completamente diferentes. Por ejemplo, considere el problema de encontrar la

corriente de estado estable $i_p(t)$ en un circuito en serie *LRC* en el que la carga $q(t)$ del capacitor al tiempo $t > 0$ se describe con la ecuación diferencial

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E_0 \operatorname{sen}\gamma t \qquad (13)$$

donde las constantes positivas $L$, $R$ y $C$ son, a su vez, la inductancia, la resistencia y la capacitancia. Ahora, para determinar la **corriente de estado estable** $i_p(t)$, primero determinamos la **carga de estado estable** en el condensador determinando una solución particular $q_p(t)$ de (13). Procediendo como lo haríamos en un curso de ecuaciones diferenciales, vamos a utilizar el método de coeficientes indeterminados para encontrar $q_p(t)$. Esto implica suponer una solución particular de la forma $q_p(t) = A \operatorname{sen} \gamma t + B \cos \gamma t$, sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial, simplificando, igualando los coeficientes y despejando los coeficientes desconocidos $A$ y $B$. Se deja como ejercicio demostrar que $A = E_0X/(-\gamma Z^2)$ y $B = E_0R/(-\gamma Z^2)$, cuando las cantidades

$$X = L\gamma - 1/C\gamma \quad \text{y} \quad Z = \sqrt{X^2 + R^2} \qquad (14)$$

son llamadas, respectivamente, **impedancia** y **reactancia** del circuito. Así, la solución de estado estable de la carga en el circuito es

$$q_p(t) = -\frac{E_0X}{\gamma Z^2}\operatorname{sen}\gamma t - \frac{E_0R}{\gamma Z^2}\cos\gamma t.$$

De esta solución y $i_p(t) = q_p'(t)$ obtenemos la corriente de estado estable:

$$i_p(t) = \frac{E_0}{Z}\left(\frac{R}{Z}\operatorname{sen}\gamma t - \frac{X}{Z}\cos\gamma t\right). \qquad (15)$$

Los ingenieros eléctricos suelen resolver problemas de circuitos de este tipo usando análisis complejo. Primero que todo, para evitar confusión con la corriente $i$, un ingeniero eléctrico denotará a la unidad imaginaria $i$ con el símbolo $j$, en otras palabras, $j^2 = -1$. Puesto que la corriente $i$ se relaciona con la carga $q$ con $i = dq/dt$, la ecuación diferencial (13) es igual a

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = E_0 \operatorname{sen}\gamma t. \qquad (16)$$

Ahora, en vista de la fórmula de Euler (6), si $\theta$ se sustituye por el símbolo $\gamma$, entonces el voltaje impreso $E_0$ sen $\gamma t$ es igual a $\operatorname{Im}(E_0e^{j\gamma t})$. Debido a esta última forma, el método de los coeficientes indeterminados sugiere que intentemos una solución de (16) en forma de un múltiplo constante de una exponencial compleja, es decir, $i_p(t) = \operatorname{Im}(Ae^{j\gamma t})$. Sustituimos esta última expresión en la ecuación (16), suponiendo que la exponencial compleja satisface las reglas de derivación "habituales", utilizando el hecho de que la carga $q$ es una antiderivada de la corriente $i$, e igualando los coeficientes de $e^{j\gamma t}$. El resultado es $(jL\gamma + R + 1/jC\gamma)A = E_0$, y de éste obtenemos

$$A = \frac{E_0}{R + j\left(L\gamma - \dfrac{1}{C\gamma}\right)} = \frac{E_0}{R + jX}, \qquad (17)$$

donde $X$ es la reactancia dada en (14). El denominador de la última expresión, $Z_c = R + j(L\gamma - 1/C\gamma) = R + jX$, se llama **impedancia compleja** del circuito. Como el módulo de la impedancia compleja es $|Z_c| = \sqrt{R^2 + (L\gamma - 1/C\gamma)^2}$, vemos de (14) que la impedancia $Z$ y la impedancia compleja $Z_c$ están relacionadas por $Z = |Z_c|$.

Ahora de la forma exponencial de un número complejo dada en (11), podemos escribir la impedancia compleja como

$$Z_c = |Z_c|e^{j\theta} = Ze^{j\theta}, \quad \text{donde} \quad \tan\theta = \frac{L\gamma - \dfrac{1}{C\gamma}}{R}$$

Por lo que (17) se convierte en $A = E_0/Z_c = E_0/(Ze^{j\theta})$, y así la corriente de estado estable está dada por

$$i_p(t) = \operatorname{Im}\left(\frac{E_0}{Z}e^{-j\theta}e^{j\tau t}\right). \tag{18}$$

Se le recomienda comprobar que la expresión en (18) es la misma que la dada en (15).

El problema de encontrar la corriente de estado estable en un circuito en serie *LRC* descrito por la ecuación diferencial

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = E_0\cos\gamma t \tag{19}$$

se puede resolver de una manera similar. En este caso, el voltaje $E_0 \cos \gamma t$ sugiere que intentemos una solución de la forma $i_p(\mathrm{t}) = \operatorname{Re}(Ae^{j\gamma t})$. Con el mismo análisis que el anterior, obtenemos la solución de (19) dada por

$$i_p(t) = \operatorname{Re}\left(\frac{E_0}{Z}e^{-j\theta}e^{j\gamma t}\right). \tag{20}$$

## Observaciones *Comparación con el análisis real*

**Hemos visto en esta sección que si $z_1$ es una raíz compleja de una ecuación polinomial, entonces $z_2 = \bar{z}_1$ es otra raíz siempre que todos los coeficientes del polinomio sean reales, pero $\bar{z}_1$ no es necesariamente una raíz de la ecuación cuando al menos uno de los coeficientes no es real. En este último caso, podemos obtener otro factor del polinomio al dividir éste entre $z - z_1$. Observe que la división sintética es válida en el análisis complejo. Vea los problemas 27 y 28 de los ejercicios 1.6.**

## EJERCICIOS 1.6

*Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-5.*

En los problemas 1 a 6 resuelva la ecuación cuadrática dada usando la fórmula cuadrática (3). Después, utilice (5) para factorizar el polinomio.

**1.** $z^2 + iz - 2 = 0$

**2.** $iz^2 - z + i = 0$

**3.** $z^2 - (1 + i)\,z + 6 - 17i = 0$

**4.** $z^2 - (1 + 9i)z - 20 + 5i = 0$

**5.** $z^2 + 2z - \sqrt{3}i = 0$

**6.** $3z^2 + (2 - 3i)z - 1 - 3i = 0$ [*Sugerencia:* Vea el problema 15 de los ejercicios 1.4.].

En los problemas 7 a 12 exprese el número complejo dado en forma exponencial $z = re^{i\theta}$.

**7.** $-10$

**8.** $-2\pi i$

**9.** $-4 - 4i$

**10.** $\dfrac{2}{1+i}$

**11.** $(3 - i)^2$

**12.** $(1 + i)^{20}$

En los problemas 13 a 16 determine soluciones de la ecuación diferencial homogénea dada.

**13.** $y'' - 4y' + 13y = 0$

**14.** $3y'' + 2y' + y = 0$

**15.** $y'' + y' + y = 0$

**16.** $y'' + 2y' + 4y = 0$

En los problemas 17 a 20 determine la carga de estado estable $q_p(t)$ y la corriente de estado estable $i_p(t)$ para el circuito *LRC* en serie descrito por la ecuación diferencial dada. Determine la impedancia compleja y la impedancia del circuito. Use el método complejo analizado en las páginas 37 y 38.

**17.** $\dfrac{di}{dt} + 6i + 25q = 10\cos 5t$

**18.** $\dfrac{di}{dt} + 6i + 25q = 10 \text{ sen } 5t$

**19.** $\dfrac{di}{dt} + i + 2q = 100 \text{ sen} t$

**20.** $\dfrac{di}{dt} + i + 2q = 100\cos t$

## Enfocando los conceptos

**21.** Analice cómo se puede usar la forma (3) para determinar las cuatro raíces de $z^4 - 2z^2 + 1 - 2i = 0$. Lleve a cabo sus ideas.

**22.** Si $z_1$ es la raíz de una ecuación polinomial con coeficientes *reales*, entonces su conjugado $z_2 = \bar{z}_1$ es también una raíz. Demuestre este resultado en el caso de una ecuación cuadrática $az^2 + bz + c = 0$, donde $a \neq 0$, $b$ y $c$ son reales. Comience con las propiedades de los conjugados dadas en (1) y (2) de la sección 1.1.

En los problemas 23 y 24 use el problema 22 y (5) de esta sección para factorizar el polinomio cuadrático dado si el número complejo indicado es una raíz.

**23.** $4z^2 + 12z + 34 = 0; \quad z_1 = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2}i$

**24.** $5z^2 - 2z + 4 = 0; \quad z_1 = \dfrac{1}{5} + \dfrac{\sqrt{19}}{5}i$

**25.** **(a)** Determine una ecuación polinomial cuadrática para la que $2 - i$ es una raíz.

**(b)** ¿Es su respuesta al inciso (a) única? Justifique su respuesta.

**26.** Si $z_1$ es una raíz de una ecuación cuadrática con coeficiente principal 1 y al menos un *coeficiente no real*, entonces $\bar{z}_1$ *no* es una raíz. Demuestre este resultado en el caso de una ecuación cuadrática $z^2 + bz + c = 0$, donde al menos uno de $b$ o $c$ es un número complejo distinto de cero.

En los problemas 27 y 28 factorice el polinomio cuadrático dado si el número complejo indicado es una raíz. [*Sugerencia*: Considere división larga o división sintética].

**27.** $3iz^2 + (9 - 16i)z - 17 - i$; $z_1 = 5 + 2i$

**28.** $4z^2 + (-13 + 18i)z - 5 - 10i$; $z_1 = 3 - 4i$

En los problemas 29 y 30 establezca la viabilidad de la fórmula de Euler (6) en las dos formas que se especifican.

**29.** La serie de Maclaurin $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}x^n = 1 + x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{3!}x^3 + \cdots$ se sabe que converge para los valores de $x$. Tomando la última expresión a su valor nominal, sustituya $x = i\theta$, $\theta$ real, en la serie y simplifique las potencias de $i^n$. Vea qué resultados obtiene cuando se separa la serie en las partes real e imaginaria.

**30.** **(a)** Compruebe que $y_1 = \cos\theta$ y $y_2 = \text{sen }\theta$ satisfacen la ecuación diferencial homogénea lineal de segundo orden $\dfrac{d^2y}{d\theta^2} + y = 0$. Dado que el conjunto de soluciones consistentes de $y_1$ y $y_2$ es linealmente independiente, la solución general de la ecuación diferencial es $y = c_1 \cos\theta + c_2 \text{ sen }\theta$.

**(b)** Compruebe que $y = e^{i\theta}$, donde $i$ es la unidad imaginaria y $\theta$ es una variable real, también satisface la ecuación diferencial dada en el inciso (a).

(c) Dado que $y = e^{i\theta}$ es una solución de la ecuación diferencial, se debe obtener de la solución general dada en el inciso (a); en otras palabras, deben existir coeficientes *específicos* $c_1$ y $c_2$ tales que $e^{i\theta} = c_1 \cos\theta + c_2 \operatorname{sen}\theta$. Compruebe de $y = e^{i\theta}$ que $y(0) = 1$ y $y'(0) = i$. Utilice estas dos condiciones para determinar $c_1$ y $c_2$.

**31.** Determine una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden para la que $y = e^{-5x}\cos 2x$ es una solución.

**32.** (a) Derivando la ecuación (13) respecto a $t$, demuestre que la corriente en el circuito en serie *LRC* está descrito por

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = E_0\,\gamma\cos\gamma t.$$

(b) Utilice el método de coeficientes indeterminados para encontrar una solución particular $i_{p_1}(t) = Ae^{j\gamma t}$ de la ecuación diferencial

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = E_0\gamma e^{j\gamma t}.$$

(c) ¿Cómo puede el resultado de (b) utilizarse para determinar una solución particular $i_p(t)$ de la ecuación diferencial del inciso (a). Lleve a cabo sus ideas y compruebe que $i_p(t)$ es la misma que (15).

## Tareas del laboratorio de cómputo

En los problemas 33 a 36 utilice un SAC (sistema asistido de cómputo) como ayuda en la factorización del polinomio cuadrático dado.

**33.** $z^2 - 3iz - 2$

**34.** $z^2 - \sqrt{3}z - i$

**35.** $iz^2 - (2 + 3i)z + 1 + 5i$

**36.** $(3 + i)z^2 + (1 + 7i)z - 10$

En los problemas 37 y 38 utilice un SAC para resolver la ecuación polinomial dada. En *Mathematica* la instrucción **Solve** determinará todas las raíces de ecuaciones polinomiales hasta de grado cuatro por medio de una fórmula.

**37.** $z^3 - 4z^2 + 10 = 0$

**38.** $z^4 + 4iz^2 + 10i = 0$

En los problemas 39 y 40 utilice un SAC para resolver la ecuación polinomial dada. La instrucción **NSolve** en *Mathematica* aproximará todas las raíces de las ecuaciones polinomiales de grado cinco o más alto.

**39.** $z^5 - z - 12 = 0$

**40.** $z^6 - z^4 + 3iz^3 - 1 = 0$

## Proyectos

**41. Fórmula cúbica** En este proyecto se le pide investigar la solución de una ecuación polinomial cúbica por medio de una fórmula usando radicales, que es una combinación de raíces cuadradas y cúbicas de expresiones que involucren coeficientes.

(a) Para resolver una ecuación cúbica general $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ es suficiente resolver una **ecuación cúbica deprimida** $x^3 = mx + n$ ya que la ecuación cúbica general se puede reducir a este caso especial eliminando el término $az^2$. Compruebe esto sustituyendo $z = x - a/3$ e identifique $m$ y $n$.

(b) Utilice el procedimiento descrito en el inciso (a) para determinar la ecuación cúbica reducida para $z^3 + 3z^2 - 3z - 9 = 0$.

(c) Una solución de $x^3 = mx + n$ está dada por

$$x = \left[\frac{n}{2} + \left(\frac{n^2}{4} - \frac{m^3}{27}\right)^{1/2}\right]^{1/3} + \left[\frac{n}{2} - \left(\frac{n^2}{4} - \frac{m^3}{27}\right)^{1/2}\right]^{1/3}.$$

Use esta fórmula para resolver la ecuación cúbica reducida del inciso (b).

**(d)** Trace la gráfica del polinomio $z^3 + 3z^2 - 3z - 9$ y el polinomio de la ecuación cúbica reducida del inciso (b), y después estime las intersecciones con el eje $x$ de los gráficas.

**(e)** Compare los resultados obtenidos a partir del inciso (d) con las soluciones del inciso (c). Resuelva cualquier diferencia aparente. Encuentre las tres soluciones de $z^3 + 3z^2 - 3z - 9 = 0$.

**(f)** Haga un poco de lectura adicional para determinar demostraciones geométricas (usando un cuadrado y un cubo) a fin de deducir la fórmula cuadrática y la fórmula dada en el inciso (c) para la solución de la ecuación cúbica reducida. ¿Por qué se utiliza el nombre de fórmula *cuadrática* cuando el prefijo *quad* proviene de la palabra latina para el número cuatro?

**42. Matrices complejas** En este proyecto suponemos que usted tiene cierta experiencia con matrices o está dispuesto a aprender algo de ellas.

Algunas matrices complejas, es decir, matrices cuyos elementos son números complejos, son importantes en las matemáticas aplicadas. Una matriz compleja A, $n \times n$ se dice que es:

| | | |
|---|---|---|
| *Hermitiana* | si | $\bar{A}^T = A,$ |
| *Hermitiana asimétrica* | si | $\bar{A}^T = -A,$ |
| *Unitaria* | si | $\bar{A}^T = A^{-1}.$ |

Aquí el símbolo $\bar{A}$ significa el conjugado de la matriz $A$, que es la matriz obtenida al tomar el conjugado de cada entrada de $A$. $\bar{A}^T$ es entonces la transpuesta de $\bar{A}$, que es la matriz obtenida al intercambiar los renglones con las columnas. El negativo $-A$ es la matriz formada por el negativo de todas los elementos de $A$; la matriz $A^{-1}$, es el inverso multiplicativo de $A$.

**(a)** ¿Cuáles de las siguientes matrices son hermitianas, asimétrica hermitiana, o unitaria?

$$A = \begin{pmatrix} 3i & 10 & -10-2i \\ -10 & 0 & 4+i \\ 10-2i & -4+i & -5i \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{2+i}{\sqrt{10}} & \dfrac{-2+i}{\sqrt{10}} \\ 0 & \dfrac{2+i}{\sqrt{10}} & \dfrac{2-i}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1+7i & -6+2i \\ 1-7i & 4 & 1+i \\ -6-2i & 1-i & 0 \end{pmatrix}$$

**(b)** ¿Qué se puede decir acerca de los elementos en la diagonal principal de una matriz hermitiana? Pruebe su afirmación.

(c) ¿Qué puede decir acerca de los elementos en la diagonal principal de una matriz asimétrica hermitiana? Demuestre su afirmación.

(d) Demuestre que los valores propios de una matriz hermitiana son reales.

(e) Demuestre que los valores propios de una matriz asimétrica hermitiana son imaginarios puros o cero.

(f) Demuestre que los valores propios de la matriz unitaria tienen módulo uno; es decir, $|\lambda| = 1$. Describa dónde se encuentran estos valores propios en el plano complejo.

(g) Demuestre que el módulo de una matriz unitaria es uno, es decir, $|\det A| = 1$.

(h) Haga un poco de lectura adicional y determine una aplicación para cada tipo de matrices.

(i) ¿Cuáles son los análogos reales de estas tres matrices?

## CAPÍTULO 1 PREGUNTAS DE REPASO

*Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-5.*

En los problemas 1 a 22 responda verdadero o falso. Si el enunciado es falso, justifique su respuesta ya sea explicando por qué es falso o dando un contraejemplo, si el enunciado es verdadero, justifique su respuesta ya sea demostrando su enunciado o citando un resultado adecuado de este capítulo.

**1.** $\operatorname{Re}(z_1 z_2) = \operatorname{Re}(z_1)\operatorname{Re}(z_2)$.

**2.** $\operatorname{Im}(4 + 7i) = 7i$.

**3.** $|z - 1| = |\bar{z} - 1|$.

**4.** Si $\operatorname{Im}(z) > 0$, entonces $\operatorname{Re}(1/z) > 0$.

**5.** $i < 10i$.

**6.** Si $z \neq 0$, entonces $\operatorname{Arg}(z + \bar{z}) = 0$.

**7.** $|x + iy| \leq |x| + |y|$.

**8.** $\arg(\bar{z}) = \arg\left(\dfrac{1}{z}\right)$.

**9.** Si $\bar{z} = -z$, entonces $z$ es imaginario puro.

**10.** $\arg(-2 + 10i) = \pi - \tan^{-1}(5) + 2n\pi$ para $n$ un entero.

**11.** Si $z$ es una raíz de una ecuación polinomial $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$, entonces $\bar{z}$ es también una raíz.

**12.** Para cualquier número complejo $z$ diferente de cero, existe un número infinito de valores de $\arg(z)$.

**13.** Si $|z - 2| < 2$, entonces $|\operatorname{Arg}(z)| < \pi/2$.

**14.** El conjunto $S$ de números complejos $z = x + iy$ cuyas partes real e imaginaria están relacionadas por $y = \operatorname{sen} x$, es un conjunto acotado.

**15.** El conjunto $S$ de números complejos $z$ que satisfacen $|z| < 1$ o $|z - 3i| < 1$ es un dominio.

**16.** Considere un conjunto $S$ de números complejos. Si el conjunto $A$ de todas las partes reales de los números en $S$ está acotado y el conjunto $B$ de todas las partes imaginarias de los números en $S$ está acotado, entonces necesariamente el conjunto $S$ está acotado.

**17.** El sector definido por $-\pi/6 < \arg(z) \leq \pi/6$ no es ni abierto ni cerrado.

**18.** Para $z \neq 0$, existen exactamente cinco valores de $z^{3/5} = (z^3)^{1/5}$.

**19.** Un punto frontera de un conjunto $S$ es un punto en $S$.

20. El plano complejo con los ejes real e imaginario eliminados no tiene puntos frontera.

21. Im $(e^{i\theta}) = \text{sen } \theta$.

22. La ecuación $z^n = 1$, con $n$ un entero positivo, tendrá soluciones reales sólo para $n = 1$ y $n = 2$.

En los problemas 23 a 50, trate de llenar los espacios en blanco sin consultar el libro.

23. Si $a + ib = \dfrac{3 - i}{2 + 3i} + \dfrac{2 - 2i}{1 - 5i}$, entonces $a =$ ________ y $b =$ ________.

24. Si $z = \dfrac{4i}{-3 - 4i}$, entonces $|z| =$ ________.

25. Si $|z| = \text{Re}(z)$, entonces $z$ es ________.

26. Si $z = 3 + 4i$, entonces $\text{Re}\left(\dfrac{z}{\bar{z}}\right) =$ ________.

27. El argumento principal de $z = -1 - i$ es ________.

28. $\overline{\bar{z}_1^2 + \bar{z}_2^2} =$ ________.

29. $\arg((1 + i)^5) =$ ________, $|(1 + i)^6| =$ ________, Im $((1 + i)^7) =$ ________ y $\text{Re}((1 + i)^8) =$ ________.

30. $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{483} =$ ________.

31. Si $z$ es un punto en el segundo cuadrante, entonces $i\bar{z}$ está en el ________ cuadrante.

32. $i^{127} - 5i^9 + 2i^{-1} =$ ________.

33. De los tres puntos $z_1 = 2.5 + 1.9i$, $z_2 = 1.5 - 2.9i$ y $z_3 = -2.4 + 2.2i$, ________ es el más alejado del origen.

34. Si $3i\bar{z} - 2z = 6$, entonces $z =$ ________.

35. Si $2x - 3yi + 9 = -x + 2yi + 5i$, entonces $z =$ ________.

36. Si $z = \dfrac{5}{-\sqrt{3} + i}$, entonces, $\text{Arg}(z) =$ ________.

37. Si $z \neq 0$ es un número real, entonces $z + z^{-1}$ es real. Otros números complejos $z = x + iy$ para los que $z + z^{-1}$ es real están definidos por $|z| =$ ________.

38. El vector de posición de longitud 10 que pasa por $(1, -1)$ es igual al número complejo $z =$ ________.

39. El vector $z = (2 + 2i)(\sqrt{3} + i)$ se encuentra en el ________ cuadrante.

40. La frontera del conjunto $S$ de números complejos $z$ que satisfacen tanto $\text{Im}(y) > 0$ como $|z - 3i| > 1$ es ________.

41. En palabras, la región del plano complejo para la que $\text{Re}(z) < \text{Im}(z)$ es ________.

42. La región en el plano complejo compuesto por los dos discos $|z + i| \leq 1$ y $|z - i| \leq 1$ es ________ (conexo/no conexo).

43. Supongamos que $z_0$ no es un número real. Las circunferencias $|z - z_0| = |\bar{z}_0 - z_0|$ y $|z - \bar{z}_0| = |z_0 - \bar{z}_0|$ se intersectan con el ________ (eje real/eje imaginario).

44. En notación compleja, una ecuación de la circunferencia con centro $-1$ que pasa por $2 - i$ es ________.

45. Un entero positivo $n$ para el que $(1 + i)^n = 4096$ es $n =$ ________.

46. $\left|\dfrac{(4 - 5i)^{658}}{(5 + 4i)^{658}}\right| =$ ________.

47. De $(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^4 = \cos 4\theta + i\,\text{sen}\,4\theta$ obtenemos las identidades trigonométricas reales $\cos 4\theta =$ ________ y $\text{sen}\,4\theta =$ ________.

**48.** Cuando $z$ es un punto dentro del disco abierto definido por $|z| < 4$, una cota superior para $|z^3 - 2z^2 + 6z + 2|$ está dada por _________.

**49.** En el problema 22 de los ejercicios 1.6 vimos que si $z_1$ es una raíz de una ecuación polinomial con coeficientes reales, entonces su conjugado $z_2 = \bar{z}_1$ es también una raíz. Suponga que la ecuación polinomial cúbica $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$, donde $a$, $b$, $c$ y $d$ son reales, tiene exactamente tres raíces. Una de las raíces debe ser real ya que _________.

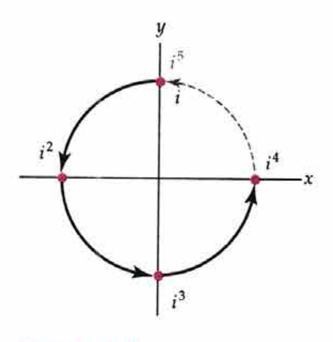



Figura 1.R.1 Figura para el problema 50

**50.** **(a)** Interprete el nemónico circular para las potencias positivas enteras de $i$ dado en la figura 1.R.1. Use este nemónico para encontrar $i^n$ para los siguientes valores de $n$:

$5, 9, 13, 17, 21, \ldots ; i^n =$ _________

$6, 10, 14, 18, 22, \ldots ; i^n =$ _________

$7, 11, 15, 19, 23, \ldots ; i^n =$ _________

$8, 12, 16, 20, 24, \ldots ; i^n =$ _________

**(b)** Examine de nuevo las potencias $n$ en los cuatro renglones del inciso **(a)** y después divida cada una de estas potencias entre 4. Con base en su descubrimiento, reconozca una regla fácil para determinar $i^n$ para cualquier entero positivo $n$. Use su regla para calcular

$i^{33} =$ ______, $i^{68} =$ ______, $i^{87} =$ ______, $i^{102} =$ ______, $i^{624} =$ ______.

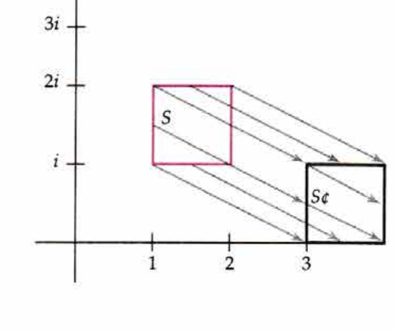
CAPÍTULO

2

# Funciones complejas y mapeos

## Contenido del capítulo






Imágen de un cuadrado bajo traslación. Ver página 63.

**Introducción** En el capítulo anterior introdujimos los números complejos y se examinaron algunas de sus propiedades algebraicas y geométricas. En este capítulo nos dedicamos al estudio de las funciones de un conjunto de números complejos a otro conjunto de números complejos. A diferencia de las funciones estudiadas en cálculo elemental, veremos que no podemos dibujar la gráfica de una función compleja. Por lo que, introducimos el concepto de un mapeo como una forma alternativa de representar gráficamente a una función compleja. Asimismo, en este capítulo se introducen los conceptos de límite de una función compleja y la continuidad de una función compleja.

## 2.1 Funciones complejas

Uno de los conceptos más importantes en matemáticas es el de función. Puede recordar de sus cursos anteriores que una función es una cierta regla de correspondencia entre dos conjuntos; más específicamente:

> *Una **función** f de un conjunto A a un conjunto B es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento en A uno y sólo un elemento en B.*

Con frecuencia pensamos a una función como una regla o una máquina que acepta *entradas* de un conjunto $A$ y regresa *salidas* en el conjunto $B$. En cálculo elemental estudiamos funciones cuyas entradas y salidas eran números reales. Estas funciones se llaman **funciones con valores reales de una variable real**. En esta sección iniciaremos nuestro estudio de funciones cuyas entradas y salidas son números complejos. Naturalmente, llamamos a estas funciones, **funciones complejas de una variable compleja**, o **funciones complejas**. Como veremos, muchas interesantes y útiles funciones complejas son simplemente generalizaciones de funciones bien conocidas del cálculo.

**Función** Supongamos que $f$ es una función del conjunto $A$ al conjunto $B$. Si $f$ asigna al elemento $a$ en $A$ un elemento $b$ en $B$, entonces decimos que $b$ es la **imagen** de $a$ bajo $f$, o el **valor** de $f$ en $a$, y escribimos $b = f(a)$. Al conjunto $A$, el conjunto de entradas, se le llama **dominio** de $f$ y al conjunto de las imágenes en $B$, el conjunto de las salidas, se le llama **rango** de $f$. Denotamos al dominio y al rango de una función $f$ por $\text{Dom}(f)$ y $\text{Rango}(f)$, respectivamente. Por ejemplo, considere la función potencia al "cuadrado" $f(x) = x^2$ definida para la variable real $x$. Puesto que cualquier número real se puede elevar al cuadrado, el dominio de $f$ es el conjunto $\mathbf{R}$ de todos los números reales. Es decir, $\text{Dom}(f) = A = \mathbf{R}$. El rango de $f$ consiste de todos los números reales $x^2$ donde $x$ es un número real. Por supuesto, $x^2 \geq 0$ para todo real $x$, y es fácil de ver en la gráfica de $f$ que el rango de $f$ es el conjunto de todos los números reales *no negativos*. Por lo tanto, el $\text{Rango}(f)$ es el intervalo $[0, \infty)$. El rango de $f$ no tiene por qué ser igual al conjunto $B$. Por ejemplo, $f$ se puede ver como una función de $A = \mathbf{R}$ a $B = \mathbf{R}$, en cuyo caso el rango está contenido pero no es igual a $B$.

Como la siguiente definición indica, una función *compleja* es una función cuyas entradas y salidas son números complejos.

**Definición 2.1.1 Función compleja**

Una **función compleja** es una función $f$ cuyo dominio y rango son subconjuntos del conjunto $\mathbf{C}$ de números complejos.

Notación usada a lo largo de este libro.

Una función compleja también se conoce como **función con valores complejos de una variable compleja**. En la mayor parte usaremos los símbolos comunes $f$, $g$ y $h$ para denotar a las funciones complejas. Además, las entradas de una función compleja $f$ normalmente se denotarán con la variable $z$ y las salidas con la variable $w = f(z)$. Cuando se haga referencia a una función compleja usaremos tres notaciones indistintamente, por ejemplo, $f(z) = z - i$, $w = z - i$, o, simplemente, la función $z - i$. A lo largo de este libro la notación $w = f(z)$ siempre denotará una función compleja, mientras que la notación $y = f(x)$ se reservará para representar una función de valores reales de una variable real $x$.

**EJEMPLO 1 Función compleja**

**(a)** La expresión $z^2 - (2 + i)z$ se puede evaluar en cualquier número complejo $z$ y siempre se obtiene sólo un número complejo, y así $f(z) = z^2 - (2 + i)z$ define una función compleja. Los valores de $f$ se encuentran usando las operaciones aritméticas para números complejos que se presentaron en la sección 1.1. Por ejemplo, en los puntos $z = i$ y $z = 1 + i$ tenemos:

$$f(i) = (i)^2 - (2 + i)(i) = -1 - 2i + 1 = -2i$$

$$\text{y} \quad f(1 + i) = (1 + i)^2 - (2 + i)(1 + i) = 2i - 1 - 3i = -1 - i.$$

**(b)** La expresión $g(z) = z + 2\text{Re}(z)$ también define una función compleja. Algunos valores de $g$ son:

$$g(i) = i + 2\text{Re}\,(i) = i + 2(0) = i$$

$$\text{y} \qquad g(2 - 3i) = 2 - 3i + 2\text{Re}\,(2 - 3i) = 2 - 3i + 2(2) = 6 - 3i.$$ ❑

Cuando el dominio de una función compleja no está explícitamente indicado, suponemos que el dominio es el conjunto de todos los números complejos $z$ para los que $f(z)$ está definida. Este conjunto se conoce a veces como el *dominio natural* de $f$. Por ejemplo, las funciones $f(z) = z^2 - (2 + i)z$ y $g(z) = z + 2\text{Re}(z)$ en el ejemplo 1 se definen para todos los números complejos $z$, y así, $\text{Dom}(f) = \mathbf{C}$ y $\text{Dom}(g) = \mathbf{C}$. La función compleja $h(z) = z/(z^2 + 1)$ no está definida en $z = i$ y $z = -i$, ya que el denominador $z^2 + 1$ es igual a 0 cuando $z = \pm i$. Por lo tanto, $\text{Dom}(h)$ es el conjunto de todos los números complejos excepto $i$ y $-i$.

En la introducción de la sección, definimos una función de valores reales de variable real como una función cuyos dominio y rango son subconjuntos del conjunto **R** de los números reales. Debido a que **R** es un subconjunto del conjunto **C** de los números complejos, *toda* función de valores reales de una variable real también es una función compleja. Pronto veremos que las funciones de valores reales de dos variables reales $x$ y $y$ también son tipos especiales de funciones complejas. Estas funciones jugarán un importante papel en el estudio del análisis complejo. Con el fin de evitar la repetición de la engorrosa terminología para la *función de valores reales de variable real*, y para la *función de valores reales de dos variables reales*, utilizamos el término **función real** a partir de este momento para referirnos a cualquier tipo de función con una o varias variables que se estudie en un curso de cálculo.

**Partes real e imaginaria de una función compleja** A menudo es útil expresar las entradas y las salidas de una función compleja en términos de sus partes reales e imaginarias. Si $w = f(z)$ es una función compleja, entonces la imagen de un número complejo $z = x + iy$ bajo $f$ es un número complejo $w = u + iv$. Simplificando la expresión $f(x + iy)$, podemos escribir las variables reales $u$ y $v$ en términos de las variables reales $x$ y $y$. Por ejemplo, sustituyendo el símbolo $z$ con $x + iy$ en la función compleja $w = z^2$, se obtiene:

$$w = u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \qquad (1)$$

De (1) las variables reales $u$ y $v$ están dadas por $u = x^2 - y^2$ y $v = 2xy$, respectivamente. Este ejemplo muestra que, si $w = u + iv = f(x + iy)$ es una función compleja, entonces tanto $u$ como $v$ son funciones reales de las dos variables reales $x$ y $y$. Esto es, haciendo $z = x + iy$, podemos expresar cualquier función compleja $w = f(z)$ en términos de dos funciones reales como:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \qquad (2)$$

Las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ en (2) se llaman las **partes real** e **imaginaria de** $f$, respectivamente.

EJEMPLO 2 **Partes real e imaginaria de una función**

Determine las partes real e imaginaria de las funciones: (**a**) $f(z) = z^2 - (2 + i)z$ y (**b**) $g(z) = z + 2\text{Re}(z)$.

**Solución** En cada caso, sustituimos el símbolo $z$ por $x + iy$, y después simplificamos.

(**a**) $f(z) = (x + iy)^2 - (2 + i)(x + iy) = x^2 - 2x + y - y^2 + (2xy - x - 2y)i$. Por lo que, $u(x, y) = x^2 - 2x + y - y^2$ y $v(x, y) = 2xy - x - 2y$.

(**b**) Ya que $g(z) = x + iy + 2\text{Re}(x + iy) = 3x + iy$, tenemos $u(x, y) = 3x$ y $v(x, y) = y$. ❑

Una función $f$ se puede definir sin utilizar el símbolo $z$. ➡

Toda función compleja está completamente determinada por las funciones reales $u(x, y)$ y $v(x, y)$ en (2). Por lo tanto, una función compleja $w = f(z)$ se puede definir arbitrariamente especificando dos funciones reales $u(x, y)$ y $v(x, y)$, aun cuando $w = u + iv$ no puedan obtenerse mediante operaciones conocidas realizadas únicamente en el símbolo $z$. Por ejemplo, si tomamos $u(x, y) = xy^2$ y $v(x, y) = x^2 - 4y^3$, entonces $f(z) = xy^2 + i(x^2 - 4y^3)$ define una función compleja. Para encontrar el valor de $f$ en el punto $z = 3 + 2i$, sustituimos $x = 3$ y $y = 2$ en la expresión de $f$ para obtener $f(3 + 2i) = 3 \cdot 2^2 + i(3^2 - 4 \cdot 2^3) = 12 - 23i$.

También observamos que las funciones complejas que se definen en términos de $u(x, y)$ y $v(x, y)$ siempre se pueden expresar, si así lo desea, en términos de operaciones sobre los símbolos $z$ y $\bar{z}$. Vea el problema 32 de los ejercicios 2.1.

**Función exponencial** En la sección 1.6 se presenta de manera informal a la función exponencial compleja $e^z$. Esta función compleja es un ejemplo que se define especificando sus partes real e imaginaria.

**Definición 2.1.2 Función exponencial compleja**

La función $e^z$ definida por:

$$e^z = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y \tag{3}$$

se llama **función exponencial compleja**.

Por la definición 2.1.2, las partes real e imaginaria de la función exponencial compleja son $u(x, y) = e^x \cos y$ y $v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$, respectivamente. Los valores de la función exponencial compleja $w = e^z$ se encuentran al expresar el punto $z$ como $z = x + iy$ y después sustituyendo los valores de $x$ y $y$ en (3). En el ejemplo siguiente se muestra este procedimiento.

EJEMPLO 3 **Valores de la función exponencial compleja**

Encuentre el valores de la función exponencial compleja $e^z$ en los siguientes puntos.

(**a**) $z = 0$ (**b**) $z = i$ (**c**) $z = 2 + \pi i$

**Solución** En cada inciso sustituimos $x = \text{Re}(z)$ y $y = \text{Im}(z)$ en (3) y después simplificamos.

**(a)** Para $z = 0$, tenemos $x = 0$ y $y = 0$, y, por tanto, $e^0 = e^0 \cos 0 + ie^0 \text{ sen } 0$. Ya que $e^0 = 1$ (para la función exponencial real), $\cos 0 = 1$, y $\text{sen } 0 = 0$, $e^0 = e^0 \cos 0 + i \text{ sen } 0$ se simplifica a $e^0 = 1$.

**(b)** Para $z = i$, tenemos $x = 0$ y $y = 1$, y así:

$$e^i = e^0 \cos 1 + ie^0 \text{ sen } 1 = \cos 1 + i \text{ sen } 1 \approx 0.5403 + 0.8415i$$

**(c)** Para $z = 2 + \pi i$, tenemos $x = 2$ y $y = \pi$, y así $e^{2+\pi i} = e^2 \cos \pi + ie^2 \text{ sen } \pi$. Ya que $\cos \pi = -1$ y $\text{sen } \pi = 0$, esto se simplifica a $e^{2+\pi i} = -e^2$. ❑

## Forma exponencial de un número complejo

La función exponencial compleja nos permite expresar la forma polar de un número complejo distinto de cero $z = r(\cos \theta + i \text{ sen } \theta)$ en una forma particular compacta y conveniente:

$$z = re^{i\theta}. \tag{4}$$

Llamamos a (4) la **forma exponencial** del número complejo $z$. Por ejemplo, una forma polar del número complejo $3i$ es $3[\cos (\pi/2) + i \text{ sen}(\pi/2)]$ mientras que una forma exponencial, de $3i$ es $3e^{i\pi/2}$. Considere que en la forma exponencial (4) de un número complejo, el valor de $\theta = \arg(z)$ no es único. Esto es parecido a la situación con la forma polar de un número complejo. Se le recomienda comprobar que $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$, $\sqrt{2}e^{i9\pi/4}$ y $\sqrt{2}e^{i17\pi/4}$ son formas exponenciales válidas del número complejo $1 + i$.

Si $z$ es un número real, es decir, si $z = x + 0i$, entonces con (3) se obtiene $e^z = e^x \cos 0 + ie^x \text{ sen } 0 = e^x$. En otras palabras, la función exponencial compleja concuerda con la usual función exponencial real de $z$. Muchas propiedades bien conocidas de la función exponencial real también se cumplen con la función exponencial compleja. Por ejemplo, si $z_1$ y $z_2$ son números complejos, entonces se puede utilizar (3) para demostrar que:

$$e^0 = 1, \tag{5}$$

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}, \tag{6}$$

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}, \tag{7}$$

$$(e^{z_1})^n = e^{nz_1} \text{ para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{8}$$

Demostraciones de las propiedades (5) a (8) se presentarán en la sección 4.1, donde se analiza con más detalle la función exponencial compleja.

Mientras que las funciones exponenciales real y compleja tienen muchas similitudes, también tienen algunas diferencias importantes y sorprendentes. Quizá la diferencia más inesperada es:

*La función exponencial compleja es periódica.*

En el problema 33 en los ejercicios 2.1 se le pide demostrar que $e^{z+2\pi i} = e^z$ para todos los números complejos $z$. Este resultado implica que la función exponencial compleja tiene un periodo imaginario puro igual a $2\pi i$.

**Coordenadas polares** Hasta el momento, las partes real e imaginaria de una función compleja se determinaron usando la descripción cartesiana $x + iy$ de la variable compleja $z$. Es igualmente válido, y, a menudo, más conveniente expresar a la variable compleja $z$ usando la forma polar $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen} \theta)$ o, equivalentemente, la forma exponencial $z = re^{i\theta}$. Dada una función compleja $w = f(z)$, si reemplazamos el símbolo $z$ con $r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, entonces podemos escribir esta función como:

$$f(z) = u(r, \theta) + iv\,(r, \theta). \tag{9}$$

Seguimos llamando las funciones reales $u(r, \theta)$ y $v(r, \theta)$ en (9) las partes real e imaginaria de $f$, respectivamente. Por ejemplo, sustituyendo $z$ con $r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ en la función $f(z) = z^2$, se obtiene, con la fórmula de De Moivre,

$$f(z) = (r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta))^2 = r^2 \cos 2\theta + ir^2 \operatorname{sen} 2\theta$$

Así, usando la forma polar de $z$ hemos demostrado que las partes real e imaginaria de $f(z) = z^2$ son

$$u(r, \theta) = r^2 \cos 2\theta \quad \text{y} \quad v(r, \theta) = r^2 \operatorname{sen} 2\theta, \tag{10}$$

Las funciones $u(r, \theta)$ y $v(r, \theta)$ no son iguales a las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$.

respectivamente. Debido a que utiliza una descripción polar más que una descripción cartesiana de la variable $z$, las funciones $u$ y $v$ en (10) no son iguales a las funciones $u$ y $v$ en (1) calculadas previamente para la función $z^2$.

Al igual que con las coordenadas cartesianas, se puede definir una función compleja especificando sus partes real e imaginaria en coordenadas polares. La expresión $f(z) = r^3 \cos \theta + (2r \operatorname{sen} \theta)i$, por lo tanto, define una función compleja. Para encontrar el valor de esta función en, por ejemplo, el punto $z = 2i$, primero expresamos a $2i$ en forma polar:

$$2i = 2\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right).$$

A continuación, hacemos $r = 2$ y $\theta = \pi/2$ en la expresión de $f$ obteniendo:

$$f(2i) = (2)^3 \cos \frac{\pi}{2} + \left(2 \cdot 2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) i = 8 \cdot 0 + (4 \cdot 1)i = 4i.$$

## Observaciones *Comparación con el análisis real*

($i$) La función exponencial compleja da un buen ejemplo de cómo las funciones complejas pueden ser similares a, y al mismo tiempo, diferentes de sus contrapartes reales. Tanto la función exponencial compleja como la real satisfacen las propiedades (5) a (8). Por otra parte, la función exponencial compleja es periódica y, del inciso (c) del ejemplo 3, un valor de la función exponencial compleja puede ser un número real negativo. Ninguna de estas propiedades las comparte la función exponencial real.

($ii$) En esta sección hicimos la importante observación de que cada función compleja se puede definir en términos de dos funciones reales $u(x, y)$ y $v(x, y)$ como $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Esto implica que el estudio de las funciones complejas está relacionado estrechamente con el estudio de las funciones de varias variables de dos variables

reales. Los conceptos de límite, continuidad, derivada e integral en tales funciones reales se usarán para desarrollar y ayudar a nuestra comprensión de conceptos análogos de las funciones complejas.

(*iii*) En la página 47 analizamos que las funciones de valores reales de una variable real y las funciones de valores reales de dos variables reales se pueden ver como casos especiales de funciones complejas. En nuestro estudio del análisis complejo encontraremos otros tipos especiales de funciones complejas que incluyen las siguientes:

Las **funciones de valores reales de una variable compleja** son funciones $y = f(z)$ donde $z$ es un número complejo y $y$ es un número real. Las funciones $x = \text{Re}(z)$ y $r = |z|$ son dos ejemplos de este tipo de función.

Las **funciones de valores complejos de una variable real** son funciones $w = f(t)$ donde $t$ es un número real y $w$ es un número complejo. Se acostumbra expresar estas funciones en términos de funciones de dos valores reales de la variable real $t$, $w(t) = x(t) + iy(t)$. Por ejemplo, $w(t) = 3t + i\cos t$ es una función de valor complejo de una variable real $t$.

Estos tipos de funciones complejas especiales se presentarán en diversos lugares a lo largo del libro.

## EJERCICIOS 2.1

*Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-6.*

En los problemas 1 a 8 evalúe la función compleja $f$ dada en los puntos indicados.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1.** $f(z) = z^2\bar{z} - 2i$ | (**a**) $2i$ | (**b**) $1 + i$ | (**c**) $3 - 2i$ |
| **2.** $f(z) = -z^3 + 2z + \bar{z}$ | (**a**) $i$ | (**b**) $2 - i$ | (**c**) $1 + 2i$ |
| **3.** $f(z) = \log_e \lvert z \rvert + i\text{Arg}(z)$ | (**a**) $1$ | (**b**) $4i$ | (**c**) $1 + i$ |
| **4.** $f(z) = \lvert z \rvert^2 - 2\text{Re}(iz) + z$ | (**a**) $3 - 4i$ | (**b**) $2 - i$ | (**c**) $1 + 2i$ |
| **5.** $f(z) = (xy - x^2) + i(3x + y)$ | (**a**) $3i$ | (**b**) $4 + i$ | (**c**) $3 - 5i$ |
| **6.** $f(z) = e^z$ | (**a**) $2 - \pi i$ | (**b**) $\frac{\pi}{3}i$ | (**c**) $\log_e 2 - \frac{5\pi}{6}i$ |
| **7.** $f(z) = r + i\cos^2\theta$ | (**a**) $3$ | (**b**) $-2i$ | (**c**) $2 - i$ |
| **8.** $f(z) = r\,\text{sen}\,3\theta + i\cos 2\theta$ | (**a**) $-2$ | (**b**) $1 + i$ | (**c**) $-5i$ |

En los problemas 9 a 16 determine las partes real e imaginaria $u$ y $v$ de la función compleja $f$ dada como funciones de $x$ y $y$.

**9.** $f(z) = 6z - 5 + 9i$

**10.** $f(z) = -3z + 2\bar{z} - i$

**11.** $f(z) = z^3 - 2z + 6$

**12.** $f(z) = z^2 + \bar{z}^2$

**13.** $f(z) = \dfrac{\bar{z}}{z + 1}$

**14.** $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$

**15.** $f(z) = e^{2z+i}$

**16.** $f(z) = e^{z^2}$

En los problemas 17 a 22 determine las partes real e imaginaria $u$ y $v$ de la función compleja $f$ dada como funciones de $r$ y $\theta$.

**17.** $f(z) = \bar{z}$

**18.** $f(z) = |z|$

**19.** $f(z) = z^4$

**20.** $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$

**21.** $f(z) = e^z$

**22.** $f(z) = x^2 + y^2 - yi$

En los problemas 23 a 26, determine el dominio natural de la función compleja $f$ dada.

**23.** $f(z) = 2\text{Re}(z) - iz^2$

**24.** $f(z) = \dfrac{3z + 2i}{z^3 + 4z^2 + z}$

**25.** $f(z) = \dfrac{iz}{|z - 1|}$

**26.** $f(z) = \dfrac{iz}{|z| - 1}$

## Enfocando los conceptos

**27.** Analice: ¿Las siguientes expresiones definen funciones complejas $f(z)$? Justifique su respuesta.

(**a**) $\arg(z)$ (**b**) $\text{Arg}(z)$ (**c**) $\cos(\arg(z)) + i\,\text{sen}(\arg(z))$

(**d**) $z^{1/2}$ (**e**) $|z|$ (**f**) $\text{Re}(z)$

**28.** Determine el rango de cada una de las siguientes funciones complejas.

(**a**) $f(z) = \text{Im}(z)$ definida en el disco cerrado $|z| \leq 2$

(**b**) $f(z) = (1 + i)\,|z|$ definida en el cuadrado $0 \leq \text{Re}(z) \leq 1$, $0 \leq \text{Im}(z) \leq 1$.

(**c**) $f(z) = \bar{z}$ definida en la parte superior del plano $\text{Im}(z) > 0$

**29.** Determine el dominio natural y el rango de cada una de las siguientes funciones complejas.

(**a**) $f(z) = \dfrac{z}{|z|}$. [*Sugerencia*: Para determinar el rango, considere $|f(z)|$.]

(**b**) $f(z) = 3 + 4i + \dfrac{5z}{|z|}$.

(**c**) $f(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{z - \bar{z}}$.

**30.** Dé un ejemplo de una función compleja cuyo dominio natural consiste de todos los números complejos excepto $0$, $1 + i$, y $1 - i$.

**31.** Determine el dominio natural y rango de la función compleja $f(z) = \cos(x - y) + i\,\text{sen}(x - y)$.

**32.** Suponga que $z = x + iy$. Lea nuevamente la sección 1.1 y determine cómo expresar $x$ y $y$ en términos de $z$ y $\bar{z}$. Después escriba las siguientes funciones en términos de los símbolos $z$ y $\bar{z}$.

(**a**) $f(z) = x^2 + y^2$ (**b**) $f(z) = x - 2y + 2 + (6x + y)i$

(**c**) $f(z) = x^2 - y^2 - (5xy)i$ (**d**) $f(z) = 3y^2 + (3x^2)i$

**33.** En este problema examinamos algunas propiedades de la función exponencial compleja.

(**a**) Si $z = x + iy$, entonces demuestre que $|e^z| = e^x$.

(**b**) ¿Existen números complejos $z$ con la propiedad que $e^z = 0$? [*Sugerencia*: Utilice el inciso (a)].

(**c**) Demuestre que $f(z) = e^z$ es una función que es periódica con periodo imaginario puro $2\pi i$. Es decir, demuestre que $e^{z+2\pi i} = e^z$ para todo número complejo $z$.

**34.** Utilice (3) para demostrar que $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$ para todo complejo $z$.

**35.** ¿Qué puede decir acerca de $z$ si $|e^{-z}| < 1$?

**36.** Sea $f(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

(**a**) Demuestre que $f$ es periódica con periodo real $2\pi$.

(**b**) Suponga que $z$ es real. Es decir, $z = x + 0i$. Utilice (3) para reescribir $f(x + 0i)$. ¿Qué función real bien conocida obtiene?

**37.** ¿Cuál es el periodo de cada una de las siguientes funciones complejas?

(**a**) $f(z) = e^{z+\pi}$ (**b**) $f(z) = e^{\pi z}$

(**c**) $f(z) = e^{2iz}$ (**d**) $f(z) = e^{3z+i}$

**38.** Si $f(z)$ es una función compleja con periodo imaginario puro $i$, entonces, ¿cuál es el periodo de la función $g(z) = f(iz - 2)$?

## 2.2 Funciones complejas como mapeos

Recuerde que si $f$ es una función de valor real de una variable real, entonces la gráfica de $f$ es una curva en el plano cartesiano. Las gráficas se usan mucho para investigar propiedades de funciones reales en los cursos elementales. Sin embargo, vemos que la gráfica de una función compleja se encuentra en un espacio de cuatro dimensiones, por lo que no podemos utilizar gráficas para estudiar funciones complejas. En esta sección analizamos el concepto de mapeo complejo, que fue desarrollado por el matemático alemán Bernhard Riemann para dar una representación geométrica de una función compleja. La idea básica es ésta. Cada función compleja describe una correspondencia entre puntos en dos copias del plano complejo. Específicamente, el punto $z$ en el plano $z$ asociado con el único punto $w = f(z)$ en el plano $w$. Usamos el término alternativo **mapeo complejo** en lugar de "función compleja" cuando consideramos la función como esta correspondencia entre puntos en el plano $z$ y puntos en el plano $w$. La representación geométrica de un mapeo complejo $w = f(z)$ consiste de dos figuras: la primera, un subconjunto $S$ de puntos en el plano $z$, y la segunda, el conjunto $S'$ de las imágenes de puntos en $S$ bajo $w = f(z)$ en el plano $w$.

**Mapeos** Una útil herramienta para el estudio de funciones reales en cálculo elemental es la gráfica de la función. Recuerde que si $y = f(x)$ es una función de valores reales de una variable real $x$, entonces la gráfica de $f$ se define como el conjunto de todos los puntos $(x, f(x))$ en el plano cartesiano bidimensional. Se puede hacer una definición análoga para una función compleja. Sin embargo, si $w = f(z)$ es una función compleja, entonces tanto $z$ como $w$ se encuentran en un plano complejo. Por lo que el conjunto de todos los puntos $(z, f(z))$ se encuentra en un espacio de cuatro dimensiones (dos dimensiones de la entrada $z$ y dos dimensiones de la salida $w$). Por supuesto, un subconjunto, del espacio de cuatro dimensiones no se puede ilustrar fácilmente. Por tanto:

*No podemos dibujar la gráfica de una función compleja.*

El concepto de un mapeo complejo proporciona una forma alternativa de dar una representación geométrica de una función compleja. Como se describió en la sección de introducción, usamos el término **mapeo complejo** para referirnos a la correspondencia determinada por una función compleja $w = f(z)$ entre puntos en un plano $z$ e imágenes en un plano $w$. Si el punto $z_0$ en el plano $z$ corresponde al punto $w_0$ en el plano $w$, es decir, si $w_0 = f(z_0)$, entonces decimos que $f$ **mapea** $z_0$ en $w_0$ o, equivalentemente, que $z_0$ es **mapeado** en $w_0$ con $f$.

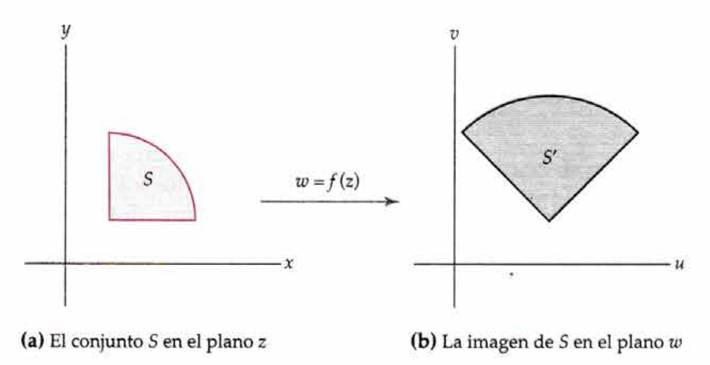
Como un ejemplo de este tipo de pensamiento geométrico, considere la función real $f(x) = x + 2$. En lugar de representar esta función con una recta de pendiente 1 e intersección con el eje $y$ en $(0, 2)$, considere cómo una copia de la recta real (la recta $x$) se proyecta sobre otra copia de la recta real (recta $y$) con $f$. Cada punto de la recta $x$ se mapea en un punto dos unidades a la derecha sobre el eje $y$ (0 se mapea en 2, mientras que 3 se mapea en 5, y así sucesivamente). Por tanto, la función real $f(x) = x + 2$ se puede pensar como un mapeo que traslada cada punto en la recta real dos unidades a la derecha. Puede visualizar la acción de este mapeo imaginando la recta real como una varilla rígida infinita que físicamente se mueve dos unidades a la derecha.

Con el fin de crear una representación geométrica de un mapeo complejo, comenzamos con dos copias del plano complejo, el plano $z$ y el plano $w$, dibujados uno al lado del otro o uno encima del otro. Un mapeo complejo está representado por un dibujo de conjunto $S$ de puntos en el plano $z$ y el correspondiente conjunto de imágenes de los puntos de $S$ bajo $f$ en el plano $w$. Esta idea se muestra en la figura 2.2.1, donde un conjunto $S$ en el plano $z$ se muestra en color en la figura 2.2.1(a) y un conjunto etiquetado por $S'$, que representa el conjunto de las imágenes de los puntos en $S$ bajo $w = f(z)$, se muestra en gris en la figura 2.2.1(b). A partir de ahora usaremos notación similar a la de la figura 2.2.1 cuando analicemos mapeos.

### *Notación: S'*

*Si $w = f(z)$ es un mapeo complejo y si $S$ es un conjunto de puntos en el plano $z$, entonces llamamos al conjunto de imágenes de los puntos en $S$ bajo $f$* ***la imagen de S bajo f****, y denotamos este conjunto con el símbolo $S'$.* *

Si el conjunto $S$ tiene propiedades adicionales, tales como que $S$ es un dominio o una curva, entonces también utilizaremos símbolos como $D$ y $D'$ o $C$ y $C'$, respectivamente, para denotar el conjunto y su imagen bajo un mapeo complejo. La notación $f(C)$ también a veces se utiliza para denotar la imagen de una curva $C$ bajo $w = f(z)$.




**(a)** El conjunto $S$ en el plano $z$ **(b)** La imagen de $S$ en el plano $w$

Figura 2.2.1 La imagen de un conjunto $S$ bajo un mapeo $w = f(z)$

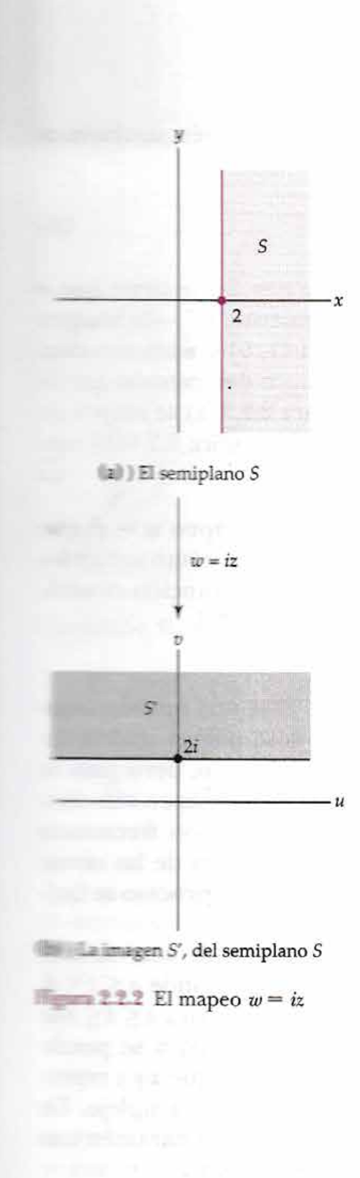
Una ilustración como la de la figura 2.2.1 se destina para transmitir información acerca de la relación general entre un punto arbitrario $z$ y su imagen $w = f(z)$. Por lo que, el conjunto $S$ se tiene que elegir con cierto cuidado. Por ejemplo, si $f$ es una función cuyo dominio y rango son el conjunto de los números complejos $\mathbf{C}$, entonces, al elegir $S = \mathbf{C}$ se obtiene como resultado una figura que consiste únicamente en dos planos complejos. Es evidente que, tal ilustración no daría una idea de cómo los puntos en el plano $z$ se mapean en puntos en el plano $w$ con $f$.

### EJEMPLO 1 Imagen de un semiplano bajo el mapeo $w = iz$

Determine la imagen del semiplano $\text{Re}(z) \geq 2$ bajo el mapeo complejo $w = iz$ y represente el mapeo de forma gráfica.

**Solución** Sea $S$ el semiplano formado por todos los puntos complejos $z$ con $\text{Re}(z) \geq 2$. Se procede como se muestra en la figura 2.2.1. Considere primero la

* El conjunto $S$ a veces se llama la **pre-imagen** de $S'$ bajo $f$.




(a) El semiplano $S$

(b) La imagen $S'$, del semiplano $S$

Figura 2.2.2 El mapeo $w = iz$

línea frontera vertical $x = 2$ de $S$ que se muestra en color en la figura 2.2.2(a). Para cualquier punto $z$ en esta recta tenemos $z = 2 + iy$, donde $-\infty < y < \infty$. El valor de $f(z) = iz$ en un punto en esta recta es $w = f(2 + iy) = i(2 + iy) = -y + 2i$. Ya que el conjunto de puntos $w = -y + 2i$, $-\infty < y < \infty$, es la recta $v = 2$ en el plano $w$, concluimos que la recta vertical $x = 2$ en el plano $z$ es mapeada en la recta horizontal $v = 2$ en el plano $w$ con el mapeo $w = iz$. Por tanto, la recta vertical que se muestra en color en la figura 2.2.2(a) se mapea en la recta horizontal que se muestra en negro en la figura 2.2.2(b) para este mapeo.

Ahora considere todo el semiplano $S$ que se muestra en color en la figura 2.2.2(a). Este conjunto se puede describir con las dos desigualdades simultáneas,

$$x \geq 2 \qquad \text{y} \qquad -\infty < y < \infty. \tag{1}$$

Para describir la imagen de $S$, expresamos el mapeo $w = iz$ en términos de sus partes real e imaginaria $u$ y $v$; después usamos las cotas dadas por (1) en $x$ y $y$ en el plano $z$ para determinar cotas en $u$ y $v$ en el plano $w$. Sustituyendo el símbolo $z$ con $x + iy$ en $w = iz$, obtenemos $w = i(x + iy) = -y + ix$, y así las partes real e imaginaria de $w = iz$ son:

$$u = -y \qquad \text{y} \qquad v = x. \tag{2}$$

Después de sustituir las variables $x$ y $y$ en (1) utilizando las ecuaciones $x = v$ y $y = -u$ de (2), obtenemos $v \geq 2$ y $-\infty < u < \infty$. Es decir, el conjunto $S'$, la imagen de $S$ bajo $w = iz$, consiste de todos los puntos $w = u + iv$ en el plano $w$ que satisfacen las desigualdades simultáneas $v \geq 2$ y $-\infty < u < \infty$. En palabras, el conjunto $S'$ consiste de todos los puntos en el semiplano que se encuentran en o arriba de la recta horizontal $v = 2$. Esta imagen se puede también describir con la simple desigualdad $\text{Im}(w) \geq 2$. En resumen, el semiplano $\text{Re}(z) \geq 2$ que se muestra en color en la figura 2.2.2(a) se mapea en el semiplano $\text{Im}(w) \geq 2$ que se muestra en gris en la figura 2.2.2(b) con el mapeo complejo $w = iz$. ❑

En el ejemplo 1, el conjunto $S$ y su imagen $S'$ son los dos semiplanos. Esto lo podría llevar a creer que hay alguna forma geométrica simple de visualizar la imagen de otros conjuntos en el plano complejo bajo el mapeo $w = iz$. (Veremos que este es el caso en la sección 2.3). Sin embargo, para la mayoría de los mapeos, la relación entre $S$ y $S'$ es más complicada. Esto se muestra en el ejemplo siguiente.

---

**EJEMPLO 2 Imagen de una recta bajo $w = z^2$**

Encuentre la imagen de la recta vertical $x = 1$ bajo el mapeo complejo $w = z^2$ y represente el mapeo gráficamente.

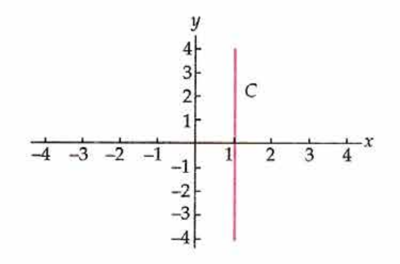
**Solución** Sea $C$ el conjunto de puntos en la recta vertical $x = 1$ o, equivalentemente, el conjunto de puntos $z = 1 + iy$ con $-\infty < y < \infty$. Procedemos como en el ejemplo 1. De (1) de la sección 2.1, las partes real e imaginaria de $w = z^2$ son $u(x, y) = x^2 - y^2$ y $v(x, y) = 2xy$, respectivamente. Para un punto $z = 1 + iy$ en $C$, tenemos $u(1, y) = 1 - y^2$ y $v(1, y) = 2y$. Esto implica que la imagen de $S$ es el conjunto de puntos $w = u + iv$ que satisfacen las ecuaciones simultáneas:

$$u = 1 - y^2 \tag{3}$$

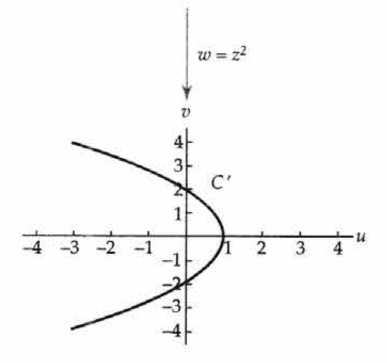
y

$$v = 2y \tag{4}$$

para $-\infty < y < \infty$. Las ecuaciones (3) y (4) son *ecuaciones paramétricas* en el parámetro real $y$, y definen una curva en el plano $w$. Podemos encontrar una ecuación cartesiana en $u$ y $v$ para esta curva eliminando el parámetro $y$.




(a) La línea vertical Re(z) = 1




(b) La imagen de C es la parábola $u = 1 - \frac{1}{4}v^2$

Figura 2.2.3 El mapeo $w = z^2$

Con la finalidad de hacer esto, resolvemos (4) para $y$ y después sustituimos esta expresión en (3):

$$u = 1 - \left(\frac{v}{2}\right)^2 = 1 - \frac{v^2}{4}. \tag{5}$$

Ya que $y$ puede tomar cualquier valor real y ya que $v = 2y$, se tiene que $v$ puede tomar cualquier valor real en (5). Por consiguiente, $C'$ —la imagen de $C$— es una parábola en el plano $w$ con vértice en $(1, 0)$ e $u$-intersección en $(0, \pm 2)$. Vea la figura 2.2.3(b). En conclusión, hemos demostrado que la recta vertical $x = 1$ que se muestra en color en la figura 2.2.3(a) se mapea en la parábola $u = 1 - \frac{1}{4}v^2$ que se muestra en negro en la figura 2.2.3(b) con el mapeo complejo $w = z^2$. ❑

En cambio, en la figura 2.2.2, la representación del mapeo $w = z^2$ que se muestra en la figura 2.2.3 da poca información acerca de cómo serían las imágenes de otros conjuntos en el plano. El mapeo de esta "función cuadrática compleja" se examinará con más detalle en la sección 2.4.

## Curvas paramétricas en el plano complejo

Para una función compleja simple, la manera en la que el plano complejo se mapea podría ser evidente después de analizar la imagen de un solo conjunto, pero para la mayoría de las funciones se obtiene un entendimiento del mapeo sólo después de ver las imágenes de muchos conjuntos. Podemos con frecuencia entender mejor un mapeo complejo analizando las imágenes de las *curvas* (subconjuntos unidimensionales del plano complejo) y este proceso se facilita con el uso de ecuaciones paramétricas.

Si $x = x(t)$ y $y = y(t)$ son las funciones de valores reales de una variable real $t$, entonces el conjunto $C$ de todos los puntos $(x(t), y(t))$, donde $a \leq t \leq b$, se llama **curva paramétrica**. Las ecuaciones $x = x(t)$, $y = y(t)$, para $a \leq t \leq b$ se llaman **ecuaciones paramétricas** de $C$. Una curva paramétrica se puede considerar que se encuentra en el plano complejo haciendo que $x$ y $y$ representen las partes real e imaginaria de un punto en el plano complejo. En otras palabras, si $x = x(t)$, $y = y(t)$, y $a \leq t \leq$ b son ecuaciones paramétricas de una curva $C$ en el plano cartesiano, entonces la ecuación $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$, es una descripción de la curva $C$ en el plano complejo. Por ejemplo, considere las ecuaciones paramétricas $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, de una curva $C$ en el plano $xy$ (la curva $C$ es una circunferencia centrada en (0, 0) con radio 1). La ecuación $z(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, describe la misma curva $C$ en el plano complejo. Si, decimos que, $t = \pi/2$, entonces el punto $(\cos \frac{\pi}{2}, \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}) = (0, 1)$ está sobre la curva $C$ en el plano cartesiano, mientras que el punto $z(\pi/2) = \cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = i$ representa este punto en $C$ en el plano complejo. Este análisis se resume en la siguiente definición.

En una parametrización $z(t) = x(t) + iy(t)$, $t$ es una variable **real**.

**Definición 2.2.1 Curvas paramétricas en el plano complejo**

Si $x(t)$ y $y(t)$ son las funciones de valores reales de una variable real $t$, entonces el conjunto $C$ que consiste de todos los puntos $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$, se llama **curva paramétrica** o **curva paramétrica compleja**. La función de valores complejos de variable real $t$, $z(t) = x(t) + iy(t)$, se llama **parametrización** de $C$.

Propiedades de las curvas en el plano cartesiano tales, como continua, derivable, suave, simple y cerrada, se pueden todas reformular como propiedades de curvas en el plano complejo. Estas propiedades son importantes en el estudio de integrales complejas y se analizarán en el capítulo 5.

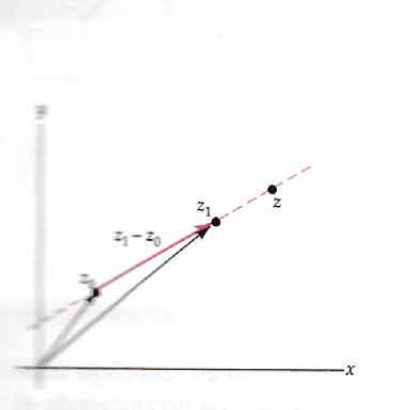



**Figura 2.2.4** Parametrización de una recta

Dos de las curvas más elementales en el plano son las rectas y las circunferencias. Parametrizaciones de estas curvas en el plano complejo se pueden deducir de parametrizaciones en el plano cartesiano. Es también relativamente fácil encontrar estas parametrizaciones directamente utilizando la geometría del plano complejo. Por ejemplo, suponga que queremos encontrar una parametrización de la recta en el plano complejo que contiene los puntos $z_0$ y $z_1$. Sabemos del capítulo 1 que $z_1 - z_0$ representa el vector cuyo origen está en $z_0$ y termina en $z_1$, que se muestra a color en la figura 2.2.4. Si $z$ es cualquier punto sobre la recta que contiene a $z_0$ y a $z_1$, entonces al examinar la figura 2.2.4 se encuentra que el vector $z - z_0$ es un múltiplo real del vector $z_1 - z_0$. Por tanto, si $z$ está sobre la recta que contiene a $z_0$ y a $z_1$, entonces existe un número real $t$ tal que $z - z_0 = t(z_1 - z_0)$. Resolviendo esta ecuación para $z$ se obtiene una parametrización $z(t) = z_0 + t(z_1 - z_0) = z_0(1 - t) + z_1 t$, $-\infty < t < \infty$ para la recta. Observe que si restringimos el parámetro $t$ al intervalo $[0, 1]$, entonces los puntos $z(t)$ varían de $z_0$ a $z_1$, y esto da una parametrización del segmento de recta de $z_0$ a $z_1$. Por otra parte, si restringimos $t$ al intervalo $[0, \infty]$, entonces obtenemos una parametrización del rayo que sale de $z_0$ y que contiene a $z_1$. Estas parametrizaciones se incluyen en el resumen siguiente.

¡No hay una parametrización única posible! ➡ Vea el problema 28 de los ejercicios 2.2.

## *Curvas paramétricas comunes en el plano complejo*

***Recta***

*Una parametrización de la recta que contiene a los puntos $z_0$ y $z_1$ es:*

$$z(t) = z_0(1 - t) + z_1 t, \quad -\infty < t < \infty. \tag{6}$$

***Segmento de recta***

*Una parametrización del segmento de recta de $z_0$ a $z_1$ es:*

$$z(t) = z_0(1 - t) + z_1 t, \quad 0 \leq t \leq 1. \tag{7}$$

***Rayo***

*Una parametrización del rayo que sale de $z_0$ y que contiene a $z_1$ es:*

$$z(t) = z_0(1 - t) + z_1 t, \quad 0 \leq t < \infty. \tag{8}$$

***Circunferencia***

*Una parametrización de la circunferencia centrada en $z_0$ con radio $r$ es:*

$$z(t) = z_0 + r(\cos t + i \operatorname{sen} t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \tag{9}$$

*En notación exponencial, esta parametrización es:*

$$z(t) = z_0 + re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \tag{10}$$

Restringiendo los valores del parámetro $t$ en (9) o (10) se obtienen parametrizaciones de arcos circulares. Por ejemplo, haciendo $z_0 = 0$ y $r = 1$ en (10) vemos que $z(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, es una parametrización del arco semicircular del círculo unitario centrado en el origen y que se encuentra en el semiplano superior $\operatorname{Im}(z) \geq 0$.

Las curvas paramétricas son importantes en el estudio de mapeos complejos ya que es fácil determinar una parametrización de la imagen de una curva paramétrica. Por ejemplo, si $w = iz$ y $C$ es la recta $x = 2$ dada por $z(t) = 2 + \text{it}$, $-\infty < t < \infty$, entonces el valor de $f(z) = iz$ en un punto sobre esta recta es $w = f(2 + it) = i(2 + it) = -t + 2i$, y así la imagen de $z(t)$ es $w(t) = -t + 2i$. Puesto de otra manera, $w(t) = -t + 2i$, $-\infty < t < \infty$, es una parametrización de la imagen $C'$. Por lo que, $C'$ es la recta $v = 2$. En resumen,

tenemos el siguiente procedimiento para encontrar las imágenes de curvas bajo un mapeo complejo.

### *Imagen de una curva paramétrica bajo un mapeo complejo*

*Si $w = f(z)$ es un mapeo complejo y si C es una curva parametrizada por $z(t)$, $a \leq t \leq b$, entonces*

$$w(t) = f(z(t)), \quad a \leq t < b \tag{11}$$

*es una parametrización de la imagen $C'$ de C bajo $w = f(z)$.*

En algunos casos es conveniente representar un mapeo complejo utilizando una única copia del plano complejo. Hacemos esto sobreponiendo el plano $w$ en la parte superior del plano $z$, por lo que los ejes real e imaginario en cada copia del plano coinciden. Ya que dicha figura simultáneamente representa tanto a los planos $z$ como planos $w$, omitimos todas las etiquetas $x$, $y$, $u$ y $v$ de los ejes. Por ejemplo, si trazamos la gráfica del semiplano $S$ y su imagen $S'$ del ejemplo 1 en la misma copia del plano complejo, entonces vemos que el semiplano $S'$ se puede obtener al girar el semiplano $S$ un ángulo $\pi/2$ radianes en contra de las manecillas del reloj alrededor del origen. Esta observación respecto al mapeo $w = iz$ se comprobará en la sección 2.3. En los siguientes ejemplos, representamos un mapeo complejo utilizando una única copia del plano complejo.

## EJEMPLO 3 Imagen de una curva paramétrica

Utilice (11) para encontrar la imagen del segmento de recta de 1 a $i$ bajo el mapeo complejo $w = \overline{iz}$.

**Solución** Sea $C$ el segmento de recta de 1 a $i$ y sea que $C'$ denote su imagen bajo $f(z) = \overline{iz}$. Identificando $z_0 = 1$ y $z_1 = i$ en (7), obtenemos una parametrización $z(t) = 1 - t + it$, $0 \leq t \leq 1$, de $C$. La imagen $C'$ entonces está dada por (11):

$$w(t) = f(z(t)) = \overline{i(1 - t + it)} = -i(1 - t) - t, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

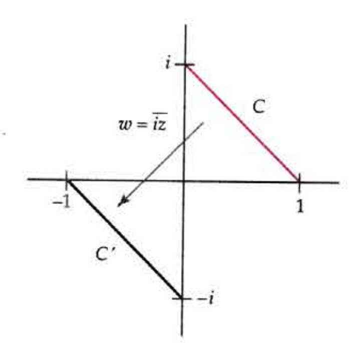


Figura 2.2.5 El mapeo $w = \overline{iz}$.

Con las identificaciones $z_0 = -i$ y $z_1 = -1$ en (7), vemos que $w(t)$ es una parametrización del segmento de recta de $-i$ a $-1$. Por tanto, $C'$ es el segmento de recta de $-i$ a $-1$. Este mapeo está bosquejado en la figura 2.2.5 utilizando una sola copia del plano complejo. En la figura 2.2.5, el segmento de recta que se muestra en color se mapea en el segmento de recta que se muestra en negro con $w = \overline{iz}$. ❑

## EJEMPLO 4 Imagen de una curva paramétrica

Determine la imagen de la semicircunferencia que se muestra en color en la figura 2.2.6 bajo el mapeo complejo $w = z^2$.

**Solución** Sea $C$ la semicircunferencia que se muestra en la figura 2.2.6 y sea que $C'$ denote su imagen bajo $f(z) = z^2$. Procedemos como en el ejemplo 3. Haciendo $z_0 = 0$

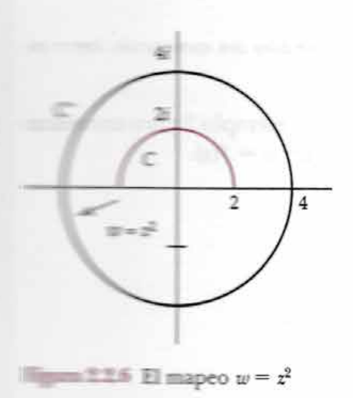



Figura 2.2.6 El mapeo $w = z^2$

y $r = 2$ en (10) obtenemos la siguiente parametrización de $C$:

$$z(t) = 2e^{it}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Por lo que, de (11) tenemos que:

$$w(t) = f(z(t)) = \left(2e^{it}\right)^2 = 4e^{2it}, \quad 0 \leq t \leq \pi, \tag{12}$$

es una parametrización de $C'$. Si hacemos $t = \frac{1}{2}s$ en (12), entonces obtenemos una nueva parametrización de $C'$:

$$W(s) = 4e^{is}, \quad 0 \leq s \leq 2\pi. \tag{13}$$

De (10) con $z_0 = 0$ y $r = 4$, encontramos que (13) define una circunferencia centrada en 0 con radio 4. Por tanto, la imagen $C'$ es la circunferencia $|w| = 4$. Representamos este mapeo en la figura 2.2.6 donde la semicircunferencia que se muestra en color se mapea en la circunferencia que se muestra en negro con $w = z^2$. ❑

**Uso de computadoras** Los sistemas algebraicos computarizados tales como *Maple* y *Mathematica* realizan operaciones algebraicas comunes con números complejos. Esta capacidad combinada con la habilidad para trazar la gráfica de una curva paramétrica hace de estos sistemas excelentes herramientas para explorar las propiedades de los mapeos complejos. En *Mathematica*, por ejemplo, una función compleja se puede definir utilizando la instrucción

**f[z_]** := *una expresión en z.*

Una parametrización compleja se puede definir de manera similar utilizando la instrucción

**g[t_] :=** una expresión en $t$.

De (11), se tiene que **w**[*t*_] := **f[g[t]]** es una parametrización de la imagen de la curva. Esta imagen se puede graficar utilizando la instrucción para trazo paramétrico:

**ParametricPlot[ {Re[w[t]],Im[w[t]]}, {t, a, b}]**

Figura 2.2.7 La imagen de una circunferencia bajo $w = z^2 + iz - \text{Re}(z)$

donde **a** y **b** son las cotas superior e inferior de $t$, respectivamente. Por ejemplo, se usó *Mathematica* para producir la figura 2.2.7, que muestra la imagen de la circunferencia $|z| = 2$ bajo el mapeo complejo $w = z^2 + iz - \text{Re}(z)$.

## Observaciones *Comparación con el análisis real*

(*i*) En esta sección introducimos una importante diferencia entre el análisis real y el complejo, a saber, que no podemos trazar la gráfica de una función compleja. Más bien, representamos una función compleja con dos figuras: la primera es un subconjunto $S$ en el plano complejo, y la segunda, la imagen $S'$ del conjunto $S$ bajo un mapeo complejo. Se obtiene un entendimiento completo de un mapeo complejo cuando entendemos la relación entre cualquier conjunto $S$ y su imagen $S'$.

(*ii*) Los mapeos complejos están estrechamente relacionados con las curvas paramétricas en el plano. En las últimas secciones, usamos esta relación para ayudar a visualizar los conceptos de límite, continuidad y derivabilidad de las funciones complejas. Las curvas paramétricas también serán de suma importancia en el estudio de las integrales complejas tanto como lo fueron en el estudio de las integrales de línea reales.

## EJERCICIOS 2.2 *Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-6.*

En los problemas 1 a 8 proceda como en el ejemplo 1 o el ejemplo 2 para encontrar la imagen $S'$ del conjunto $S$ bajo el mapeo complejo dado $w = f(z)$.

1. $f(z) = i\bar{z}$; $S$ es la recta horizontal $y = 3$
2. $f(z) = \bar{z}$; $S$ es la recta $y = x$
3. $f(z) = 3z$; $S$ es el semiplano $\text{Im}(z) > 2$
4. $f(z) = 3iz$; $S$ es la franja vertical infinita $2 \leq \text{Re}(z) < 3$
5. $f(z) = (1 + i)z$; $S$ es la recta vertical $x = 2$
6. $f(z) = (1 - i)z$; $S$ es la recta $y = 2x + 1$
7. $f(z) = iz + 4$; $S$ es el semiplano $\text{Im}(z) \leq 1$
8. $f(z) = iz + \bar{z}$; $S$ es la recta vertical $x = 3$

En los problemas 9 a 14, determine la imagen de la recta dada bajo el mapeo complejo $w = z^2$.

9. $y = 1$
10. $x = -3$
11. $x = 0$
12. $y = 0$
13. $y = x$
14. $y = -x$

En los problemas 15 a 20, (**a**) trace la gráfica de la curva paramétrica $C$ dada por $z(t)$ y describa la curva con palabras, (**b**) determine una parametrización de la imagen, $C'$, de $C$ bajo el mapeo complejo dado $w = f(z)$, y (**c**) trace la gráfica $C'$ y describa esta curva con palabras.

15. $z(t) = 2(1 - t) + it,\ 0 \leq t \leq 1;\ f(z) = 3z$
16. $z(t) = i(1 - t) + (1 + i)t,\ 0 \leq t < \infty;\ f(z) = -z$
17. $z(t) = 1 + 2e^{it},\ 0 \leq t \leq 2\pi;\ f(z) = z + 1 - i$
18. $z(t) = i + e^{it},\ 0 \leq t \leq \pi;\ f(z) = (z - i)^2$ .
19. $z(t) = t,\ 0 \leq t \leq 2;\ f(z) = e^{i\pi z}$
20. $z(t) = 4e^{it},\ 0 \leq t \leq \pi,\ f(z) = \text{Re}(z)$

En los problemas 21 a 26, utilice parametrizaciones para encontrar la imagen, $C'$, de la curva $C$ bajo el mapeo complejo dado $w = f(z)$.

21. $f(z) = z^3$; $C$ es el eje imaginario positivo
22. $f(z) = iz$; $C$ es la circunferencia $|z - 1| = 2$
23. $f(z) = 1/z$; $C$ es la circunferencia $|z| = 2$
24. $f(z) = 1/z$; $C$ es el segmento de recta de $1 - i$ a $2 - 2i$
25. $f(z) = z + \bar{z}$; $C$ es la semicircunferencia de la circunferencia unitaria $|z| = 1$ en el semiplano superior $\text{Im}(z) \geq 0$
26. $f(z) = e^z$; $C$ es el rayo que sale del origen y que contiene a $2 + \sqrt{3}i$.

### Enfocando los conceptos

27. En este problema encontraremos la imagen de la recta $x = 1$ bajo el mapeo complejo $w = 1/z$.

    (**a**) La recta $x = 1$ consiste de todos los puntos $z = 1 + iy$ donde $-\infty < y < \infty$. Determine las partes real e imaginaria $u$ y $v$ de $f(z) = 1/z$ en un punto $z = 1 + iy$ en esta recta.

(**b**) Demuestre que $\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4}$ para las funciones $u$ y $v$ del inciso (a).

(**c**) Con base en el inciso (b), describa la imagen de la recta $x = 1$ bajo el mapeo complejo $w = 1/z$.

(**d**) ¿Hay un punto en la recta $x = 1$ que se mapee en 0? ¿Quiere modificar su descripción de la imagen del inciso (c)?

**28.** Considere la parametrización $z(t) = i(1 - t) + 3t$, $0 \leq t \leq 1$.

(**a**) Describa con palabras esta curva paramétrica.

(**b**) ¿Cuál es la diferencia entre la curva en el inciso (a) y la curva definida por la parametrización $z(t) = 3(1 - t) + it$, $0 \leq t \leq 1$?

(**c**) ¿Cuál es la diferencia entre la curva en el inciso (a) y la curva definida por la parametrización $z(t) = \frac{3}{2}t + i\left(1 - \frac{1}{2}t\right)$, $0 \leq t \leq 2$?

(**d**) Determine una parametrización del segmento de recta de $1 + 2i$ a $2 + i$ donde el parámetro satisface $0 \leq t \leq 3$.

**29.** Utilice parametrizaciones para encontrar la imagen de la circunferencia $|z - z_0| = R$ bajo el mapeo $f(z) = iz - 2$.

**30.** Considere la recta $y = mx + b$ en el plano complejo.

(**a**) Dé una parametrización $z(t)$ para la recta.

(**b**) Describa con palabras la imagen de la recta bajo el mapeo complejo $w = z + 2 - 3i$.

(**c**) Describa con palabras la imagen de la recta bajo el mapeo complejo $w = 3z$.

**31.** El mapeo complejo $w = \bar{z}$ se llama **reflexión** respecto al eje real. Explique por qué.

**32.** Sea $f(z) = az$ donde $a$ es una constante compleja y $|a| = 1$.

(**a**) Demuestre que $|f(z_1) - f(z_2)| = |z_1 - z_2|$ para todos los números complejos $z_1$ y $z_2$.

(**b**) Dé una interpretación geométrica del resultado del inciso (a).

(**c**) ¿Qué le dice su respuesta al inciso (b) respecto de la imagen de una circunferencia bajo el mapeo complejo $w = az$?

**33.** En este problema investigamos el efecto del mapeo $w = az$, donde $a$ es una constante compleja y $a \neq 0$, en ángulos formados entre los rayos que salen del origen.

(**a**) Sea $C$ un rayo en el plano complejo que sale del origen. Utilice parametrizaciones para demostrar que la imagen $C'$ de $C$ bajo $w = az$ es también un rayo que sale del origen.

(**b**) Considere dos rayos $C_1$ y $C_2$ que salen del origen tal que $C_1$ contiene al punto $z_1 = a_1 + ib_1$ y $C_2$ contiene al punto $z_2 = a_2 + ib_2$. En cálculo de varias variables, vio que el ángulo $\theta$ entre los rayos $C_1$ y $C_2$ (que es igual al ángulo entre los vectores de posición $(a_1, b_1)$ y $(a_2, b_2)$) está dado por:

$$\theta = \arccos\left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}\right) = \arccos\left(\frac{z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2}{2\,|z_1|\,|z_2|}\right). \qquad (14)$$

Sean $C'_1$ y $C'_2$ las imágenes de $C_1$ y $C_2$ bajo $w = az$. Utilice los incisos (a) y (14) para demostrar que el ángulo entre $C'_1$ y $C'_2$ es igual que el ángulo entre $C_1$ y $C_2$.

**34.** Considere el mapeo complejo $w = z^2$.

(**a**) Repita el problema 33(a) para el mapeo $w = z^2$.

(**b**) Experimente con diferentes rayos. ¿Qué efecto hace el mapeo complejo $w = z^2$ que parezca que hay ángulos entre los rayos que salen del origen?

## Tareas del laboratorio de cómputo

En los problemas 35 al 38, utilice un SAC para (a) para trazar la imagen de la circunferencia unitaria bajo el mapeo complejo dado $w = f(z)$, y (b) trace la imagen del segmento de recta de 1 a $1 + i$ bajo el mapeo complejo dado $w = f(z)$.

**35.** $f(z) = z^2 + (1 + i)z - 3$

**36.** $f(z) = iz^3 + z - i$

**37.** $f(z) = z^4 - z$

**38.** $f(z) = z^3 - \bar{z}$

# 2.3 Mapeos lineales

Recuerde que una función real de la forma $f(x) = ax + b$ donde $a$ y $b$ son cualesquiera constantes reales se llama función lineal. De acuerdo con las similitudes entre el análisis real y complejo, definimos **función lineal compleja** como una función de la forma $f(z) = az + b$ donde $a$ y $b$ son constantes complejas cualesquiera. Al igual que con las funciones lineales reales, que son los tipos de funciones reales más fáciles de graficar, las funciones lineales complejas son los tipos más fáciles de funciones complejas para visualizar como mapeos del plano complejo. En esta sección, mostraremos que cada mapeo lineal complejo no constante se puede describir como una composición de tres tipos básicos de movimientos: una traslación, una rotación y una ampliación, respectivamente.

Antes de ver en lo general el mapeo lineal complejo $f(z) = az + b$, investigaremos tres tipos de mapeos lineales, llamados traslación, rotación y amplificación. A lo largo de esta sección usaremos los símbolos $T$, $R$ y $M$ para representar mapeos por traslación, rotación y amplificación respectivamente.

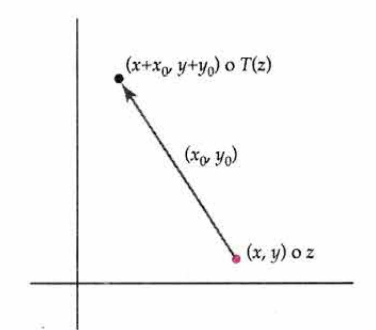


Figura 2.3.1 Traslación

**Traslaciones** Una función lineal compleja

$$T(z) = z + b, \quad b \neq 0, \tag{1}$$

se llama **traslación**. Si hacemos $z = x + iy$ y $b = x_0 + iy_0$ en (1) entonces obtenemos:

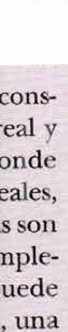
$$T(z) = (x + iy) + (x_0 + iy_0) = x + x_0 + i(y + y_0).$$

Por lo que la imagen del punto $(x, y)$ bajo $T$ es el punto $(x + x_0, y + y_0)$. De la figura 2.3.1 vemos que si trazamos $(x, y)$ y $(x + x_0, y + y_0)$ en la misma copia del plano complejo, entonces el vector cuyo origen es $(x, y)$ y terminación en $(x + x_0, y + y_0)$ es $(x_0, y_0)$, equivalentemente, si trazamos la gráfica de $z$ y de $T(z)$ en la misma copia del plano complejo, entonces el vector cuyo origen es $z$ y terminación en $T(z)$ es $(x_0, y_0)$. Por tanto, el mapeo lineal $T(z) = z + b$ se puede visualizar en una sola copia del plano complejo como el proceso de trasladar el punto $z$ a lo largo del vector $(x_0, y_0)$ al punto $T(z)$. Ya que $(x_0, y_0)$ es la representación vectorial del número complejo $b$, el mapeo $T(z) = z + b$ es también llamado *traslación por b.*

### EJEMPLO 1 Imagen de un cuadrado bajo traslación

Encuentre la imagen $S'$ del cuadrado $S$ con vértices en $1 + i$, $2 + i$, $2 + 2i$, y $1 + 2i$ bajo el mapeo lineal $T(z) = z + 2 - i$.

**Solución** Representaremos a $S$ y a $S'$ en la misma copia del plano complejo. El mapeo $T$ es una traslación, y así $S'$ se puede determinar como se muestra a continuación.



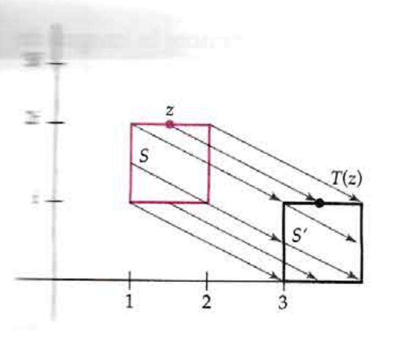


Figura 2.3.2 Imagen de un cuadrado bajo traslación

Identificando $b = 2 + i(-1)$ en (1), dibujamos al vector $(2, -1)$ cuyo origen es cada punto de $S$. Vea la figura 2.3.2. El conjunto de puntos terminales de estos vectores es $S'$, la imagen de $S$ bajo $T$. Examinando la figura 2.3.2 vemos que $S'$ es un cuadrado con vértices en:

$$T(1 + i) = (1 + i) + (2 - i) = 3 \qquad T(2 + i) = (2 + i) + (2 - i) = 4$$

$$T(2 + 2i) = (2 + 2i) + (2 - i) = 4 + i \qquad T(1 + 2i) = (1 + 2i) + (2 - i) = 3 + i.$$

Por tanto, el cuadrado $S$ que se muestra en color en la figura 2.3.2 se mapea en el cuadrado $S'$ que se muestra en negro por la traslación $T(z) = z + 2 - i$. ❑

De nuestra descripción geométrica, vemos que una traslación no cambia la forma o tamaño de una figura en el plano complejo. Es decir, la imagen de una recta, circunferencia o triángulo bajo una traslación también será una recta, circunferencia o triángulo, respectivamente. Vea los problemas 23 y 24 en los ejercicios 2.3. Un mapeo con esta propiedad a veces es llamado *movimiento rígido*.

## Rotaciones

Una función lineal compleja

$$R(z) = az, \quad |a| = 1, \tag{2}$$

se llama **rotación**. Aunque puede parecer que el requisito $|a| = 1$ es una restricción importante en (2), no lo es. Considere que la constante $a$ en (2) es una constante compleja. Si $\alpha$ es cualquier número complejo diferente de cero, entonces $a = \alpha/|\alpha|$ es un número complejo para el que $|a| = 1$. Por lo que, para cualquier número complejo $\alpha$ diferente de cero, tenemos que $R(z) = \dfrac{\alpha}{|\alpha|}z$ es una rotación.

Considere la rotación $R$ dada por (2) y, por el momento, suponga que $\operatorname{Arg}(a) > 0$. Ya que $|a| = 1$ y $\operatorname{Arg}(a) > 0$, podemos escribir $a$ en forma exponencial como $a = e^{i\theta}$ con $0 < \theta \leq \pi$. Si hacemos $a = e^{i\theta}$ y $z = re^{i\phi}$ en (2), entonces por la propiedad (6) de la sección 2.1 obtenemos la siguiente descripción de $R$:

$$R(z) = e^{i\theta}\, re^{i\phi} = re^{i(\theta+\phi)}. \tag{3}$$

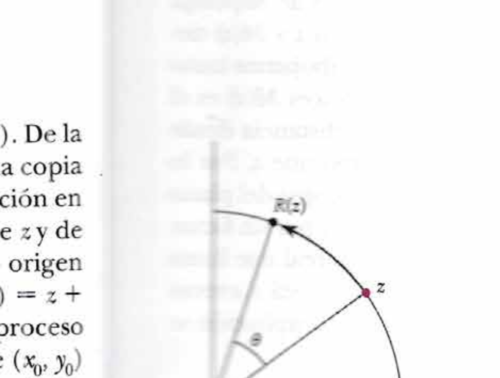


Figura 2.3.3 Rotación

De (3), vemos que el módulo de $R(z)$ es $r$, que es el mismo que el módulo de $z$. Por tanto, si $z$ y $R(z)$ se dibujan en la misma copia del plano complejo, entonces ambos puntos se encuentran en una circunferencia centrada en 0 con radio $r$. Vea la figura 2.3.3. Observe también de (3) que un argumento de $R(z)$ es $\theta + \phi$, que es $\theta$ radianes mayor que un argumento de $z$. Por tanto, el mapeo lineal $R(z) = az$ se puede visualizar en una sola copia del plano complejo como el proceso de rotación del punto $z$ en contra del sentido de las manecillas del reloj a través de un ángulo de $\theta$ radianes alrededor del origen al punto $R(z)$. Vea la figura 2.3.3. En una forma similar, si $\operatorname{Arg}(a) < 0$, entonces el mapeo lineal $R(z) = az$ se puede visualizar en una sola copia del plano complejo como el proceso de girar puntos en el *sentido de las manecillas del reloj* a través de un ángulo de $\theta$ radianes alrededor del origen. Por esta razón al ángulo $\theta = \operatorname{Arg}(a)$ se le llama **ángulo de rotación** de $R$.

---

**EJEMPLO 2 Imagen de una recta bajo rotación**

Encuentre la imagen del eje real $y = 0$ bajo el mapeo lineal

$$R(z) = \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}i\right)z.$$

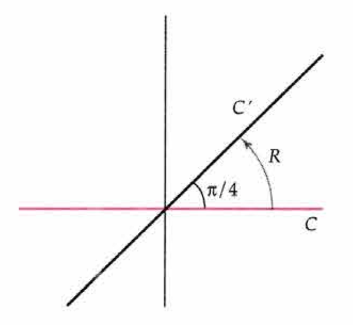


Figura 2.3.4 Imagen de una recta bajo rotación

**Solución** Sea que $C$ denote el eje real $y = 0$ y sea que $C'$ denote la imagen de $C$ bajo $R$. Ya que $\left|\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,i\right| = 1$, el mapeo complejo $R(z)$ es una rotación. Con la finalidad de determinar el ángulo de rotación, escribimos el número complejo $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,i$ en forma exponencial $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,i = e^{i\pi/4}$. Si $z$ y $R(z)$ se dibujan en la misma copia del plano complejo, entonces el punto $z$ se gira en contra de las manecillas del reloj $\pi/4$ radianes alrededor del origen al punto $R(z)$. La imagen $C'$ es, por tanto, la recta $v = u$, que contiene al origen y hace un ángulo de $\pi/4$ radianes con el eje real. Este mapeo está dibujado en una sola copia del plano complejo en la figura 2.3.4 donde el eje real que se muestra en color se mapea en la recta que se muestra en negro por $R(z) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i\right) z$. ❑

Como con las traslaciones, las rotaciones son movimientos rígidos y no cambiarán la forma o tamaño de una figura en el plano complejo. Por lo que, la imagen de una recta, circunferencia o triángulo bajo una rotación también será una recta, circunferencia o triángulo, respectivamente.

**Ampliaciones** El último tipo de función lineal especial que consideramos es una ampliación. Una función lineal compleja

$$M(z) = az,\ a > 0, \tag{4}$$

se llama **ampliación**. Recuerde de las Observaciones del final de la sección 1.1 que puesto que no existe el concepto de orden en el sistema de números complejos, está implícito en la desigualdad $a > 0$ que el símbolo $a$ representa un número real. Por tanto, si $z = x + iy$, entonces $M(z) = az = ax + iay$, y así la imagen del punto $(x, y)$ es el punto $(ax, ay)$. Utilizando la forma exponencial $z = re^{i\theta}$ de $z$, podemos también expresar la función en (4) como:

$$M(z) = a(re^{i\theta}) = (ar)e^{i\theta}. \tag{5}$$

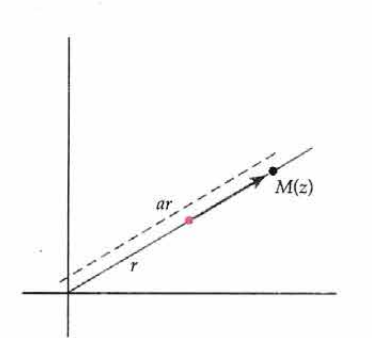


Figura 2.3.3 Ampliación

El producto $ar$ en (5) es un número real positivo ya que tanto $a$ como $r$ son números reales positivos, y de aquí que la magnitud de $M(z)$ es $ar$. Suponga que $a > 1$. Entonces de (5) tenemos que los puntos complejos $z$ y $M(z)$ tienen el mismo argumento $\theta$ pero diferente módulo $r < ar$. Si dibujamos tanto a $z$ como a $M(z)$ en la misma copia del plano complejo, entonces $M(z)$ es el único punto en el rayo que sale de 0 y que contiene a $z$ cuya distancia desde 0 es $ar$. Ya que $a > 1$, $M(z)$ está a $a$ veces más lejos del origen que $z$. Por lo que, el mapeo lineal $M(z) = az$ se puede visualizar en una sola copia del plano complejo como el proceso de *ampliación* del módulo del punto $z$ por un factor de $a$ para obtener el punto $M(z)$. Vea la figura 2.3.5. El número real $a$ se llama **factor de ampliación** de $M$. Si $0 < a < 1$, entonces el punto $M(z)$ está a $a$ veces más cerca del origen que el punto $z$. Este caso especial de una ampliación se llama **contracción**.

**EJEMPLO 3 Imagen de una circunferencia bajo ampliación**

Encuentre la imagen de la circunferencia $C$ dada por $|z| = 2$ bajo el mapeo lineal $M(z) = 3z$.

**Solución** Ya que $M$ es una ampliación con factor de ampliación de 3, cada punto en la circunferencia $|z| = 2$ se mapeará en un punto con el mismo argumento pero con módulo ampliado por 3. Por lo que cada punto en la imagen tendrá un módulo $3 \cdot 2 = 6$. Los puntos imagen pueden tener cualquier argumento ya que los puntos $z$ en la circunferencia $|z| = 2$ pueden tener

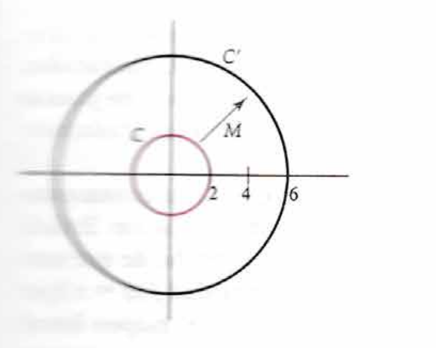



**Figura 2.3.6** Imagen de una circunferencia bajo ampliación

cualquier argumento. Por tanto, la imagen $C'$ es la circunferencia $|w| = 6$ centrada en el origen y tiene radio 6. En la figura 2.3.6 ilustramos este mapeo en una sola copia del plano complejo. Bajo el mapeo $M(z) = 3z$, la circunferencia $C$ que se muestra en color en la figura 2.3.6 se mapea en la circunferencia $C'$ que se muestra en negro en la figura 2.3.6. ❑

Aunque un mapeo de ampliación cambiara el tamaño de una figura en el plano complejo, éste no cambiará su forma básica. Por ejemplo, la imagen de un triángulo $S$ bajo una ampliación $M(z) = az$ es también un triángulo $S'$. Ya que las longitudes de los lados de $S'$ son todas a veces mayores que las longitudes de los lados $S$, se tiene que $S$ y $S'$ son triángulos semejantes.

**Mapeos lineales** Estamos ahora listos para mostrar que un mapeo lineal general $f(z) = az + b$ es una composición de una rotación, una ampliación y una traslación. Recuerde que si $f$ y $g$ son dos funciones, entonces la composición de $f$ y $g$ es la función $f$ (o $g$ definida por $f \circ g(z) = f(g(z))$. El valor $w = f \circ g(z)$ se determina evaluando primero la función $g$ en $z$, y después evaluando la función $f$ en $g(z)$. En una forma similar, la imagen, $S''$, de un conjunto $S$ bajo una composición $w = f \circ g(z)$ se determina primero encontrando la imagen, $S'$, de $S$ bajo $g$, y después encontrando la imagen $S''$ de $S'$ bajo $f$.

Ahora suponga que $f(z) = az + b$ es una función lineal compleja. Suponemos que $a \neq 0$; por otra parte, nuestro mapeo sería el **mapeo constante** $f(z) = b$, que mapea cada punto en el plano complejo en el único punto $b$. Observe que podemos expresar a $f$ como:

$$f(z) = az + b = |a|\left(\frac{a}{|a|}z\right) + b. \tag{6}$$

Ahora, paso por paso, investigamos qué pasa en un punto $z_0$ bajo la composición en (6). Primero se multiplica a $z_0$ por el número complejo $a/|a|$. Ya que $\left|\frac{a}{|a|}\right| = \frac{|a|}{|a|} = 1$, el mapeo complejo $w = \frac{a}{|a|}z$ es una rotación que gira al punto $z_0$ un ángulo de $\theta = \text{Arg}\left(\frac{a}{|a|}\right)$ radianes alrededor del origen. El ángulo de rotación también se puede escribir como $\theta = \text{Arg}(a)$ ya que $1/|a|$ es un número real. Sea $z_1$ la imagen de $z_0$ bajo esta rotación por $\text{Arg}(a)$. El paso siguiente en (6) es multiplicar $z_1$ por $|a|$. Ya que $|a| > 0$ es un número real, el mapeo complejo $w = |a|z$ es una ampliación con un factor de ampliación $|a|$. Ahora sea $z_2$ la imagen de $z_1$ bajo la ampliación por $|a|$. El último paso en nuestro mapeo lineal en (6) es sumar $b$ a $z_2$. El mapeo complejo $w = z + b$ traslada a $z_2$ por $b$ en el punto $w_0 = f(z_0)$. Ahora resumimos esta descripción de un mapeo lineal.

### *Imagen de un punto bajo un mapeo lineal*

*Sea $f(z) = az + b$ un mapeo lineal con $a \neq 0$ y sea $z_0$ un punto en el plano complejo. Si el punto $w_0 = f(z_0)$ se dibuja en la misma copia del plano complejo como $z_0$, entonces $w_0$ es el punto obtenido*

(*i*) *girando $z_0$ un ángulo $\text{Arg}(a)$ alrededor del origen,*

(*ii*) *ampliando el resultado por $|a|$, y*

(*iii*) *trasladando el resultado por $b$.*

Esta descripción de la imagen de un punto $z_0$ bajo un mapeo lineal también describe la imagen de cualquier conjunto de puntos $S$. En particular, la imagen, $S'$, de un conjunto $S$ bajo $f(z) = az + b$ es el conjunto de puntos obtenido al girar $S$ a través de $\text{Arg}(a)$, ampliado por $|a|$, y después trasladado por $b$.

De (6) vemos que cada mapeo lineal complejo no constante es una composición de *a lo sumo* una rotación, una ampliación y una traslación. Enfatizamos la frase "a lo sumo" con la finalidad de subrayar el hecho de que uno o más de los mapeos implicados puede ser el **mapeo identidad** $f(z) = z$ (que mapea cada número complejo en sí mismo). Por ejemplo, el mapeo lineal $f(z) = 3z + i$ implica una ampliación por 3 y una traslación por $i$, pero no una rotación. También es evidente de (6) que si $a \neq 0$ es un número complejo, $R(z)$ es una rotación a través de $\text{Arg}(a)$, $M(z)$ es una ampliación por $|a|$, y $T(z)$ es una traslación por $b$, entonces la composición $f(z) = T \circ M \circ R(z) = T(M(R(z)))$ es una función lineal compleja. Además, ya que la composición de cualquier número finito de funciones lineales es de nuevo una función lineal, se tiene que la composición de muchas rotaciones finitas, ampliaciones y traslaciones es un mapeo lineal.

Hemos visto que todas las traslaciones, rotaciones y ampliaciones conservan la forma básica de una figura en el plano complejo. Un mapeo lineal, por tanto, también conservará la forma básica de una figura en el plano complejo. Esta observación es una propiedad importante de los mapeos lineales complejos que merece que se repita.

*Un mapeo lineal complejo $w = az + b$ con $a \neq 0$ puede distorsionar el tamaño de una figura en el plano complejo, pero esto no puede alterar la forma básica de la figura.*

*Nota:* ¡Es importante el orden con el que realizan los pasos en un mapeo lineal!

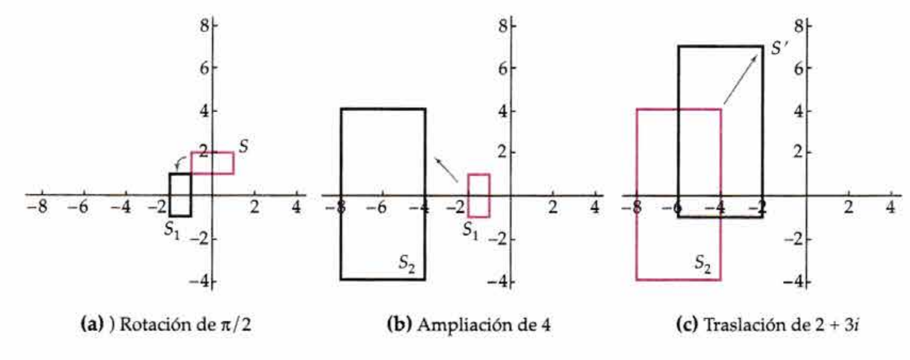
Cuando se describe una función lineal como una composición de una rotación, una ampliación y una traslación, considere que el orden de composición es importante. Con la finalidad de ver que esto es así, considere el mapeo $f(z) = 2z + i$, que amplía en 2, después traslada por $i$; así, 0 se mapea en $i$ bajo $f$. Si invertimos el orden de la composición, es decir, si trasladamos por $i$, y después se amplía por 2, el efecto es 0 mapeado en $2i$. Por tanto, el invertir el orden de la composición puede dar como resultado un mapeo diferente. En algunos casos especiales, sin embargo, cambiando el orden de la composición no cambia el mapeo. Vea los problemas 27 y 28 en los ejercicios 2.3.

Un mapeo lineal complejo siempre se puede representar como una composición en más de una forma. El mapeo complejo $f(z) = 2z + i$, por ejemplo, también se puede expresar como $f(z) = 2(z + i/2)$. Por tanto, la ampliación por 2 seguida de una traslación por $i$ es el mismo mapeo que una traslación de $i/2$ seguida por una ampliación de 2.

### EJEMPLO 4 Imagen de un rectángulo bajo un mapeo lineal

Encuentre la imagen del rectángulo con vértices $-1 + i$, $1 + i$, $1 + 2i$ y $-1 + 2i$ bajo el mapeo lineal $f(z) = 4iz + 2 + 3i$.

**Solución** Sea $S$ el rectángulo con los vértices dados y sea $S'$ la imagen de $S$ bajo $f$. Ya que $f$ es un mapeo lineal, nuestro análisis anterior implica que $S'$ tiene la misma forma que $S$. Es decir, $S'$ es también un rectángulo. Por lo que,




**(a)** ) Rotación de $\pi/2$ **(b)** Ampliación de 4 **(c)** Traslación de $2 + 3i$

Figura 2.3.7 Mapeo lineal de un rectángulo

para determinar $S'$, necesitamos encontrar sólo sus vértices, que son las imágenes de los vértices de $S$ bajo $f$:

$$f(-1 + i) = -2 - i \qquad f(1 + i) = -2 + 7i$$
$$f(1 + 2i) = -6 + 7i \qquad f(-1 + 2i) = -6 - i$$

Por tanto, $S'$ es el rectángulo con vértices $-2 - i$, $-2 + 7i$, $-6 + 7i$ y $-6 - i$. ❑

El mapeo lineal $f(z) = 4iz + 2 + 3i$ en el ejemplo 4 se puede también ver como una composición de una rotación, una ampliación y una traslación. Ya que $\text{Arg}(4i) = \pi/2$ y $|4i| = 4$, $f$ actúa girando un ángulo de $\pi/2$ radianes alrededor del origen, ampliando por 4, después trasladando por $2 + 3i$. Esta secuencia de mapeos está dibujada en la figura 2.3.7. En la figura 2.3.7(a), el rectángulo $S$ que se muestra en color se gira un ángulo $\pi/2$ en el rectángulo $S_1$ que se muestra en negro; en la figura 2.3.7(b), el rectángulo $S_1$ que se muestra en color se amplía por 4 en el rectángulo $S_2$ que se muestra en negro; y por último, en la figura 2.3.7(c), el rectángulo $S_2$ que se muestra en color se traslada por $2 + 3i$ en el rectángulo $S'$ que se muestra en negro.

## EJEMPLO 5 Mapeo lineal de un triángulo

Determine una función lineal compleja que mapea el triángulo equilátero con vértices $1 + i$, $2 + i$, y $\frac{3}{2} + \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)i$ en el triángulo equilátero con vértices $i$, $\sqrt{3} + 2i$ y $3i$.

**Solución** Sea que $S_1$ denote el triángulo con vértices $1 + i$, $2 + i$ y $\frac{3}{2} + \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)i$ que se muestra a color en la figura 2.3.8(a), y sea $S'$ el triángulo con vértices $i$, $3i$, y $\sqrt{3} + 2i$ que se muestra en negro en la figura 2.3.8(d). Hay muchas maneras de encontrar un mapeo lineal que mapee $S_1$ en $S'$. Un método es el siguiente: Primero trasladamos a $S_1$ para tener uno de sus vértices en el origen. Si decidimos que el vértice $1 + i$ se debe mapear en 0, entonces esto se logra con la traslación $T_1(z) = z - (1 + i)$. Sea $S_2$ la imagen de $S_1$ bajo $T_1$. Entonces $S_2$ es el triángulo con vértices 0, 1, y $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ que se muestra en negro en la figura 2.3.8(a). De la figura 2.3.8(a), vemos que el ángulo entre el eje imaginario y el lado de $S_2$ que contiene a los vértices 0 y $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ es $\pi/6$. Por lo que, una rotación de un ángulo de $\pi/6$ radianes en sentido contrario de las manecillas del reloj alrededor del origen mapea a $S_2$ en un triángulo con dos vértices en el eje imaginario. Este giro está dado por $R(z) = \left(e^{i\pi/6}\right)z = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i\right)z$, y la imagen de $S_2$ bajo $R$ es el triángulo $S_3$ con vértices en 0, $\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$, e $i$ que se muestra en negro

en la figura 2.3.8(b). Es fácil comprobar que cada lado del triángulo $S_3$ mide 1. Ya que cada lado del triángulo $S'$ deseado mide 2, enseguida ampliamos $S_3$ en un factor de 2. La ampliación $M(z) = 2z$ mapea el triángulo $S_3$ que se muestra en color en la figura 2.3.8(c) en el triángulo $S_4$ con vértices 0, $\sqrt{3} + i$ y $2i$ que se muestra en negro en la figura 2.3.8(c). Por último, trasladamos $S_4$ por $i$ utilizando el mapeo $T_2(z) = z + i$. Esta traslación mapea el triángulo $S_4$ que se muestra en color en la figura 2.3.8(d) en el triángulo $S'$ con vértices $i$, $\sqrt{3} + 2i$ y $3i$ que se muestra en negro en la figura 2.3.8(d).

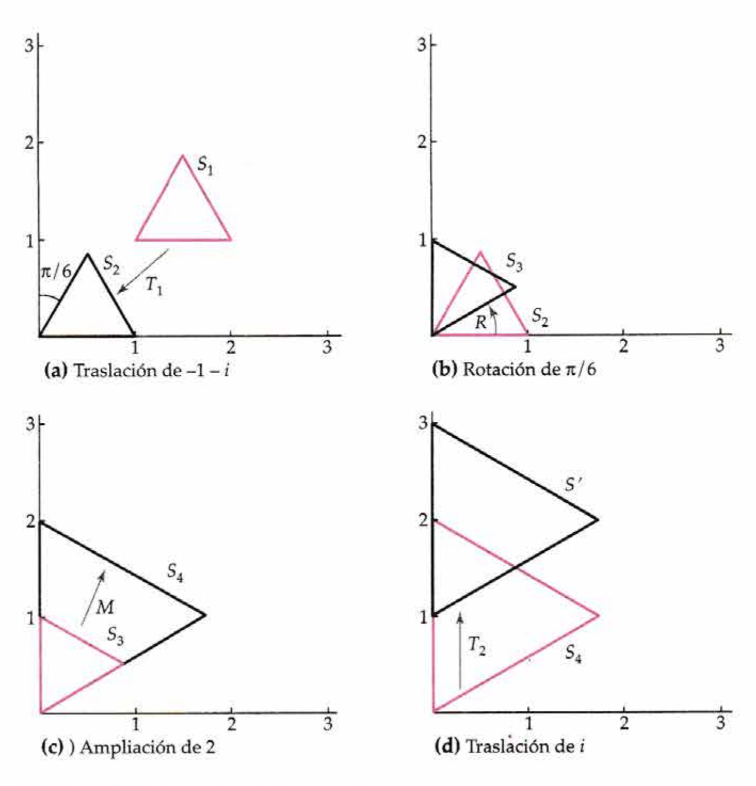



Figura 2.3.8 Mapeo lineal de un triángulo

En conclusión, hemos encontrado que el mapeo lineal:

$$f(z) = T_2 \circ M \circ R \circ T_1(z) = \left(\sqrt{3} + i\right) z + 1 - \sqrt{3} + \sqrt{3}\, i$$

mapea al triángulo $S_1$ en el triángulo $S'$. ❑

## Observaciones *Comparación con el análisis real*

El estudio del cálculo diferencial se basa en el principio de que las funciones reales son los tipos de funciones que son más fáciles de entender (ya sea que se trate de un punto de vista algebraico, numérico o gráfico). Uno de los muchos usos de la derivada de una función real $f$ es encontrar una función lineal que aproxime a $f$ en una vecindad de un punto $x_0$. En particular, recuerde que la aproximación lineal de una función derivable $f(x)$ en $x = x_0$ es la función lineal $l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Geométricamente, la gráfica de la aproximación lineal es la recta tangente a la gráfica $f$ en el punto $(x_0, f(x_0))$. Aunque hay una interpretación geométrica análoga para las funciones complejas, la fórmula de la

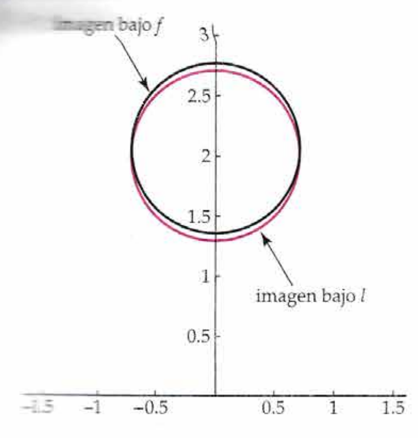



Figura 2.3.9 Aproximación lineal de $w = z^2$

aproximación lineal se puede aplicar a las funciones complejas una vez que se da una definición apropiada de la derivada. Es decir, si $f'(z_0)$ representa la derivada de la función compleja $f(z)$ en $z_0$ (ésta se definirá en la sección 3.1), entonces la **aproximación lineal** de $f$ en una vecindad de $z_0$ es la función lineal compleja $l(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$. Geométricamente $l(z)$ aproxima a $f(z)$ actuando como un mapeo complejo cerca del punto $z_0$. Por ejemplo, veremos en el capítulo 3 que la derivada de la función compleja $f(z) = z^2$ es $f'(z) = 2z$. Por tanto, la aproximación lineal de $f(z) = z^2$ en $z_0 = 1 + i$ es $l(z) = 2i + 2(1+i)(z-1-i) = 2\sqrt{2}\,(e^{i\pi/4}z) - 2i$. Cerca del punto $z = 1 + i$ el mapeo $w = z^2$ se puede aproximar con el mapeo lineal que consiste de la composición de la rotación de un ángulo de $\pi/4$, la ampliación por $2\sqrt{2}$ y la traslación de $-2i$. En la figura 2.3.9, la imagen de la circunferencia $|z - (1 + i)| = 0.25$ bajo $f$ se muestra en negro y la imagen de esta circunferencia bajo $l$ se muestra a color. En la figura 2.3.9 se indica que para la circunferencia $|z - (1 + i)| = 0.25$, el mapeo lineal $l$ da una aproximación precisa del mapeo complejo $f$.

## EJERCICIOS 2.3

*Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-7.*

En los problemas 1 a 6 (**a**) encuentre la imagen del disco cerrado $|z| \leq 1$ bajo el mapeo lineal dado $w = f(z)$ y (**b**) represente el mapeo lineal con una secuencia de gráficas como en la figura 2.3.7.

**1.** $f(z) = z + 3i$

**2.** $f(z) = z + 2 - i$

**3.** $f(z) = 3iz$

**4.** $f(z) = (1 + i)z$

**5.** $f(z) = 2z - i$

**6.** $f(z) = (6 - 5i)z + 1 - 3i$

En los problemas 7 a 12 (**a**) determine la imagen del triángulo con vértices 0, 1 e $i$ bajo el mapeo lineal dado $w = f(z)$ y (**b**) represente el mapeo lineal con una secuencia de gráficas como se muestra en la figura 2.3.7.

**7.** $f(z) = z + 2i$

**8.** $f(z) = 3z$

**9.** $f(z) = e^{i\pi/4}z$

**10.** $f(z) = \frac{1}{2}iz$

**11.** $f(z) = -3z + i$

**12.** $f(z) = (1 - i)z - 2$

En los problemas 13 a 16, exprese el mapeo lineal dado $w = f(z)$ como una composición de una rotación, una ampliación, y una traslación como en (6). Después describa con palabras la acción del mapeo lineal.

**13.** $f(z) = 3iz + 4$

**14.** $f(z) = 5\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{5}\right)z + 7i$

**15.** $f(z) = -\frac{1}{2}z + 1 - \sqrt{3}i$

**16.** $f(z) = (3 - 2i)z + 12$

En los problemas 17 a 20 determine un mapeo lineal que mapea el conjunto $S$ en el conjunto $S'$. (Nota: puede haber más de un mapeo lineal que funcione).

**17.** $S$ es el triángulo con vértices 0, 1 y $1 + i$. $S'$ es el triángulo con vértices $2i$, $3i$ y $-1 + 3i$.

**18.** $S$ es la circunferencia $|z - 1| = 3$. $S'$ es la circunferencia $|w + i| = 5$.

**19.** $S$ es el eje imaginario. $S'$ es la recta que pasa por los puntos $i$ y $1 + 2i$.

**20.** $S$ es el cuadrado con vértices $1 + i$, $-1 + i$, $-1 - i$ y $1 - i$. $S'$ es el cuadrado con vértices 1, $2 + i$, $1 + 2i$ e $i$.

**21.** Determine dos diferentes mapeos lineales que mapeen el cuadrado con vértices 0, 1, $1 + i$ e $i$, en el cuadrado con vértices $-1$, 0, $i$, $-1 + i$.

**22.** Determine dos diferentes mapeos lineales que mapeen el semiplano $\text{Re}(z) \geq 2$ en el semiplano $\text{Re}(w) \geq 5$.

**23.** Considere el segmento de recta parametrizado por $z(t) = z_0(1 - t) + z_1 t$, $0 \leq t \leq 1$.

(**a**) Determine una parametrización de la imagen del segmento de recta bajo la traslación $T(z) = z + b$, $b \neq 0$. Describa la imagen con palabras.

(**b**) Encuentre una parametrización de la imagen del segmento de recta bajo la rotación $R(z) = az$, $|a| = 1$. Describa con palabras la imagen.

(**c**) Determine una parametrización de la imagen del segmento de recta bajo la ampliación $M(z) = az$, $a > 0$. Describa la imagen con palabras.

**24.** Repita el problema 23 para la circunferencia parametrizada por $z(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

**25.** En los incisos (a) al (c), exprese la composición de mapeos dada como un mapeo lineal $f(z) = az + b$.

(**a**) rotación de $\pi/4$, ampliación por 2 y traslación por $1 + i$

(**b**) ampliación por 2, traslación por $\sqrt{2}$ y rotación de $\pi/4$

(**c**) traslación por $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, rotación de $\pi/4$, después ampliación por 2

(**d**) ¿Qué nota de los mapeos lineales en los incisos (a) al (c)?

**26.** Considere el mapeo lineal complejo $f(z) = \left(1 + \sqrt{3}i\right) z + i$. En cada inciso, determine la traslación $T$, rotación $R$ y ampliación $M$ que satisfacen la ecuación dada y después describa el mapeo $f$ con palabras utilizando $T$, $R$ y $M$.

(**a**) $f(z) = T \circ M \circ R(z)$

(**b**) $f(z) = M \circ T \circ R(z)$

(**c**) $f(z) = R \circ M \circ T(z)$

## Enfocando los conceptos

**27.** (**a**) Pruebe que la composición de dos traslaciones $T_1(z) = z + b_1$, $b_1 \neq 0$ y $T_2(z) = z + b_2$, $b_2 \neq 0$, es una traslación o es el mapeo identidad. ¿Importa el orden de la composición?

(**b**) Demuestre que la composición de dos rotaciones $R_1(z) = a_1 z$, $|a_1| = 1$, y $R_2(z) = a_2 z$, $|a_2| = 1$, es un rotación o es el mapeo identidad. ¿Importa el orden de la composición?

(**c**) Pruebe que la composición de dos ampliaciones $M_1(z) = a_1 z$, $a_1 > 0$, y $M_2(z) = a_2 z$, $a_2 > 0$, es una ampliación o es el mapeo identidad. ¿Importa el orden de la composición?

**28.** Decimos que dos mapeos $f$ y $g$ conmutan si $f \circ g(z) = g \circ f(z)$ para toda $z$. Es decir, dos mapeos conmutan si el orden con el que componen no cambia el mapeo.

(**a**) ¿Pueden conmutar una traslación y una rotación distinta de la identidad?

(**b**) ¿Pueden conmutar una traslación y una ampliación distinta de la identidad?

(**c**) ¿Pueden conmutar una rotación distinta de la identidad y una ampliación distinta de la identidad?

**29.** Recuerde del problema 31 de los ejercicios 2.2 que el mapeo $f(z) = \bar{z}$ se llama **reflexión** alrededor del eje real. Utilizando el mapeo $f(z) = \bar{z}$ y cualquier mapeo lineal, determine un mapeo $g$ que refleje alrededor del eje imaginario. Es decir, exprese el mapeo $g(x + iy) = -x + iy$ en términos de constantes complejas y el símbolo $\bar{z}$.

**30.** Describa cómo obtener la imagen $w_0 = f(z_0)$ de un punto $z_0$ bajo el mapeo $f(z) = a\bar{z} + b$ en términos de traslación, rotación, ampliación y reflexión.

**31.** ¿Qué puede decir respecto de un mapeo lineal $f$ si sabe que $|z| = |f(z)|$ para todo número complejo $z$?

**32.** ¿Qué puede decir respecto de un mapeo lineal $f$ si sabe que $|z_2 - z_1| = |f(z_2) - f(z_1)|$ para todos los números complejos $z_1$ y $z_2$?

**33.** Un **punto fijo** de un mapeo $f$ es un punto $z_0$ con la propiedad $f(z_0) = z_0$.

(**a**) ¿El mapeo lineal $f(z) = az + b$ tiene un punto fijo $z_0$? Si es así, entonces determine $z_0$ en términos de $a$ y $b$.

(**b**) Dé un ejemplo de a mapeo lineal complejo que no tenga puntos fijos.

(**c**) Dé un ejemplo de un mapeo lineal complejo que tenga más de un punto fijo. [*Sugerencia*: Hay sólo uno de tales mapeos.]

(**d**) Demuestre que si $z_0$ es un punto fijo del mapeo lineal complejo $f$ y si $f$ conmuta con el mapeo lineal complejo $g$ (vea el problema 28), entonces $z_0$ es un punto fijo de $g$.

**34.** Suponga que el conjunto $S$ se mapea en el conjunto $S'$ con el mapeo complejo $w = f(z)$. Si $S = S'$ como subconjuntos de una sola copia del plano complejo, entonces se dice que $S$ es **invariante** bajo $f$. Observe que no es necesario que $f(z) = z$ para toda $z$ en $S$ para que $S$ sea invariante bajo $f$.

(**a**) Explique por qué el disco cerrado $|z| \leq 2$ es invariante bajo la rotación $R(z) = az$, $|a| = 1$.

(**b**) ¿Cuáles son los conjuntos invariantes bajo una traslación $T(z) = z + b$, $b \neq 0$?

(**c**) ¿Cuáles son los conjuntos invariantes bajo una ampliación $M(z) = az$, $a > 0$?

**35.** En este problema se muestra que un mapeo lineal está determinado únicamente por las imágenes de dos puntos.

(**a**) Sea $f(z) = az + b$ una función lineal compleja con $a \neq 0$ y suponga que $f(z_1) = w_1$ y $f(z_2) = w_2$. Determine dos fórmulas que expresen a $a$ y $b$ en términos de $z_1$, $z_2$, $w_1$ y $w_2$. Explique por qué estas fórmulas implican que el mapeo lineal $f$ esta únicamente determinado por las imágenes de dos puntos.

(**b**) Muestre que una función lineal no está únicamente determinada por la imagen de un punto. Es decir, determine dos diferentes funciones lineales $f_1$ y $f_2$ que concuerden en un punto.

**36.** Determine una función lineal compleja $f(z) = az + b$ que gire el punto $z$ en sentido contrario de las manecillas del reloj un ángulo de $\theta$ radianes alrededor del punto $z_0$ en el plano complejo. [*Sugerencia*: Por el problema 35, este mapeo está únicamente determinado por las imágenes de dos puntos].

**37.** (**a**) Dados dos números complejos $w_1$ y $w_2$, ¿siempre existe una función lineal que mapee 0 en $w_1$ y 1 en $w_2$? Explique.

(**b**) Dados tres números complejos $w_1$, $w_2$ y $w_3$, ¿siempre existe una función lineal que mapee 0 en $w_1$, 1 en $w_2$, e $i$ en $w_3$? Explique.

**38.** En el capítulo 1 usamos la desigualdad del triángulo para tener cotas en el módulo de ciertas expresiones de $z$ dando una cota en el módulo de $z$. Por ejemplo, si $|z| \leq 1$, entonces $|(1 + i)z - 2| \leq 2 + \sqrt{2}$. Justifique esta desigualdad utilizando mapeos lineales, después determine un valor de $z$ para el cual $|(1 + i)z - 2| = 2 + \sqrt{2}$.

**39.** Considere la función compleja $f(z) = 2iz + 1 - i$ definida en el anillo cerrado $2 \leq |z| \leq 3$.

(**a**) Utilice mapeos lineales para determinar las cotas superior e inferior en el módulo de $f(z) = 2iz + 1 - i$. Es decir, determine los valores reales $L$ y $M$ tales que $L \leq |2iz + 1 - i| \leq M$.

(**b**) Determine los valores de $z$ que alcanzan sus cotas en (a). En otras palabras, determine $z_0$ y $z_1$ tal que $|f(z_0)| = L$ y $|f(z_1)| = M$.

(**c**) Determine las cotas superior e inferior en el módulo de la función $g(z) = 1/f(z)$ definida en el anillo cerrado $2 \leq |z| \leq 3$.

## Proyectos

**40. Grupos de isometrías** En este proyecto investigamos la relación entre el análisis complejo y la geometría euclidiana del plano cartesiano.

La **distancia euclidiana** entre dos puntos $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ en el plano cartesiano es

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Por supuesto, si consideramos las representaciones complejas $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ de estos puntos, entonces la distancia euclidiana está dada por el módulo

$$d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|.$$

Una función del plano al plano que conserva la distancia euclidiana entre cada par de puntos se llama una **isometría euclidiana** del plano. En particular, un mapeo complejo $w = f(z)$ es una isometría euclidiana del plano si

$$|z_2 - z_1| = |f(z_1) - f(z_2)|$$

para cada par de números complejos $z_1$ y $z_2$.

(**a**) Demuestre que cada mapeo lineal de la forma $f(z) = az + b$, donde $|a| = 1$ es una isometría euclidiana.

Un **grupo** es una estructura algebraica que se presenta en varias áreas de las matemáticas. Un grupo es un conjunto $G$ junto con un tipo especial de función $*$ de $G \times G$ a $G$. La función $*$ es llamada **operación binaria** en $G$, y se acostumbra utilizar la notación $a * b$ en lugar de $*(a, b)$ para representar un valor de $*$. Presentamos ahora la definición formal de un grupo. Un grupo es un conjunto $G$ junto con una operación binaria $*$ en $G$, que satisface las tres siguientes propiedades:

(*i*) para todos los elementos $a$, $b$ y $c$ en $G$, $a * (b * c) = (a * b) * c$,
(*ii*) existe un elemento $e$ en $G$ tal que $e * a = a * e = a$ para todo $a$ en $G$, y
(*iii*) para cada elemento $a$ en $G$ existe un elemento $b$ en $G$ tal que $a * b = b * a = e$. (El elemento $b$ se llama inverso de $a$ en $G$ y se denota con $a^{-1}$.)

Sea $\text{Isom}_+(\mathbf{E})$ el conjunto de todas las funciones complejas de la forma $f(z) = az + b$, donde $|a| = 1$. En lo que resta de este proyecto se le pide que demuestre que $\text{Isom}_+(\mathbf{E})$ es un grupo con la composición de funciones como la operación binaria. Este grupo se llama **grupo de orientación-conservación de isometrías del plano euclidiano**.

(**b**) Demuestre que la composición de funciones es una operación binaria en $\text{Isom}_+(\mathbf{E})$. Es decir, demuestre que si $f$ y $g$ son funciones en $\text{Isom}_+(\mathbf{E})$, entonces la función $f \circ g$ definida por $f \circ g(z) = f(g(z))$ es un elemento en $\text{Isom}_+(\mathbf{E})$.

(**c**) Demuestre que el conjunto $\text{Isom}_+(\mathbf{E})$ con la composición satisface la propiedad (*i*) de un grupo.

(**d**) Demuestre que el conjunto $\text{Isom}_+(\mathbf{E})$ con composición satisface la propiedad (*ii*) de un grupo. Es decir, demuestre que existe una función $e$ en $\text{Isom}_+(\mathbf{E})$ tal que $e \circ f = f \circ e = f$ para todas las funciones $f$ en $\text{Isom}_+(\mathbf{E})$.

(e) Demuestre que el conjunto $\text{Isom}_+(\mathbf{E})$ con la composición satisface la propiedad (*iii*) de un grupo.

## 2.4 Funciones potencia especiales

Una **función polinomial compleja** es una función de la forma $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, donde $n$ es un entero positivo y $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son constantes complejas; en general, un mapeo complejo polinomial puede ser bastante complicado, pero en muchos casos especiales la acción del mapeo es fácil de entender. Por ejemplo, las funciones complejas lineales que se estudiaron en la sección 2.3 son polinomios complejos de grado $n = 1$.

En esta sección estudiamos los polinomios complejos de la forma $f(z) = z^n$, $n \geq 2$. A pesar de los mapeos lineales estudiados en la sección anterior, los mapeos $w = z^n$, $n \geq 2$, no conservan la forma básica de cada figura en el plano complejo. Asociada a la función $z^n$, $n \geq 2$, también se tiene la *función n-ésima raíz principal* $z^{1/n}$. Las funciones $n$-ésima raíz principal son funciones inversas de las funciones $z^n$ definidas en un dominio suficientemente restringido. Por consiguiente, los mapeos complejos asociados a $z^n$ y $z^{1/n}$ están estrechamente relacionados.

**Funciones potencia** Recuerde que una función real de la forma $f(x) = x^a$, donde $a$ es una constante real, se llama función potencia. Formamos una función potencia compleja al permitir que la entrada o el exponente sea un número complejo. En otras palabras, una **función potencia compleja** es una función de la forma $f(z) = z^\alpha$ donde $\alpha$ es una constante compleja. Si $\alpha$ es un entero, entonces la función potencia $z^\alpha$ se puede evaluar utilizando las operaciones algebraicas de los números complejos del capítulo 1. Por ejemplo, $z^2 = z \cdot z$ y $z^{-3} = \dfrac{1}{z \cdot z \cdot z}$. Podemos también utilizar las fórmulas para sacar raíces de números complejos de la sección 1.4 y definir funciones potencia con exponentes fraccionarios de la forma $1/n$. Por ejemplo, *podemos* definir $z^{1/4}$ como la función que da la cuarta raíz principal de $z$. En esta sección restringimos nuestra atención a las funciones especiales complejas de potencias de la forma $z^n$ y $z^{1/n}$ donde $n \geq 2$ y $n$ es un entero. Funciones potencias complejas más complicadas tales como $z^{\sqrt{2}-i}$ se analizarán en la sección 4.2 después de la introducción de la función logaritmo complejo.

### 2.4.1 La función potencia $z^n$

En esta subsección consideramos a las funciones complejas de potencia de la forma $z^n$, $n \geq 2$. Es natural comenzar nuestra investigación con la más simple de estas funciones. La **función potencia cuadrada compleja** $z^2$.

**La función $z^2$** Valores de la función potencia compleja $f(z) = z^2$ se determinan fácilmente utilizando la multiplicación compleja. Por ejemplo, en $z = 2 - i$, tenemos $f(2 - i) = (2 - i)^2 = (2 - i) \cdot (2 - i) = 3 - 4i$. Entendiendo el mapeo complejo $w = z^2$, sin embargo, requiere un poco más de trabajo. Empezamos por expresar este mapeo en notación exponencial sustituyendo el símbolo $z$ con $re^{i\theta}$:

$$w = z^2 = (re^{i\theta})^2 = r^2 e^{i2\theta}. \tag{1}$$

De (1) vemos que el módulo $r^2$ del punto $w$ es el cuadrado del módulo $r$ del punto $z$, y que el argumento $2\theta$ de $w$ es dos veces el argumento $\theta$ de $z$. Si

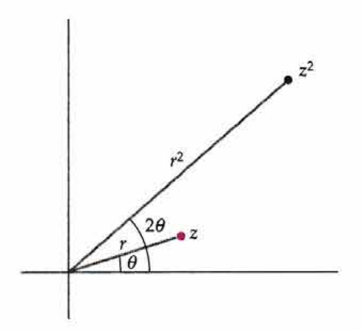



Figura 2.4.1 El mapeo $w = z^2$

dibujamos tanto a $z$ como a $w$ en la misma copia del plano complejo, entonces $w$ se obtiene ampliando $z$ por un factor de $r$ y después girando el resultado a través de un ángulo $\theta$ alrededor del origen. En la figura 2.4.1 dibujamos la relación entre $z$ y $w = z^2$ cuando $r > 1$ y $\theta > 0$. Si $0 < r < 1$, entonces $z$ se contrae por un factor de $r$, y si $\theta < 0$, entonces la rotación es en el sentido de las manecillas del reloj.

Es importante observar que la ampliación o la contracción de los factores y el ángulo de rotación asociado a $w = f(z) = z^2$ dependen de donde se encuentre el punto $z$ en el plano complejo. Por ejemplo, puesto que $f(2) = 4$, y $f(i/2) = -\frac{1}{4}$, el punto $z = 2$ es ampliado por 2 pero no se rota, mientras que el punto $z = i/2$ está contraído por $\frac{1}{2}$ y gira un ángulo de $\pi/2$. En general, la función potencia cuadrada $z^2$ no amplía el módulo de puntos en la circunferencia unitaria $|z| = 1$ y no gira los puntos en el eje real positivo.

La descripción del mapeo $w = z^2$ en términos de una ampliación y rotación se puede usar para visualizar la imagen de algunos conjuntos especiales. Por ejemplo, considere un rayo que sale del origen y hace un ángulo de $\phi$ con el eje real positivo. Todos los puntos de este rayo tienen un argumento de $\phi$ así que las imágenes de estos puntos bajo $w = z^2$ tienen un argumento de $2\phi$. Por lo que las imágenes se encuentran en un rayo que sale del origen y hace un ángulo de $2\phi$ con el eje positivo real. Por otra parte, ya que el módulo $\rho$ de un punto en el rayo puede tener cualquier valor en el intervalo $[0, \infty)$, el módulo $\rho^2$ de un punto en la imagen puede tener también cualquier valor en el intervalo $[0, \infty)$. Esto implica que un rayo que sale del origen haciendo un ángulo $\phi$ con el eje real positivo se mapea en un rayo que sale del origen haciendo un ángulo $2\phi$ con el eje real positivo por $w = z^2$. También podemos justificar esta propiedad del mapeo de $z^2$ parametrizando el rayo y su imagen utilizando (8) y (11) de la sección 2.2.

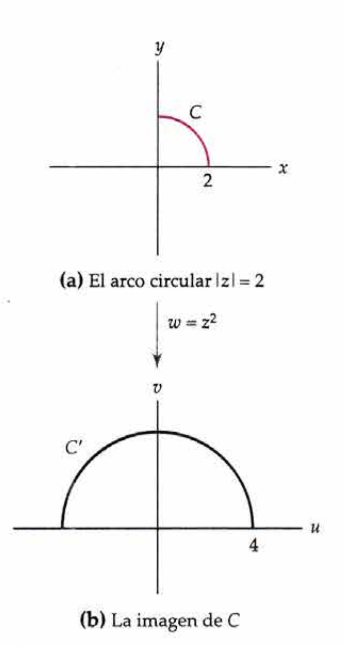


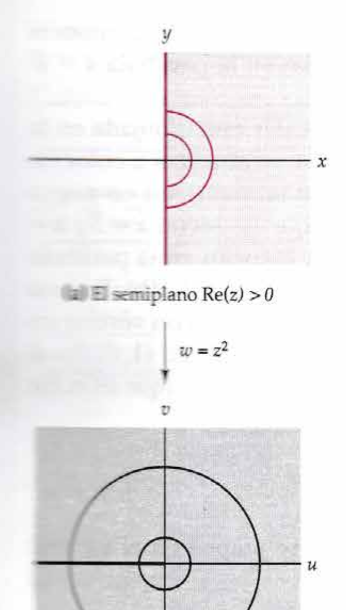

Figura 2.4.2 El mapeo $w = z^2$

## EJEMPLO 1 Imagen de un arco circular bajo $w = z^2$

Determine la imagen del arco circular definido por $|z| = 2$, $0 \leq \arg(z) \leq \pi/2$ bajo el mapeo $w = z^2$.

**Solución** Sea $C$ el arco de circunferencia definida por $|z| = 2$, $0 \leq \arg(z) \leq \pi/2$, mostrada en color en la figura 2.4.2(a), y sea que $C'$ denote la imagen de $C$ bajo $w = z^2$. Ya que cada punto en $C$ tiene módulo 2 y puesto que el mapeo $w = z^2$ eleva al cuadrado el módulo de un punto, se tiene que cada punto en $C'$ tiene módulo $2^2 = 4$. Esto implica que la imagen $C'$ debe estar contenida en la circunferencia $|w| = 4$ centrada en el origen con radio 4. Ya que los argumentos de los puntos $C$ toman cada uno de sus valores en el intervalo $[0, \pi/2]$ y como el mapeo $w = z^2$ duplica el argumento de un punto, se tiene que los puntos en $C'$ tienen argumentos que toman en cada valor del intervalo $[2 \cdot 0, 2 \cdot (\pi/2)] = [0, \pi]$. Es decir, el conjunto $C'$ es la semicircunferencia definida por $|w| = 4$, $0 \leq \arg(w) \leq \pi$. En conclusión, hemos demostrado que $w = z^2$ mapea el arco circular $C$ que se muestra a color en la figura 2.4.2(a) en la semicircunferencia $C'$ que se muestra en negro en la figura 2.4.2(b). ❑

Otra forma de encontrar la imagen del ejemplo 1 sería usando una parametrización. De (10) de la sección 2.2, el arco circular $C$ se puede parametrizar con $z(t) = 2e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi/2$, y por (11) de la sección 2.2 de su imagen $C'$ está dada por $w(t) = f(z(t)) = 4e^{i2t}$, $0 \leq t \leq \pi/2$. Sustituyendo el




(a) El semiplano Re(z) > 0

(b) Imagen del semiplano en (a)

Figura 2.4.3 El mapeo $w = z^2$

parámetro $t$ en $w(t)$ con el nuevo parámetro $s = 2t$, obtenemos $W(s) = 4e^{is}$, $0 \leq s \leq \pi$, que es una parametrización de la semicircunferencia $|w| = 4$, $0 \leq \arg(w) \leq \pi$.

En una forma similar, encontramos que la función potencia cuadrada mapea una semicircunferencia $|z| = r$, $-\pi/2 \leq \arg(z) \leq \pi/2$, en una circunferencia $|w| = r^2$. Puesto que el semiplano derecho $\text{Re}(z) \geq 0$ se compone del conjunto de semicircunferencias $|z| = r$, $-\pi/2 \leq \arg(z) \leq \pi/2$, donde $r$ toma cada valor del intervalo $[0, \infty)$, tenemos que la imagen de este semiplano consiste del conjunto de circunferencias $w = r^2$ donde $r$ toma cualquier valor en $[0, \infty)$. Esto implica que $w = z^2$ mapea el semiplano derecho $\text{Re}\ (z) \geq 0$ en todo el plano complejo. Ilustramos esta propiedad en la figura 2.4.3. Observe que las imágenes de dos semicircunferencias centradas en 0 se muestran a color en la figura 2.4.3(a) son las dos circunferencias que se muestran en negro en la figura 2.4.3(b). Puesto que $w = z^2$ eleva al cuadrado el módulo de un punto, la semicircunferencia de radio más pequeño de la figura 2.4.3(a) se mapea en la circunferencia de radio más pequeño de la figura 2.4.3(b), mientras que el semicírculo con radio más grande de la figura 2.4.3(a) se mapea en la circunferencia de radio más grande de la figura 2.4.3(b). También vemos en la figura 2.4.3 que el rayo que sale del origen y que contiene al punto $i$ y el rayo que sale del origen y que contiene al punto $-i$ son ambos mapeados en el eje real no positivo. Por lo que el eje imaginario que se muestra a color en la figura 2.4.3(a) se mapea en el conjunto compuesto del punto $w = 0$ junto con el eje $u$ negativo que se muestra en negro en la figura 2.4.3(b).

Con el fin de obtener un entendimiento más profundo del mapeo $w = z^2$ a continuación consideraremos imágenes de rectas horizontales y verticales en el plano complejo.

## EJEMPLO 2 Imagen de una recta vertical bajo $w = z^2$

Determine la imagen de la recta vertical $x = k$ bajo el mapeo $w = z^2$.

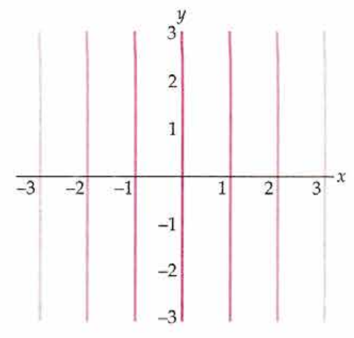
**Solución** En este ejemplo es conveniente trabajar con las partes real e imaginaria de $w = z^2$ que, de (1) de la sección 2.1, son $u(x, y) = x^2 - y^2$ y $v(x, y) = 2xy$, respectivamente. Puesto que la recta vertical $x = k$ consta de los puntos $z = k + iy$, $-\infty < y < \infty$, se tiene que la imagen de esta recta se compone de todos los puntos $w = u + iv$ donde

$$u = k^2 - y^2,\ v = 2ky,\ -\infty < y < \infty. \tag{2}$$

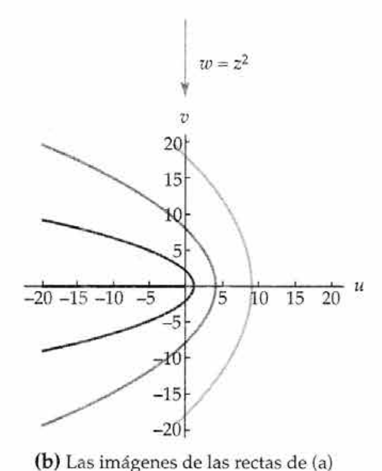
Si $k \neq 0$, entonces podemos eliminar la variable $y$ de (2) resolviendo la segunda ecuación para $y = v/2k$, y después sustituyendo esta expresión en la ecuación y la desigualdad restantes. Después de la simplificación, se obtiene:

$$u = k^2 - \frac{v^2}{4k^2}, \quad -\infty < v < \infty. \tag{3}$$

Así, la imagen de la recta $x = k$ (con $k \neq 0$) bajo $w = z^2$ es el conjunto de puntos en el plano $w$ que satisfacen (3). Esta imagen es una parábola que se abre en la dirección del negativo del eje $u$, tiene su vértice en $(k^2, 0)$, y tiene su intercepción con el eje $v$ en $(0, \pm 2k^2)$. Observe que la imagen dada por



**(a)** Rectas verticales en el plano $z$



**(b)** Las imágenes de las rectas de (a)

Figura 2.4.4 El mapeo $w = z^2$

(3) no cambia si $k$ se sustituye por $-k$. Esto implica que si $k \neq 0$, entonces las dos rectas verticales $x = k$ y $x = -k$ son mapeadas en la parábola $u = k^2 - v^2/(4k^2)$ por $w = z^2$.

La acción del mapeo $w = z^2$ en las rectas verticales está dibujada en la figura 2.4.4. Las rectas verticales $x = k$, $k \neq 0$, que se muestra a color en la figura 2.4.4(a) se mapean en las parábolas que se muestran en negro en la figura 2.4.4(b). En particular, de (3) tenemos que las rectas $x = 3$ y $x = -3$ que se muestran a color en la figura 2.4.4(a) se mapean en la parábola con vértice en (9, 0) que se muestra en negro en la figura 2.4.4(b). En una forma similar, las rectas $x = \pm 2$ se mapean en la parábola con vértice en (4, 0), y las rectas $x = \pm 1$ se mapean en la parábola con vértice en (1, 0). En el caso que $k = 0$, se tiene de (2) que la imagen de la recta $x = 0$ (que es el eje imaginario) está dada por:

$$u = -y^2, \qquad v = 0, \qquad -\infty < y < \infty.$$

Por tanto, también tenemos que el eje imaginario se mapea en el eje real negativo por $w = z^2$. Vea la figura 2.4.4. ❑

Con pequeñas modificaciones, se puede utilizar el método del ejemplo 2 para mostrar que una recta horizontal $y = k$, $k \neq 0$, se mapea en la parábola

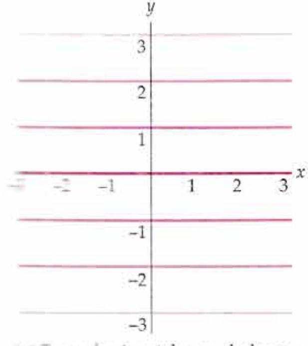
$$u = \frac{v^2}{4k^2} - k^2 \tag{4}$$

por $w = z^2$. De nuevo vemos que la imagen en (4) no se modifica si $k$ se sustituye por $-k$, con lo que el par de rectas horizontales $y = k$ y $y = -k$, $k \neq 0$, son mapeadas por $w = z^2$ en la parábola dada por (4). Si $k = 0$, entonces la recta horizontal $y = 0$ (que es el eje real) se mapea en el eje positivo real. Por tanto, las rectas horizontales $y = k$, $k \neq 0$, que se muestra a color en la figura 2.4.5(a) se mapean por $w = z^2$ en las parábolas que se muestran en negro en la figura 2.4.5(b). En concreto, las rectas $y = \pm 3$ se mapean en la parábola con vértice en $(-9, 0)$, y las rectas $y = \pm 2$ se mapean en la parábola con vértice en $(-4, 0)$, y las rectas $y = \pm 1$ se mapean en la parábola con vértice en $(-1, 0)$.

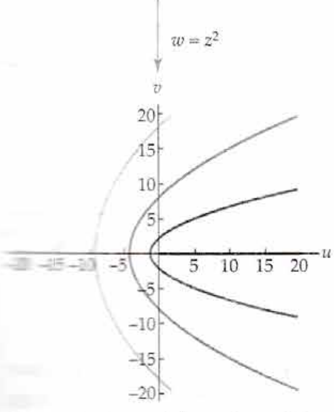
### EJEMPLO 3 Imagen de un triángulo bajo $w = z^2$

Determine la imagen del triángulo con vértices $0$, $1 + i$, y $1 - i$ bajo el mapeo $w = z^2$.

**Solución** Sea $S$ el triángulo con vértices en $0$, $1 + i$, y $1 - i$, y sea $S'$ su imagen bajo $w = z^2$. Cada uno de los tres lados de $S$ se tratará por separado. El lado de $S$ que contiene los vértices $0$ y $1 + i$ se encuentra en un rayo que sale del origen y hace un ángulo de $\pi/4$ radianes con el eje $x$ positivo. En el análisis anterior, la imagen de este segmento deberá encontrarse en un rayo que hace un ángulo de $2(\pi/4) = \pi/2$ radianes con el eje positivo $u$. Además, puesto que el módulo de los puntos en el extremo que contiene a 0 y a $1 + i$ varía de 0 a $\sqrt{2}$, el módulo de las imágenes de estos puntos varía de $0^2 = 0$ a $(\sqrt{2})^2 = 2$. Así, la imagen de este lado es un segmento de recta vertical de 0 a $2i$, contenido en el eje $v$ que se muestra en negro en la figura 2.4.6(b). En una forma similar, encontramos, que la imagen del lado de

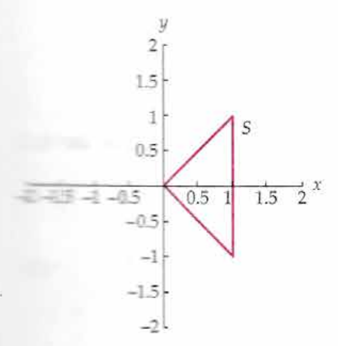



(a) Rectas horizontales en el plano $z$

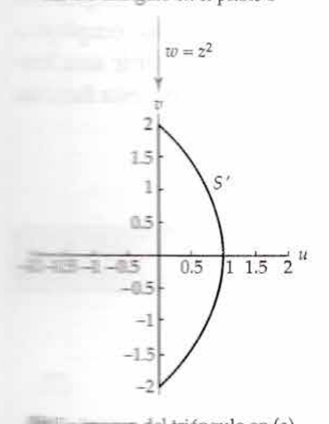



(b) Las imágenes de las rectas en (a)

Figura 2.4.5 El mapeo $w = z^2$




(a) Un triángulo en el plano $z$




(b) La imagen del triángulo en (a)

Figura 2.4.6 El mapeo $w = z^2$

$S$ que contiene los vértices 0 y $1 - i$ es un segmento de recta vertical de 0 a $-2i$ contenido en el eje $v$. Vea la figura 2.4.6. El lado que queda de $S$ contiene los vértices $1 - i$ y $1 + i$. Este lado se compone del conjunto de puntos de $z = 1 + iy$, $-1 \leq y \leq 1$. Ya que este lado se encuentra en la recta vertical $x = 1$, se tiene de (2) y (3) del ejemplo 2 que su imagen es un segmento parabólico dado por:

$$u = 1 - \frac{v^2}{4}, \quad -2 \leq v \leq 2.$$

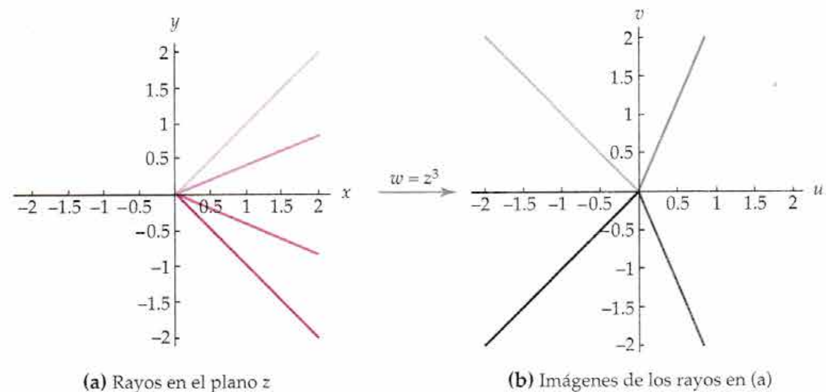
Por lo que hemos demostrado que la imagen del triángulo $S$ que se muestra a color en la figura 2.4.6(a) es la figura $S'$ mostrada en negro en la figura 2.4.6(b). ❑

**La función $z^n$, $n > 2$** Un análisis similar al utilizado para el mapeo $w = z^2$ se puede aplicar al mapeo $w = z^n$, $n > 2$. Sustituyendo el símbolo $z$ con $re^{i\theta}$ obtenemos:

$$w = z^n = r^n e^{in\theta}. \tag{5}$$

Por consiguiente, si $z$ y $w = z^n$ se dibujan en la misma copia del plano complejo, entonces este mapeo se puede visualizar como el proceso de ampliación o de contracción del módulo $r$ de $z$ al módulo $r^n$ de $w$, y girando $z$ alrededor del origen aumenta un argumento $\theta$ de $z$ a un argumento $n\theta$ de $w$.

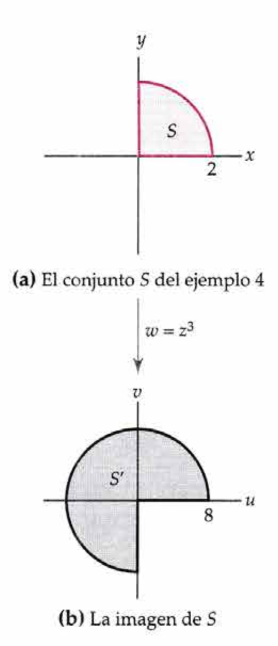
Podemos utilizar esta descripción de $w = z^n$ para demostrar que un rayo que sale del origen y hace un ángulo de $\phi$ radianes con el eje $x$ positivo se mapea en un rayo que sale del origen y hace un ángulo de $n\phi$ radianes con el eje $u$ positivo. Esta propiedad se muestra para el mapeo $w = z^3$ en la figura 2.4.7. Se muestra que cada rayo en color en la figura 2.4.7(a) se mapea en un rayo que se muestra en negro en la figura 2.4.7(b). Puesto que el mapeo $w = z^3$ aumenta el argumento de un punto por un factor de 3, el rayo más cercano al eje $x$ en el primer cuadrante en la figura 2.4.7(a) se mapea en el rayo en el primer cuadrante en la figura 2.4.7(b), y el rayo que falta en el primer cuadrante en la figura 2.4.7(a) se mapea en el rayo en el segundo cuadrante en la figura 2.4.7(b). Del mismo modo, el rayo más cercano al eje $x$ en el cuarto cuadrante en la figura 2.4.7(a) se mapea en el rayo en el cuarto cuadrante en la figura 2.4.7(b), y el rayo que falta en el cuarto cuadrante de la figura 2.4.7(a) se mapea en el rayo en el tercer cuadrante en la figura 2.4.7(b).




**(a)** Rayos en el plano $z$

**(b)** Imágenes de los rayos en (a)

Figura 2.4.7 El mapeo $w = z^3$




**(a)** El conjunto $S$ del ejemplo 4

**(b)** La imagen de $S$

Figura 2.4.8 El mapeo de $w = z^3$

**EJEMPLO 4 Imagen de una cuña circular bajo $w = z^3$**

Determine la imagen del cuarto de disco definido por las desigualdades $|z| \leq 2$, $0 \leq \arg(z) \leq \pi/2$, bajo el mapeo $w = z^3$.

**Solución** Sea $S$ el cuarto de disco y sea $S'$ su imagen bajo $w = z^3$. Ya que el módulo de los puntos en $S$ varía de 0 a 2 y puesto que el mapeo $w = z^3$ eleva al cubo el módulo de un punto, se tiene que el módulo de los puntos en $S'$ varía de $0^3 = 0$ a $2^3 = 8$. Además, ya que los argumentos de los puntos en $S$ varían de 0 a $\pi/2$, y que el mapeo $w = z^3$ triplica el argumento de un punto, también tenemos que los argumentos de los puntos en $S'$ varían de 0 a $3\pi/2$. Por tanto, $S'$ es el conjunto dado por las desigualdades $|w| \leq 8$, $0 \leq \arg(w) \leq 3\pi/2$, que se muestra en gris en la figura 2.4.8(b). En resumen, el conjunto $S$ mostrado a color en la figura 2.4.8(a) se mapea en el conjunto $S'$ que se muestra en gris en la figura 2.4.8(b) con $w = z^3$. ❑

## 2.4.2 La función potencia $z^{1/n}$

Ahora investigaremos funciones complejas de potencia de la forma $z^{1/n}$ donde $n$ es un número entero y $n \geq 2$. Comenzamos con el caso $n = 2$.

**Función raíz cuadrada principal $z^{1/2}$** En (4) de la sección 1.4 vimos que las raíces $n$-ésimas de un número complejo $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ están dadas por:

$$\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right] = \sqrt[n]{r}e^{i(\theta+2k\pi)/n}$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$. En particular, para $n = 2$, tenemos que las dos raíces cuadradas de $z$ son:

$$\sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{2}\right)\right] = \sqrt{r}e^{i(\theta+2k\pi)/2} \quad (6)$$

para $k = 0, 1$. La fórmula en (6) no define una función, ya que asigna dos números complejos (uno para $k = 0$ y otro para $k = 1$) al número complejo $z$. Sin embargo, haciendo $\theta = \text{Arg}(z)$ y $k = 0$ en (6) podemos definir una función que mapea a $z$ la única raíz cuadrada principal. Naturalmente, esta función se llama la **función raíz cuadrada principal**.

**Definición 2.4.1 Función raíz cuadrada principal**

La función $z^{1/2}$ definida por:

$$z^{1/2} = \sqrt{|z|}\,e^{i\text{Arg}(z)/2} \quad (7)$$

se llama **función raíz cuadrada principal**.

Si hacemos $\theta = \text{Arg}(z)$ y sustituimos $z$ con $re^{i\theta}$ en (7), entonces obtenemos una descripción alternativa de la función raíz cuadrada principal para $|z| > 0$:

$$z^{1/2} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}, \quad \theta = \text{Arg}(z). \tag{8}$$

*Nota* ➡ Debe tomar nota que el símbolo $z^{1/2}$ utilizado en la definición 2.4.1 representa algo diferente del mismo símbolo que se utilizó en la sección 1.4. En (7) usamos $z^{1/2}$ para representar el *valor* de la raíz cuadrada principal del número complejo $z$, mientras que en el punto 1.4 se utilizó el símbolo $z^{1/2}$ para representar las raíces del conjunto de las dos raíces cuadradas del número complejo $z$. Esta repetición de notación es lamentable, pero muy utilizada. En su mayor parte, el contexto en el que se encuentra al símbolo $z^{1/2}$ debe dejar claro si nos referimos a la raíz cuadrada principal o al conjunto de raíces cuadradas. Con el fin de evitarnos confusiones, algunas veces también de forma explícita estableceremos como "función raíz cuadrada principal a $z^{1/2}$" o la "función $f(z) = z^{1/2}$ dada por (7)".

### EJEMPLO 5 Valores de $z^{1/2}$

Determine los valores de la función raíz cuadrada principal $z^{1/2}$ en los puntos siguientes:

**(a)** $z = 4$ **(b)** $z = -2i$ **(c)** $z = -1 + i$

**Solución** En cada inciso usamos (7) para determinar el valor de $z^{1/2}$.

**(a)** Para $z = 4$, tenemos $|z| = |4| = 4$ y $\text{Arg}(z) = \text{Arg}\ (4) = 0$, y así de (7) obtenemos:

$$4^{1/2} = \sqrt{4}e^{i(0/2)} = 2e^{i(0)} = 2.$$

**(b)** Para $z = -2i$, tenemos $|z| = |-2i| = 2$ y $\text{Arg}(z) = \text{Arg}(-2\text{i}) = -\pi/2$, y usando (7) obtenemos:

$$(-2i)^{1/2} = \sqrt{2}e^{i(-\pi/2)/2} = \sqrt{2}e^{-i\pi/4} = 1 - i.$$

**(c)** Para $z = -1 + i$, tenemos que $|z| = |-1 + i| = \sqrt{2}$ y $\text{Arg}(z) = \text{Arg}\ (-1 + i) = 3\pi/4$, por lo que utilizando (7) obtenemos:

$$(-1 + i)^{1/2} = \sqrt{(\sqrt{2})}e^{i(3\pi/4)/2} = \sqrt[4]{2}e^{i(3\pi/8)} \approx 0.4551 + 1.0987i.$$

❑

Es importante que usemos el *argumento principal* cuando se evalúe la función raíz cuadrada principal de la definición 2.4.1. Utilizando una elección diferente del argumento de $z$ se puede obtener una función diferente. Por ejemplo, en la sección 1.4 vimos que las dos raíces cuadradas de $i$ son $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,i$ y $-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,i$. Para $z = i$ tenemos que $|z| = 1$ y $\text{Arg}(z) = \pi/2$. Así se deduce de (7) que:

$$i^{1/2} = \sqrt{1}e^{i(\pi/2)/2} = 1 \cdot e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Por tanto, sólo la primera de estas dos raíces de $i$ es el valor de la función raíz cuadrada principal. Por supuesto, podemos definir otras funciones "raíz cuadrada". Por ejemplo, supongamos que hacemos que $\theta$ sea el único valor del argumento de $z$ en el intervalo $\pi < \theta \leq 3\pi$. Entonces $f(z) = \sqrt{|z|}e^{i\theta/2}$ define una función para la cual $f(i) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i$. La función $f$ no es la función raíz cuadrada principal pero está relacionada estrechamente con ella. Puesto que $\pi < \text{Arg}(z) + 2\pi \leq 3\pi$, se tiene que $\theta = \text{Arg}(z) + 2\pi$, por lo que

$$f(z) = \sqrt{|z|}e^{i\theta/2} = \sqrt{|z|}e^{i(\text{Arg}(z)+2\pi)/2} = \sqrt{|z|}e^{i\text{Arg}(z)/2}e^{i\pi}.$$

Puesto que $e^{i\pi} = -1$, la expresión anterior se simplifica a $f(z) = -\sqrt{|z|}e^{i\text{Arg}(z)/2}$. Es decir, hemos demostrado que la función $f(z) = \sqrt{|z|}e^{i\theta/2}$, $\pi < \theta \leq 3\pi$ es el negativo de la función raíz cuadrada principal $z^{1/2}$.

**Funciones inversas** La función raíz cuadrada principal de $z^{1/2}$ dada por (7) es *una* función inversa de la función potencia cuadrada $z^2$ que examinamos en la primera parte de esta sección. Antes de analizar este enunciado, necesitamos revisar algunos términos generales relacionados con las funciones inversas.

Una función real debe ser uno a uno para tener una función inversa. Lo mismo es cierto para una función compleja. La definición de una función compleja uno a uno es análoga a la de una función real. A saber, una función compleja $f$ es **unívoca (uno a uno)** si cada punto $w$ en el rango de $f$ es la imagen de un único punto $z$, llamado *preimagen* de $w$, en el dominio de $f$. Es decir, $f$ es unívoca si cuando $f(z_1) = f(z_2)$, entonces $z_1 = z_2$. Dicho de otra manera, si $z_1 \neq z_2$, entonces $f(z_1) \neq f(z_2)$. Esto nos indica que una función compleja unívoca, no mapea puntos distintos en el plano $z$ a un mismo punto en el plano $w$. Por ejemplo, la función $f(z) = z^2$ no es unívoca ya que $f(i) = f(-i) = -1$. Si $f$ es una función compleja unívoca, entonces para cualquier punto $w$ en el rango de $f$ hay una única preimagen en el plano $z$, la que denotamos por $f^{-1}(w)$. Esta correspondencia entre un punto $w$ y su preimagen $f^{-1}(w)$ define la función inversa de una función compleja unívoca.

**Definición 2.4.2 Función inversa**

Si $f$ es una función compleja unívoca con dominio $A$ y rango $B$, entonces, **función inversa de** $f$, que se denota con $f^{-1}$, es la función con dominio $B$ y rango $A$ definida por $f^{-1}(z) = w$ si $f(w) = z$.

De aquí se deduce inmediatamente de la Definición 2.4.2 que si un conjunto $S$ se mapea en un conjunto de $S'$ con una función unívoca $f$, entonces $f^{-1}$ mapea a $S'$ en $S$. En otras palabras, los mapeos complejos $f$ y $f^{-1}$ se "cancelan" uno con el otro. También de la definición 2.4.2 tenemos que si $f$ tiene una función inversa, entonces $f(f^{-1}(z)) = z$ y $f^{-1}(f(z)) = z$. Es decir, las dos composiciones $f \circ f^{-1}$ y $f^{-1} \circ f$ son la función identidad.

**EJEMPLO 6 Función inversa de $f(z) = z + 3i$**

Demuestre que la función compleja $f(z) = z + 3i$ es unívoca en todo el plano complejo y determine una fórmula para su función inversa.

**Solución** Una forma de indicar que $f$ es unívoca es demostrar que la igualdad $f(z_1) = f(z_2)$ implica la igualdad $z_1 = z_2$. Para la función $f(z) = z + 3i$, esto se deduce de inmediato ya que $z_1 + 3i = z_2 + 3i$ implica que $z_1 = z_2$. Como con las funciones reales, la función inversa de $f$ se puede encontrar con frecuencia resolviendo algebraicamente la ecuación $z = f(w)$ para el símbolo $w$. Resolviendo $z = w + 3i$ para $w$, obtenemos $w = z - 3i$ y así $f^{-1}(z) = z - 3i$. ❑

Al resolver la ecuación $z = f(w)$ para $w$ encontramos una fórmula para $w = f^{-1}(z)$.

De la sección 2.3 sabemos que el mapeo $f(z) = z + 3i$ en el ejemplo 6 es una traslación de $3i$ y que $f^{-1}(z) = z - 3i$ es una traslación por $-3i$. Supongamos que representamos estos mapeos en una sola copia del plano complejo. Ya que trasladando un punto por $3i$ y después llevando la imagen en $-3i$ se mueve el punto original de nuevo a sí mismo, vemos que los mapeos $f$ y $f^{-1}$ se "cancelan" uno con otro, como se esperaba.

## Funciones inversas de $z^n$, $n > 2$

Ahora describiremos cómo obtener una función inversa de la función potencia $z^n$, $n \geq 2$. Esto requiere cierta explicación ya que la función $f(z) = z^n$, $n \geq 2$, *no* es unívoca. Para ver que esto es así, considere los puntos $z_1 = re^{i\theta}$ y $z_2 = re^{i(\theta + 2\pi/n)}$ con $r \neq 0$. Ya que $n \geq 2$, los puntos $z_1$ y $z_2$ son distintos. Es decir, $z_1 \neq z_2$. De (5) tenemos $f(z_1) = r^n e^{in\theta}$ y $f(z_2) = r^n e^{i(n\theta + 2\pi)} = r^n\, e^{in\theta}\, e^{i2\pi} = r^n e^{in\theta}$. Por tanto, $f$ no es unívoca ya que $f(z_1) = f(z_2)$ pero $z_1 \neq z_2$. De hecho, los $n$ puntos distintos $z_1 = re^{i\theta}$, $z_2 = re^{i(\theta + 2\pi/n)}$, $z_3 = re^{i(\theta + 4\pi/n)}, \ldots, z_n = re^{i(\theta + 2(n-1)\pi/n)}$, son todos mapeados en un solo punto $w = r^n e^{in\theta}$ con $f(z) = z^n$. Este hecho se ilustra para $n = 6$ en la figura 2.4.9. Los seis puntos $z_1, z_2, \ldots, z_6$ con módulo igual y argumentos que difieren por $2\pi/6 = \pi/3$ que se muestran en la figura 2.4.9 son todos mapeados en el mismo punto con $f(z) = z^6$.

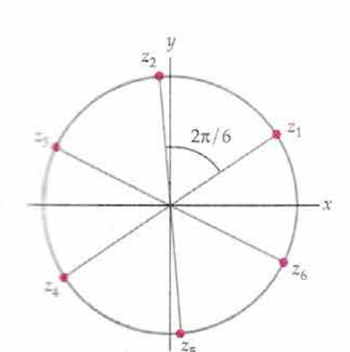



**Figura 2.4.9** Puntos mapeados en el mismo punto con $f(z) = z^6$

El análisis anterior parece implicar que la función $f(z) = z^n$, $n \geq 2$, no tienen una función inversa ya que no es unívoca. Usted se ha enfrentado a este problema antes, al definir funciones inversas para ciertas funciones reales en cálculo elemental. Por ejemplo, las funciones reales $f(x) = x^2$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$ no son unívocas, pero aún así tenemos las funciones inversas $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ y $g^{-1}(x) = \operatorname{arcsen} x$. La clave para definir estas funciones inversas es restringir apropiadamente los dominios de las funciones a los conjuntos en los que las funciones son unívocas. Por ejemplo, mientras que la función real $f(x) = x^2$ definida en el intervalo $(-\infty, \infty)$ no es unívoca, la misma función definida en el intervalo $[0, \infty)$ es uno a uno . Del mismo modo, $g(x) = \operatorname{sen} x$ no es unívoca en el intervalo $(-\infty, \infty)$, pero es unívoca en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. La función $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ es la función inversa de la función $f(x) = x^2$ definida en el intervalo $[0, \infty)$. Ya que $\operatorname{Dom}(f) = [0, \infty)$ y $\operatorname{Rango}(f) = [0, \infty)$, el dominio y el rango de $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ también son para ambos $[0, \infty)$. Vea la figura 2.4.10. En una forma similar, $g^{-1}(x) = \operatorname{arcsen} x$ es la función inversa de la función $g(x) = \operatorname{sen} x$ definida en $[-\pi/2, \pi/2]$. El dominio y el rango de $g^{-1}$ son $[-1, 1]$ y $[-\pi/2, \pi/2]$, respectivamente. Vea la figura 2.4.11. Usamos la misma idea de la función potencia compleja $z^n$, $n \geq 2$. Es decir, para definir una función inversa de $f(z) = z^n$, $n \geq 2$, debemos restringir el dominio de $f$ a un conjunto en el que $f$ es una función unívoca. Esta elección de "dominio restringido" se encuentra en el ejemplo 7 cuando $n = 2$.

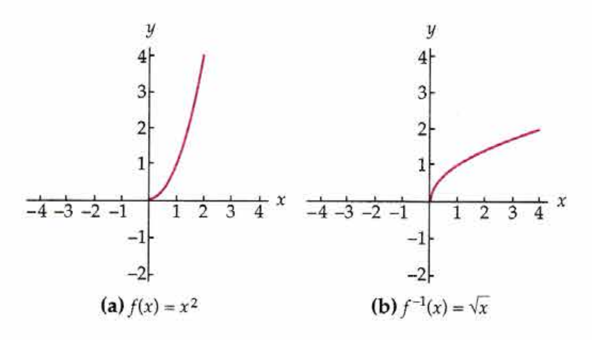



**Figura 2.4.10** $f(x) = x^2$ definida en $[0, \infty)$ y su función inversa

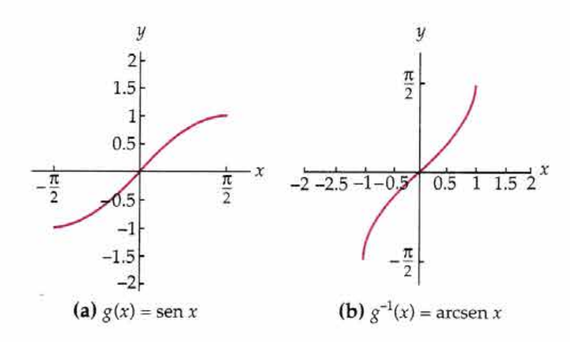



**Figura 2.4.11** $g(x) = \text{sen}\, x$ definida en $[-\pi/2, \pi/2]$ y su función inversa

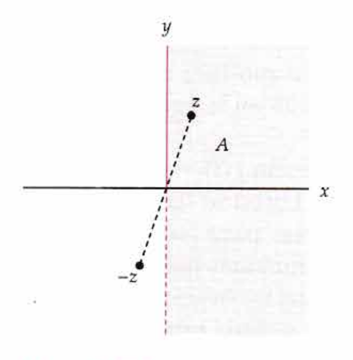



**Figura 2.4.12** Un dominio en el que $f(z) = z^2$ es unívoca

## EJEMPLO 7 Un dominio restringido de $f(z) = z^2$

Demuestre que $f(z) = z^2$ es una función uno a uno en el conjunto $A$ definido por $-\pi/2 < \arg(z) \leq \pi/2$ que se muestra a color en la figura 2.4.12.

**Solución** Como en el ejemplo 6, se muestra que $f$ es unívoca, demostrando que si $z_1$ y $z_2$, están en $A$ y si $f(z_1) = f(z_2)$, entonces $z_1 = z_2$. Supongamos que $z_1$ y $z_2$ están en $A$, entonces se puede escribir $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ con $-\pi/2 < \theta_1 \leq \pi/2$ y $-\pi/2 < \theta_2 \leq \pi/2$. Si $f(z_1) = f(z_2)$, entonces de (1) se tiene que:

$$r_1^2 e^{i2\theta_1} = r_2^2 e^{i2\theta_2}. \tag{9}$$

De (9) concluimos que los números complejos $r_1^2 e^{i2\theta_1}$ y $r_2^2 e^{i2\theta_2}$ tienen el mismo módulo y argumento principal:

$$r_1^2 = r_2^2 \text{ y } \text{Arg}\left(r_1^2 e^{i2\theta_1}\right) = \text{Arg}\left(r_2^2 e^{i2\theta_2}\right). \tag{10}$$

Ya que tanto $r_1$ como $r_2$ son positivas, la primera ecuación en (10) implica que $r_1 = r_1$. Por otra parte, puesto que $-\pi/2 < \theta_1 \leq \pi/2$ y $-\pi/2 < \theta_2 \leq \pi/2$, se tiene que $-\pi < 2\theta_1 \leq \pi$, y $-\pi < 2\theta_2 \leq \pi$. Esto significa que $\text{Arg}\left(r_1^2 e^{i2\theta_1}\right) = 2\theta_1$ y $\text{Arg}\left(r_2^2 e^{i2\theta_2}\right) = 2\theta_2$. Este hecho combinado con la segunda ecuación en (10) implica que $2\theta_1 = 2\theta_2$ o $\theta_1 = \theta_2$. Por tanto, concluimos que $z_1 = z_2$ y esto demuestra que $f$ es una función unívoca en $A$. ❑

*Recuerde*: $\text{Arg}(z)$ está en el intervalo $(-\pi, \pi]$. ➡

**Una inversa de $f(z) = z^2$** En el ejemplo 7 vimos que la función potencia cuadrada $z^2$ es unívoca en el conjunto $A$ definido en $-\pi/2 < \arg(z) \leq \pi/2$. Se tiene de la definición 2.4.2 que ésta tiene una función inversa bien definida $f^{-1}$. Ahora procederemos a demostrar que esta función inversa es la función raíz cuadrada principal $z^{1/2}$ de la definición 2.4.1. Para hacerlo, sea que $z = re^{i\theta}$ y $w = \rho e^{i\phi}$ donde $\theta$ y $\phi$ son los argumentos principales de $z$ y $w$, respectivamente. Supongamos que $w = f^{-1}(z)$. Ya que el rango de $f^{-1}$ es el dominio de $f$, el argumento principal $\phi$ de $w$ debe satisfacer:

$$-\frac{\pi}{2} < \phi \leq \frac{\pi}{2}. \tag{11}$$

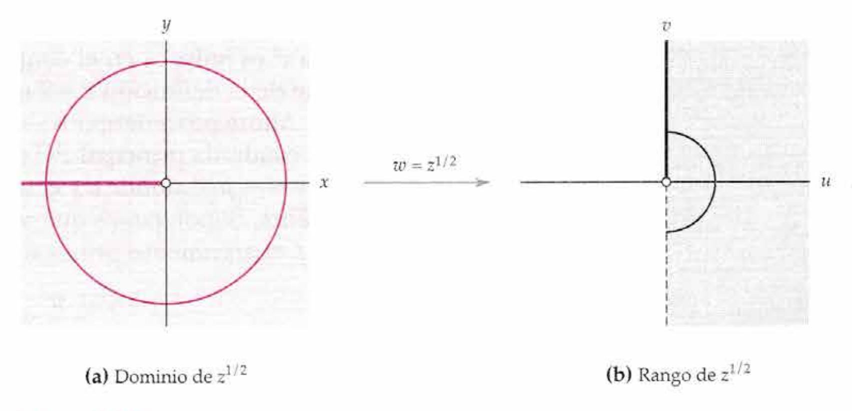
Por otra parte, por la definición 2.4.2, $f(w) = w^2 = z$. Por lo que $w$ es una de las raíces cuadradas de $z$ dada por (6). Es decir, ya sea $w = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$ o $w = \sqrt{r}e^{i(\theta+2\pi)/2}$. Supongamos que $w$ es esta última. Es decir, suponga que

$$w = \sqrt{r}e^{i(\theta+2\pi)/2}. \tag{12}$$

Ya que $\theta = \operatorname{Arg}(z)$, tenemos $-\pi < \theta \leq \pi$, y así, $\pi/2 < (\theta + 2\pi)/\,2 \leq 3\pi/2$. De lo anterior y de (12) concluimos que el argumento principal $\phi$ de $w$ debe cumplir ya sea que $-\pi < \phi \leq -\pi/2$ o $\pi/2 < \phi \leq \pi$. Sin embargo, esto no puede ser cierto ya que $-\pi/2 < \phi \leq \pi/2$ por (11), y así nuestra hipótesis en (12) debe ser incorrecta. Por tanto, concluimos que $w = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$, que es el valor de la función raíz cuadrada principal $z^{1/2}$ dada por (8).

Ya que $z^{1/2}$ es una función inversa de $f(z) = z^2$ definida en el conjunto $-\pi/2 < \arg(z) \leq \pi/2$, se tiene que el dominio y el rango de $z^{1/2}$ son el rango y el dominio de $f$, respectivamente. En particular, $\text{Rango}(z^{1/2}) = A$, es decir, el rango de $z^{1/2}$ es el conjunto de complejos $w$ que satisfacen $-\pi/2 < \arg(w) \leq \pi/2$. Para encontrar $\text{Dom}(z^{1/2})$ necesitamos encontrar el rango de $f$. En la página 75 vimos que $w = z^2$ mapea el semiplano derecho $\text{Re}(z) \geq 0$ en todo el plano complejo. Vea la figura 2.4.3. El conjunto $A$ es igual el semiplano derecho $\text{Re}(z) \geq 0$ excluyendo el conjunto de puntos del rayo que sale del origen y contiene al punto $-i$. Es decir, $A$ no incluye al punto $z = 0$ o los puntos que satisfacen $\arg(z) = -\pi/2$. Sin embargo, hemos visto que la imagen del conjunto $\arg(z) = \pi/2$ —el eje imaginario positivo— es el mismo que la imagen del conjunto $\arg(z) = -\pi/2$. Ambos conjuntos se mapean en el eje real negativo. Ya que el conjunto $\arg(z) = \pi/2$ está contenido en $A$, se tiene que la única diferencia entre la imagen del conjunto $A$ y la imagen del semiplano derecho $\text{Re}(z) \geq 0$, es la imagen del punto $z = 0$, que es el punto $w = 0$. Es decir, el conjunto $A$ definido por $-\pi/2 < \arg(z) \leq \pi/2$ se mapea en todo el plano complejo excluyendo al punto $w = 0$ por $w = z^2$, y así el dominio de $f^{-1}(z) = z^{1/2}$ es todo el plano complejo **C** excluyendo el 0. En resumen, hemos demostrado que la función raíz cuadrada principal $w = z^{1/2}$ mapea el plano complejo **C** excluyendo 0, en el conjunto definido por $-\pi/2 < \arg(w) \leq \pi/2$. Este mapeo está dibujado en la figura 2.4.13. La circunferencia $|z| = r$ que se muestra de color en la figura 2.4.13(a) se mapea en la semicircunferencia $|w| = \sqrt{r}$, $-\pi/2 < \arg(w) \leq \pi/2$, mostrado en negro en la figura 2.4.13(b) por $w = z^{1/2}$. Además, el eje negativo real que se muestra a color en la figura 2.4.13(a) se mapea por $w = z^{1/2}$ en el eje imaginario positivo que se muestra en negro en la figura 2.4.13(b). Por supuesto, si es necesario, la función raíz cuadrada principal se puede extender para incluir al punto 0 en su dominio.

**El mapeo $w = z^{1/2}$** Como un mapeo, la función $z^2$ eleva al cuadrado el módulo de un punto y duplica su argumento. Ya que la función raíz cuadra-




**(a)** Dominio de $z^{1/2}$

**(b)** Rango de $z^{1/2}$

Figura 2.4.13 La función raíz cuadrada principal $w = z^{1/2}$

da principal $z^{1/2}$ es una función inversa de $z^2$, se tiene que el mapeo $w = z^{1/2}$ toma la raíz cuadrada del módulo de un punto y divide a la mitad su argumento principal. Es decir, si $w = z^{1/2}$, entonces tenemos que $|w| = \sqrt{|z|}$ y $\text{Arg}(w) = \frac{1}{2}\text{Arg}(z)$. Estas relaciones son consecuencia directa de (7) y son útiles en la determinación de las imágenes de conjuntos bajo $w = z^{1/2}$.

### EJEMPLO 8 Imagen de un sector circular bajo $w = z^{1/2}$

Determine la imagen del conjunto $S$ definida por $|z| \leq 3$, $\pi/2 \leq \arg(z) \leq 3\pi/4$, bajo la función raíz cuadrada principal.

**Solución** Sea $S'$ la imagen de $S$ bajo $w = z^{1/2}$. Ya que $|z| \leq 3$ para puntos en $S$ y puesto que $z^{1/2}$ toma la raíz cuadrada del módulo de un punto, debemos tener que $|w| \leq \sqrt{3}$ para puntos $w$ en $S'$. Además, ya que $\pi/2 \leq \arg(z) \leq 3\pi/4$ para puntos en $S$ y ya que $z^{1/2}$ divide en dos al argumento de un punto, se tiene que $\pi/4 \leq \arg(w) \leq 3\pi/8$ para puntos $w$ en $S'$. Por tanto, hemos demostrado que el conjunto $S$ que se muestra a color en la figura 2.4.14(a) se mapea en el conjunto $S'$ que se muestra en gris en la figura 2.4.14(b) por $w = z^{1/2}$. ❑

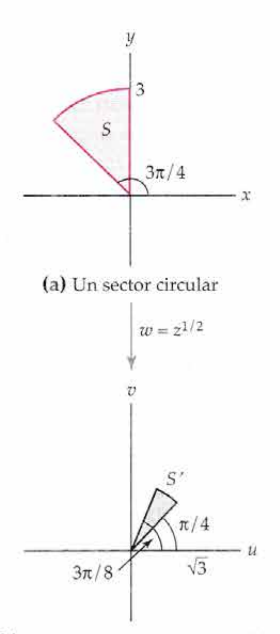



Figura 2.4.14 El mapeo $w = z^{1/2}$

## Función raíz *n*-ésima principal

Al modificar el argumento dado en el ejemplo 7 donde la función $f(z) = z^2$ es unívoca en el conjunto definido por $-\pi/2 < \arg(z) \leq \pi/2$, podemos demostrar que la función potencia compleja $f(z) = z^n$, $n > 2$, es unívoca en el conjunto definido por

$$-\frac{\pi}{n} < \arg(z) \leq \frac{\pi}{n}. \tag{13}$$

También es relativamente fácil ver que la imagen del conjunto definido por (13) bajo el mapeo $w = z^n$ es todo el plano complejo **C** excluyendo a $w = 0$. Por tanto, existe una función inversa bien definida para $f$. Análogo al caso $n = 2$, esta función inversa de $z^n$ se llama la **función raíz *n*-ésima principal** $z^{1/n}$. El dominio de $z^{1/n}$ es el conjunto de todos los números complejos $w$ distintos de cero, y el rango de $z^{1/n}$ es el conjunto de números complejos que satisfacen $-\pi/n < \arg(w) \leq \pi/n$. Una descripción puramente algebraica de la función raíz *n*-ésima principal está dada por la siguiente fórmula, que es análoga a (7).

**Definición 2.4.3 Funciones raíz $n$-ésima principal**

Para $n \geq 2$, la función $z^{1/n}$ definida por:

$$z^{1/n} = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\text{Arg}(z)/n}$$

se llama **función raíz $n$-ésima principal.**

Observe que la función raíz cuadrada principal $z^{1/2}$ de la definición 2.4,1 es simplemente un caso especial de (14) con $n = 2$. Observe también que en la definición 2.4.3 usamos el símbolo $z^{1/n}$ para representar algo distinto que el mismo símbolo utilizado en la sección 1.4. Como con el símbolo $z^{1/2}$, si $z^{1/n}$ representa a la raíz $n$-ésima principal o el conjunto de raíces $n$-ésimas principales deberá ser claro del contexto o bien ser enunciado explícitamente.

Haciendo $z = re^{i\theta}$ con $\theta = \text{Arg}(z)$ podemos también expresar la función raíz n-ésima principal como:

$$z^{1/n} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\theta/n}, \quad \theta = \text{Arg}(z). \tag{15}$$

**EJEMPLO 9 Valores de $z^{1/n}$**

Determine el valor de la función raíz $n$-ésima principal dada de $z^{1/n}$ en el punto $z$ dado.

**(a)** $z^{1/3}$; $z = i$ **(b)** $z^{1/5}$; $z = 1 - \sqrt{3}i$

**Solución** En cada inciso usamos (14).

**(a)** Para $z = i$, tenemos $|z| = 1$ y $\text{Arg}(z) = \pi/2$. Sustituyendo estos valores en (14) con $n = 3$ obtenemos:

$$i^{1/3} = \sqrt[3]{1}\, e^{i(\pi/2)/3} = e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

**(b)** Para $z = 1 - \sqrt{3}i$, tenemos $|z| = 2$ y $\text{Arg}(z) = -\pi/3$. Sustituyendo estos valores en (14) con $n = 5$ obtenemos:

$$\left(1 - \sqrt{3}i\right)^{1/5} = \sqrt[5]{2}\, e^{i(-\pi/3)/5} = \sqrt[5]{2}\, e^{-i(\pi/15)} \approx 1.1236 - 0.2388i.$$

❑

**Funciones multivaluadas** En la sección 1.4 vimos que un número complejo distinto de cero, $z$ tiene raíces $n$-ésimas distintas en el plano complejo. Esto significa que el proceso de "tomar la raíz $n$-ésima" de un número complejo $z$ *no* define una función compleja ya que le asigna un conjunto de $n$ números complejos al número complejo $z$. Introducimos el símbolo $z^{1/n}$ en la sección 1.4 para representar el conjunto que consiste de las raíces $n$-ésimas de $z$. Un proceso similar es encontrar el argumento de un número complejo $z$. Ya que el símbolo $\arg(z)$ representa un conjunto infinito de valores, que tampoco representan a una función compleja. Estos tipos de operaciones con números complejos son ejemplos de **funciones multivaluadas**.

Este término con frecuencia conduce a confusión, ya que una función multivaluada *no* es una función; una función, por definición, debe ser *univaluada*. Sin embargo, desafortunadamente el término *función multivaluada*, es clásico en análisis complejo y lo utilizaremos de aquí en adelante. Vamos a adoptar la siguiente notación funcional para funciones multivaluadas.

### *Notación: Funciones multivaluadas*

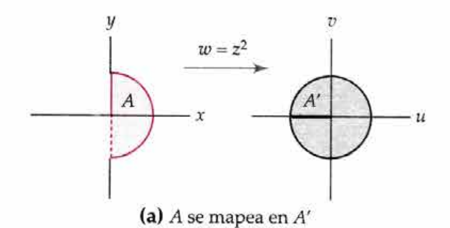
*Cuando se representen funciones multivaluadas en notación funcional, se utilizarán letras mayúsculas tales como $F(z) = z^{1/2}$ o $G(z) = \arg(z)$. Las letras minúsculas como f y g se reservarán para representar funciones.*

Esta notación evitará confusiones asociadas con los símbolos tales como $z^{1/n}$. Por ejemplo, debemos suponer que $g(z) = z^{1/3}$ se refiere a la función raíz cúbica principal definida por (14) con $n = 3$, mientras que, $G(z) = z^{1/3}$ representa una función multivaluada que asigna las tres raíces cúbicas de $z$ al valor $z$. Así, tenemos $g(i) = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$ del ejemplo 9(a) y$G(i) = \{\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i, -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i, -i\}$ del ejemplo 1 de la sección 1.4

## Observaciones

(*i*) En (5) de los ejercicios 1.4 definimos una potencia racional de $z$. Una manera de definir una función potencia $z^{m/n}$ donde $m/n$ es un número racional, es como una composición de la función raíz $n$-ésima principal y la función potencia $z^m$. Es decir, podemos definir $z^{m/n} = (z^{1/n})^m$. Así, para $m/n = 2/3$ y $z = 8i$ compruebe que $(8i)^{2/3} = 2 + 2\sqrt{3}i$. Por supuesto, utilizando una raíz diferente de la raíz $n$-ésima principal posiblemente da una función diferente.

(*ii*) Sin duda se ha dado cuenta que los mapeos complejos lineales que estudió en la sección 2.3 son mucho más fáciles de visualizar que los mapeos dados por las funciones complejas de potencia que estudió en esta sección. En parte los mapeos de funciones complejas de potencia son más intrincados, ya que estas funciones no son uno a uno. La visualización de un mapeo complejo que es **múltiple-a-uno** es difícil y se tiene que las funciones multivaluadas, que son "inversas" a las funciones múltiples-a-uno, también son difíciles de visualizar. Una técnica que se atribuye al matemático Bernhard Riemann (1826-1866) para la visualización de múltiples-a-uno y funciones multivaluadas es construir una **superficie de Riemann** para el mapeo. Ya que una descripción rigurosa de las superficies de Riemann está más allá del alcance de este libro, el análisis de estas superficies será informal.




**(a)** *A* se mapea en *A′*

y
$w = z^2$
v
B
x
B′
u

**(b)** *B* se mapea en *B′*

Figura 2.4.15 El mapeo $w = z^2$

Empezamos con una descripción de una superficie de Riemann para la función cuadrática compleja $f(z) = z^2$ definida en el disco unitario cerrado $|z| \leq 1$. En la página 81 vimos que $f(z) = z^2$ no es unívoca. Del ejemplo 7 se tiene que $f(z) = z^2$ es unívoca en el conjunto $A$ definido por $|z| \leq 1$, $-\pi/2 < \arg(z) \leq \pi/2$. Bajo el mapeo complejo $w = z^2$, el conjunto $A$ mostrado en color en la figura 2.4.15(a) está mapeado en el disco unitario cerrado $|w| \leq 1$ mostrado en color gris en la figura 2.4.15(a). De modo semejante, podemos demostrar que $w = z^2$ es unívoca mapeando el conjunto $B$ definido por $|z| \leq 1$ en $\pi/2 < \arg(z) \leq 3\pi/2$, sobre el disco unitario

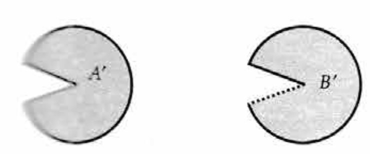
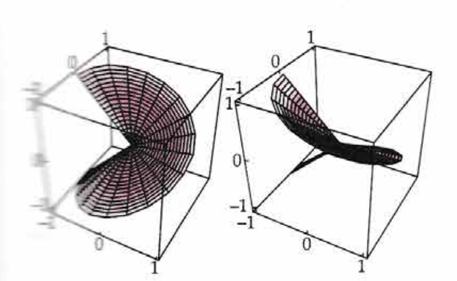
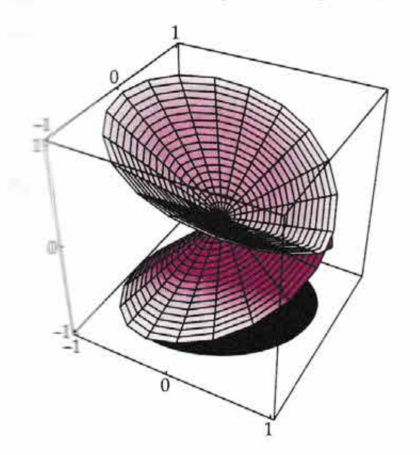


Figura 2.4.16 Los discos cortados $A'$ y $B'$



(a) Los discos cortados $A'$ y $B'$ en el espacio $xyz$

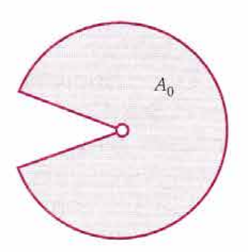


(b) Superficie de Riemann en el espacio $xyz$

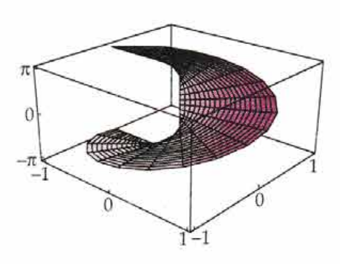
Figura 2.4.17 Una superficie de Riemann para $f(z) = z^2$

cerrado $|w| \leq 1$. Ver la figura 2.4.15(b). Como el disco unitario $|z| \leq 1$ es la unión de los conjuntos $A$ y $B$, la imagen del disco $|z| \leq 1$ bajo $w = z^2$ cubre el disco $|w| \leq 1$ dos veces (una por $A$ y la otra por $B$). Este cubrimiento lo visualizamos considerando *dos* discos imagen para $w = z^2$. Sea $A'$ la imagen de $A$ bajo $f$ y sea que $B'$ la imagen de $B$ bajo $f$. Ver figura 2.4.15. Ahora imagine que los discos $A'$ y $B'$ han sido cortados abriéndolos en dirección al eje de los reales negativos como se ve en la figura 2.4.16. Los bordes del corte en negro continuo de la figura 2.4.16 en los discos cortados $A'$ y $B'$ son las imágenes de los bordes mostrados en color de $A$ y $B$, respectivamente. De igual modo los bordes en negro punteado de $A'$ y $B'$ mostrados en la figura 2.4.16 son las imágenes de los bordes punteados de $A$ y $B$ respectivamente. Construimos una superficie de Riemannn para $f(z) = z^2$ apilando los discos cortados $A'$ y $B'$ uno sobre el otro en el espacio $xyz$ y acoplándolos por sus bordes. El borde negro continuo de $A'$ en la figura 2.4.16 es pegado al borde punteado de $B'$ en la figura 2.4.16 y el borde punteado de $A'$ es pegado al borde negro continuo de $B'$. Después de pegarlos de esta manera obtenemos la superficie de Riemann, que se muestra en la figura 2.4.17. Asumamos que esta superficie se encuentra directamente por arriba del disco unitario cerrado $|w| \leq 1$. Aunque $w = z^2$ no es un mapeo unívoco del disco unitario cerrado $|z| \leq 1$ sobre el disco unitario cerrado $|w| \leq 1$, si es un mapeo unívoco del disco unitario cerrado $|z| \leq 1$ sobre la superficie de Riemann que hemos construido. Más aún, la cubierta natural dos a uno del mapeo $w = z^2$ puede visualizarse mapeando el disco $|z| \leq 1$ sobre la superficie de Riemann y después proyectando los puntos de la superficie de Riemann verticalmente hacia abajo en el disco $|w| \leq 1$. Además, al invertir el orden de este procedimiento podemos utilizar la superficie de Riemann para ayudarnos a visualizar la funcion multivaluada $F(z) = z^{1/2}$.

Otra interesante superficie de Riemann es una para la función multivaluada $G(z) = \arg(z)$ definida en el disco perforado $0 < |z| \leq 1$. Para construir esta superficie, tomamos una copia del disco perforado $0 < |z| \leq 1$ y cortamos abriendo en la dirección del eje real negativo, figura 2.4.18(a). A este disco cortado le llamamos $A_0$ y representamos los puntos del dominio escribiéndolos en la notación exponencial $re^{i\theta}$ con $-\pi < \theta \leq \pi$. Tomamos otra copia del disco cortado, llamándola $A_1$, y representamos los puntos del dominio escribiéndolos por $re^{i\theta}$ con $\pi < \theta \leq 3\pi$. Similarmente, sea $A_{-1}$ el disco cortado que representa los puntos en el dominio escritos por $re^{i\theta}$ con $-3\pi < \theta \leq -\pi$. Continuando de esta manera se produce un conjunto infinito de discos..., $A_{-2}$, $A_{-1}$, $A_0$, $A_1$, $A_2$... En general, el disco cortado $A_n$ representa los puntos en el dominio $G$ expresados en la forma $re^{i\theta}$ con $(2n - 1)\pi < \theta \leq (2n + 1)\pi$. Ahora pongamos cada disco $A_n$ en el espacio $xyz$ de manera que el punto $re^{i\theta}$ con $(2n - 1)\pi < \theta \leq (2n + 1)\pi$ se encuentre a una altura $\theta$ directamente arriba del punto $re^{i\theta}$ en el plano $xy$. El disco cortado $A_0$ colocado en el espacio $xyz$ se muestra en la figura 2.4.18(b). La colección de todos los discos cortados en el espacio $xyz$ forma la superficie de Riemann para la función multivaluada $G(z) = \arg(z)$ que se ve en la figura 2.4.19. La superficie de Riemann indica cómo esta función multivaluada mapea el disco perforado $0 < |z| \leq 1$ sobre la recta real. Ahora bien, una recta vertical que pasa por cualquier punto $z$ en $0 < |z| \leq 1$ intersecta esta superficie de Riemann en un número infinito de puntos. Las alturas de estos puntos de intersección representan diferentes elecciones para el argumento de $z$. Así, al proyectar horizontalmente los puntos de intersección sobre el eje vertical, vemos un número infinito de imágenes de $G(z) = \arg(z)$.




**(a)** El disco cortado $A_0$




**(b)** $A_0$ colocado en el espacio $xyz$

**Figura 2.4.18** El disco cortado $A_0$

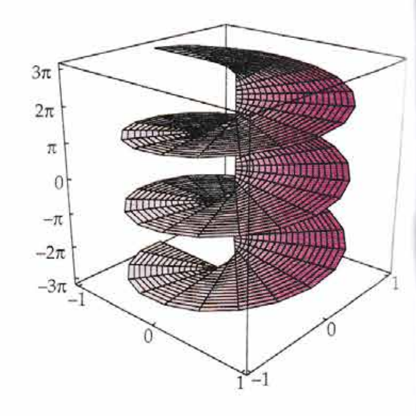



**Figura 2.4.19** La superficie de Riemann para $G(z) = \arg(z)$

**EJERCICIOS 2.4** *Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-8.*

## 2.4.1 La función potencia $z^n$

En los problemas 1 a 14 determine la imagen del conjunto dado bajo el mapeo $w = z^2$. Represente el mapeo dibujando el conjunto y su imagen.

**1.** el rayo $\arg(z) = \dfrac{\pi}{3}$

**2.** el rayo $\arg(z) = -\dfrac{3\pi}{4}$

**3.** la recta $x = 3$

**4.** la recta $y = -5$

**5.** la recta $y = -\dfrac{1}{4}$

**6.** la recta $x = \dfrac{3}{2}$

**7.** El eje imaginario positivo

**8.** la recta $y = x$

**9.** el arco circular arc $|z| = \dfrac{1}{2}$, $0 \leq \arg(z) \leq \pi$

**10.** el arco circular arc $|z| = \dfrac{4}{3}$, $-\dfrac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \dfrac{\pi}{6}$

**11.** el triángulo con vértices 0, 1 y $1 + i$

**12.** el triángulo con vértices 0, $1 + 2i$ y $-1 + 2i$

**13.** el cuadrado con vértices 0, 1, $1 + i$ e $i$

**14.** el polígono con vértices 0, 1, $1 + i$ y $-1 + i$

En los problemas 15 a 20 determine la imagen del conjunto dado bajo la composición dada de una función lineal con la función potencia cuadrada.

**15.** el rayo $\arg(z) = \dfrac{\pi}{3}$; $f(z) = 2z^2 + 1 - i$

**16.** el segmento de recta de 0 a $-1+ i$; $f(z) = \sqrt{2}z^2 + 2 - i$

**17.** la recta $x = 2$; $f(z) = iz^2 - 3$

**18.** la recta $y = -3$; $f(z) = -z^2 + i$

**19.** el arco circular arc $|z| = 2$, $0 \leq \arg(z) \leq \dfrac{\pi}{2}$; $f(z) = \frac{1}{4}e^{i\pi/4}z^2$

**20.** el triángulo con vértices 0, 1 y $1 + i$; $f(z) = -\frac{1}{4}iz^2 + 1$

**21.** Determine la imagen del rayo $\arg(z) = \pi/6$ bajo cada uno de los siguientes mapeos.

(**a**) $f(z) = z^3$ (**b**) $f(z) = z^4$ (**c**) $f(z) = z^5$

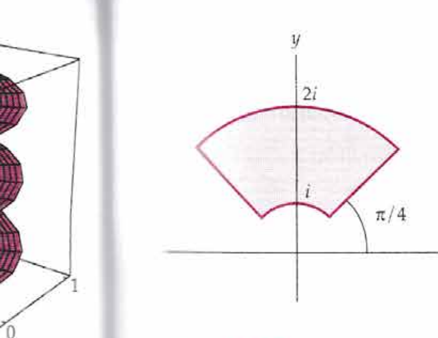



Figura 2.4.20 Figura para los problemas 23 a 24

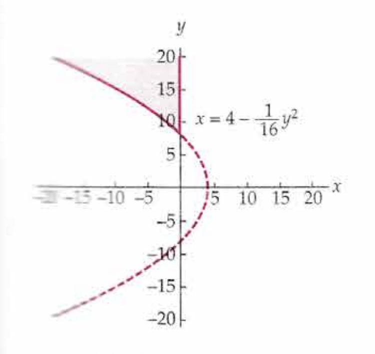



Figura 2.4.21 Figura para el problema 39

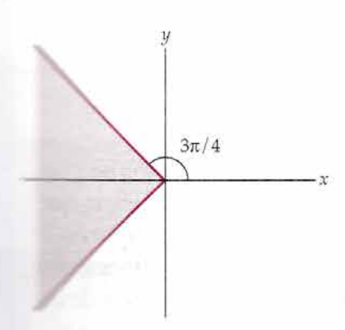



Figura 2.4.22 Figura para el problema 40

**22.** Determine la imagen del primer cuadrante del plano complejo bajo cada uno de los siguientes mapeos.
(**a**) $f(z) = z^2$ (**b**) $f(z) = z^3$ (**c**) $f(z) = z^4$

**23.** Determine la imagen de la región $1 \le |z| \le 2$, $\pi/4 \le \arg(z) \le 3\pi/4$ que se muestra en la figura 2.4.20 bajo cada uno de los siguientes mapeos.
(**a**) $f(z) = z^2$ (**b**) $f(z) = z^3$ (**c**) $f(z) = z^4$

**24.** Determine la imagen de la región que se muestra en la figura 2.4.20 bajo cada uno de los siguientes mapeos.
(**a**) $f(z) = 3z^2 + i$ (**b**) $f(z) = (i+1)z^3 + 1$ (**c**) $f(z) = \frac{1}{2}z^4 - i$

## 2.4.2 La función potencia $z^{1/n}$

En los problemas 25 a 30 utilice (14) para encontrar el valor de la función raíz $n$-ésima principal en el valor dado de $z$.

**25.** $z^{1/2}$, $z = -i$
**26.** $z^{1/2}$, $z = 2 + i$
**27.** $z^{1/3}$, $z = -1$
**28.** $z^{1/3}$, $z = -3 + 3i$
**29.** $z^{1/4}$, $z = -1 + \sqrt{3}i$
**30.** $z^{1/5}$, $z = -4\sqrt{3} + 4i$

En los problemas 31 a 38 determine la imagen del conjunto dado bajo el mapeo de la raíz cuadrada principal $w = z^{1/2}$. Represente el mapeo dibujando el conjunto y su imagen.

**31.** el rayo $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4}$
**32.** el rayo $\arg(z) = -\dfrac{2\pi}{3}$
**33.** el eje imaginario positivo
**34.** el eje real negativo
**35.** el arco $|z| = 9$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \arg(z) \le \pi$
**36.** el arco $|z| = \dfrac{4}{7}$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \arg(z) \le \dfrac{\pi}{4}$
**37.** la parábola $x = \dfrac{9}{4} - \dfrac{y^2}{9}$
**38.** la parábola $x = \dfrac{y^2}{10} - \dfrac{5}{2}$

**39.** Determine la imagen de la región que se muestra en la figura 2.4.21 bajo la función raíz cuadrada principal $w = z^{1/2}$.

**40.** Determine la imagen de la región que se muestra en la figura 2.4.22 bajo la función raíz cuadrada principal $w = z^{1/2}$. (¡Tenga cuidado cerca del eje real negativo!)

### Enfocando los conceptos

**41.** Use un procedimiento similar al que se utilizó en el ejemplo 2 para encontrar la imagen de la hipérbola $xy = k$, $k \ne 0$, bajo $w = z^2$.

**42.** Use un procedimiento similar al que se utilizó en el ejemplo 2 para encontrar la imagen de la hipérbola $x^2 - y^2 = k$, $k \ne 0$, bajo el mapeo $w = z^2$.

**43.** Determine dos conjuntos en el plano complejo que son mapeados en el rayo $\arg(w) = \pi/2$ con la función $w = z^2$.

**44.** Determine dos conjuntos en el plano complejo que se mapean sobre el conjunto acotado por las curvas $u = -v$, $u = 1 - \frac{1}{4}v^2$, y el eje real $v = 0$ con la función $w = z^2$.

**45.** En el ejemplo 2 se demostró que la imagen de una recta vertical $x = k$, $k \ne 0$, bajo $w = z^2$ es la parábola $u = k^2 - \dfrac{v^2}{4k^2}$. Utilice este resultado, sus conocimientos de mapeos lineales, y el hecho de que $w = -(iz)^2$ para demostrar que la imagen de una recta horizontal $y = k$, $k \ne 0$, es la parábola $u = -\left(k^2 - \dfrac{v^2}{4k^2}\right)$.

**46.** Determine tres conjuntos en el plano complejo que mapeen sobre el conjunto $\arg(w) = \pi$ bajo el mapeo $w = z^3$.

**47.** Determine cuatro conjuntos en el plano complejo que mapeen sobre la circunferencia $|w| = 4$ bajo el mapeo $w = z^4$.

**48.** Determine la imagen de la recta $y = mx$ bajo el mapeo $w = z^n$ para $n \geq 2$.

**49.** (**a**) Proceda como en el ejemplo 6 para demostrar que la función lineal compleja $f(z) = az + b$, $a \neq 0$, es unívoca en todo el plano complejo.

(**b**) Determine una fórmula para la función inversa de la función en (a).

**50.** (**a**) Proceda como en el ejemplo 6 para demostrar que la función compleja $f(z) = \dfrac{a}{z} + b$, $a \neq 0$, es unívoca en el conjunto $|z| > 0$.

(**b**) Determine una fórmula para la función inversa de la función en (a).

**51.** Determine la imagen del semiplano $\text{Im}(z) \geq 0$ bajo cada una de las siguientes funciones de raíces $n$-ésimas principales.

(**a**) $f(z) = z^{1/2}$ (**b**) $f(z) = z^{1/3}$ (**c**) $f(z) = z^{1/4}$

**52.** Determine la imagen de la región $|z| \leq 8$, $\pi/2 \leq \arg(z) \leq 3\pi/4$, bajo cada una de las siguientes funciones raíces $n$-ésimas principales.

(**a**) $f(z) = z^{1/2}$ (**b**) $f(z) = z^{1/3}$ (**c**) $f(z) = z^{1/4}$

**53.** Determine una función que mapee todo el plano complejo excluyendo a 0 sobre el conjunto $2\pi/3 \leq \arg(w) < 4\pi/3$.

**54.** Lea el inciso (*ii*) de las Observaciones, y después describa cómo construir una superficie de Riemann para la función $f(z) = z^3$.

En los problemas 55 y 56, (**a**) utilice mapeos para determinar las cotas superior e inferior en el módulo de la función $f(z)$ definida en el conjunto dado $S$. Es decir, determine valores reales $L$ y $M$ tales que $L \leq |f(z)| \leq M$ para toda $z$ en $S$ y (**b**) determine los valores complejos $z_0$ y $z_1$ en $S$ tal que $f(z_0) = L$ y $f(z_1) = M$.

**55.** $f(z) = 2iz^2 - i$; $S$ es el cuarto de disco $|z| \leq 2$, $0 \leq \arg(z) \leq \pi/2$.

**56.** $f(z) = \frac{1}{3}z^2 + 1 - i$; $S$ es el conjunto definido por $2 \leq |z| \leq 3$, $0 \leq \arg(z) \leq \pi$.

## 2.5 Función recíproca

***Para el profesor:*** En esta sección, estudiamos el mapeo complejo $w = 1/z$. Esta sección se puede omitir sin afectar el desarrollo del tema en los capítulos 3 a 6. Sin embargo, los temas que se presentan en esta sección se usarán en el estudio de los mapeos conformes del capítulo 7.

En las secciones 2.3 y 2.4 examinamos algunos tipos especiales de funciones polinomiales complejas como mapeos del plano complejo. En analogía con las funciones reales, definimos una **función racional compleja** como una función de la forma $f(z) = p(z)/q(z)$ donde $p(z)$ y $q(z)$ son funciones polinomiales complejas. En esta sección, estudiamos la función racional compleja más básica, la función recíproca $1/z$, como un mapeo del plano complejo. Una importante propiedad del mapeo recíproco es que este mapea ciertas rectas sobre circunferencias.

**Función recíproca** La función $1/z$, cuyo dominio es el conjunto de todos los números complejos distintos de cero, se llama **función recíproca**. Para estudiar la función recíproca como un mapeo complejo $w = 1/z$, comenzamos por expresar esta función en notación exponencial. Dada $z \neq 0$, si hacemos $z = re^{i\theta}$, entonces obtenemos:

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}. \tag{1}$$

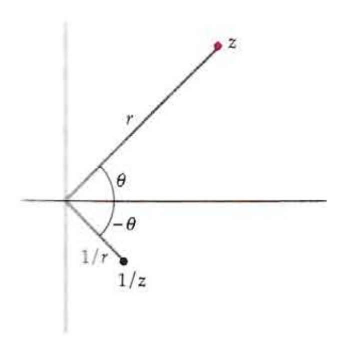



Figura 2.5.1 El mapeo recíproco

De (1), vemos que el módulo de $w$ es el recíproco del módulo de $z$ y que el argumento de $w$ es el negativo del argumento de $z$. Por tanto, la función recíproca mapea un punto en el plano $z$ con coordenadas polares $(r, \theta)$ sobre un punto en el plano $w$ con coordenadas polares $(1/r, -\theta)$. En la figura 2.5.1, ilustramos la relación entre $z$ y $w = 1/z$ en una sola copia del plano complejo. Como veremos, una forma simple de visualizar la función recíproca como un mapeo complejo es como una composición de *inversión en el círculo unitario* seguido de una *reflexión a través del eje real*. Ahora procedemos a definir y analizar cada uno de estos mapeos.

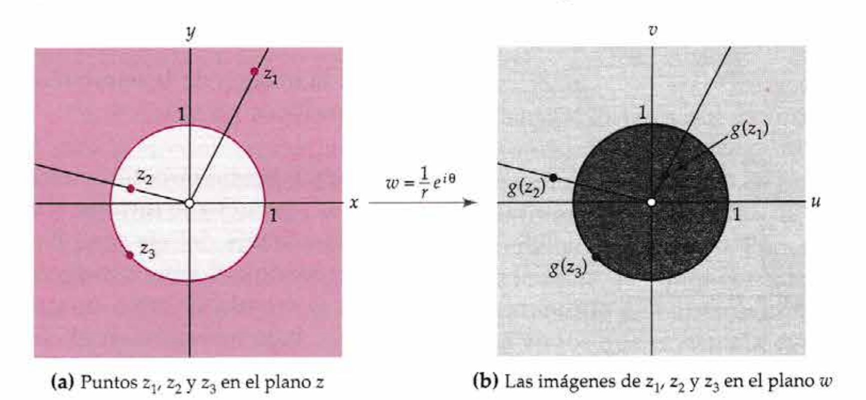
## Inversión en el círculo unitario

La función

$$g(z) = \frac{1}{r}e^{i\theta}, \tag{2}$$

cuyo dominio es el conjunto de todos los números complejos distintos de cero, se llama **inversión en el círculo unitario**. Describiremos este mapeo considerando por separado las imágenes de puntos *en* la circunferencia del círculo unitario, los puntos *fuera* del círculo unitario, y los puntos *dentro* del círculo unitario. Considere primero un punto $z$ en la circunferencia del círculo unitario. Ya que $z = 1 \cdot e^{i\theta}$, se sigue de (2) que $g(z) = \frac{1}{1}e^{i\theta} = z$. Por tanto, cada punto en la circunferencia del círculo unitario se mapea en sí mismo con $g$. Si, por otra parte, $z$ es un número complejo distinto de cero que no se encuentra en la circunferencia del círculo unitario, entonces podemos escribir a $z$ como $z = re^{i\theta}$ con $r \neq 1$. Cuando $r > 1$ (es decir, cuando $z$ está fuera del círculo unitario) tenemos que $|g(z)| = \left|\frac{1}{r}e^{i\theta}\right| = \frac{1}{r} < 1$. Por lo que, la imagen bajo $g$ de un punto $z$ fuera del círculo unitario es un punto dentro del círculo unitario. Por el contrario, si $r < 1$ (es decir, si $z$ está dentro del círculo unitario), entonces $|g(z)| = \frac{1}{r} > 1$, y concluimos que si $z$ está dentro del círculo unitario, entonces su imagen bajo $g$ está fuera del círculo unitario. El mapeo $w = e^{i\theta}/r$ está representado en la figura 2.5.2. La circunferencia $|z| = 1$ que se muestra a color en la figura 2.5.2(a) se mapea en la circunferencia $|w| = 1$ mostrada en negro en la figura 2.5.2(b). Además, $w = e^{i\theta}/r$ mapea la región mostrada en color claro en la figura 2.5.2(a) en la región que se muestra en gris claro en la figura 2.5.2(b), y este se mapea en la región que se muestra en color oscuro de la figura 2.5.2(a) en la región que se muestra en gris oscuro en la figura 2.5.2(b).

Finalizamos nuestro análisis de inversión en el círculo unitario observando de (2) que los argumentos de $z$ y $g(z)$ son iguales. Se tiene que si $z_1 \neq 0$ es un punto con módulo $r$ en el plano $z$, entonces $g(z_1)$ es el único punto en el plano




**(a)** Puntos $z_1$, $z_2$ y $z_3$ en el plano $z$

**(b)** Las imágenes de $z_1$, $z_2$ y $z_3$ en el plano $w$

Figura 2.5.2 Inversión en el círculo unitario

$w$ con módulo $1/r$ que se encuentra en un rayo que sale del origen haciendo un ángulo de $\arg(z_0)$ con el eje $u$ positivo. Vea la figura 2.5.2. Además, ya que el módulo de $z$ y de $g(z)$ son inversamente proporcionales, entre más alejado esté el punto $z$ de 0 en el plano $z$, más cerca estará su imagen $g(z)$ de 0 en el plano $w$, y por el contrario, cuanto más cerca esté $z$ de 0, más lejos estará $g(z)$ de 0.

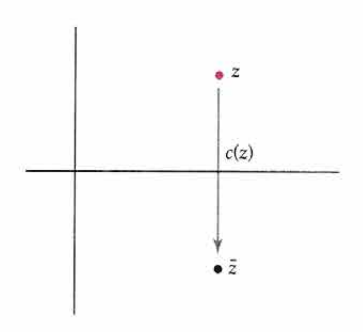
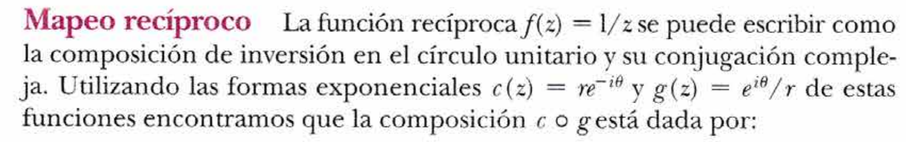


Figura 2.5.3 Conjugación compleja

**Conjugación compleja** El segundo mapeo complejo que es útil para describir el mapeo recíproco es una reflexión a través del eje real. Bajo este mapeo la imagen del punto $(x, y)$ es $(x, -y)$. Es fácil comprobar que este mapeo complejo está dado por la función $c(z) = \bar{z}$, la que llamamos **función conjugación compleja**. En la figura 2.5.3, ilustramos la relación entre $z$ y su imagen $c(z)$ en una sola copia del plano complejo. Sustituyendo el símbolo $z$ con $re^{i\theta}$ también podemos expresar la función conjugación compleja como $c(z) = \overline{re^{i\theta}} = \bar{r}\overline{e^{i\theta}}$. Ya que $r$ es real, tenemos $\bar{r} = r$ además, del problema 34 de los ejercicios 2.1, tenemos $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$. Por tanto, la función conjugación compleja se puede escribir como $c(z) = \bar{z} = re^{-i\theta}$.



**Mapeo recíproco** La función recíproca $f(z) = 1/z$ se puede escribir como la composición de inversión en el círculo unitario y su conjugación compleja. Utilizando las formas exponenciales $c(z) = re^{-i\theta}$ y $g(z) = e^{i\theta}/r$ de estas funciones encontramos que la composición $c \circ g$ está dada por:

$$c(g(z)) = c\left(\frac{1}{r}e^{i\theta}\right) = \frac{1}{r}e^{-i\theta}.$$

Al comparar esta expresión con (1), vemos que $c(g(z)) = f(z) = 1/z$. Esto implica que, como un mapeo, la función recíproca primero invierte en el círculo unitario, y después refleja a través del eje real.

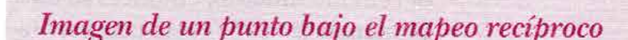


***Imagen de un punto bajo el mapeo recíproco***

*Sea $z_0$ un punto distinto de cero en el plano complejo. Si el punto $w_0 = 1/z_0$ se dibuja en la misma copia del plano complejo como $z_0$, entonces $w_0$ es el punto obtenido al:*

*(i) invertir $z_0$ en el círculo unitario, y después*

*(ii) reflejar el resultado a través del eje real.*

**EJEMPLO 1 Imagen de un semicírculo bajo $w = 1/z$**

Determine la imagen de la semicircunferencia $|z| = 2$, $0 \leq \arg(z) \leq \pi$, bajo el mapeo recíproco $w = 1/z$.

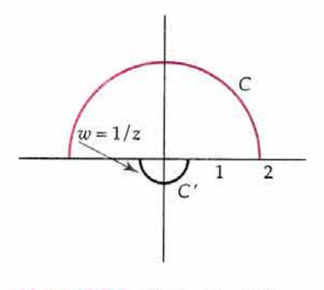


Figura 2.5.4 El mapeo recíproco

**Solución** Sea $C$ la semicircunferencia y sea $C'$ su imagen bajo $w = 1/z$. Para encontrar $C'$, primero se invierte $C$ en el círculo unitario, luego reflejamos el resultado a través del eje real. Bajo inversión en el círculo unitario, los puntos con módulo 2 tienen imágenes con módulo $\frac{1}{2}$. Por otra parte, la inversión en el círculo unitario no cambia los argumentos. Por lo tanto, la imagen de $C$ bajo inversión en el círculo unitario es la semicircunferencia $|w| = \frac{1}{2}$, $0 \leq \arg(w) \leq \pi$. Reflejando este conjunto a través del eje real negará el argumento de un punto pero no cambia su módulo. De allí que la imagen después de esta reflexión, a través del eje real, es la semicircunferencia

dada por $|w| = \frac{1}{2}$, $-\pi \leq \arg(w) \leq 0$. Representamos este mapeo en la figura 2.5.4 utilizando una sola copia del plano del complejo. La semicircunferencia $C$ que se muestra en color se mapea en la semicircunferencia $C'$ que se muestra en negro en la figura 2.5.4 con $w = 1/z$. ❑

Utilizando un razonamiento similar al del ejemplo 1 podemos demostrar que la función recíproca mapea la circunferencia $|z| = k$, $k \neq 0$, en la circunferencia $|w| = 1/k$. Como el ejemplo siguiente ilustra, la función recíproca también mapea ciertas rectas en circunferencias.



**EJEMPLO 2 Imagen de una recta bajo $w = 1/z$**

Determine la imagen de la recta vertical $x = 1$ bajo el mapeo recíproco $w = 1/z$.

**Solución** La recta vertical $x = 1$ se compone del conjunto de puntos de $z = 1 + iy$, $-\infty < y < \infty$. Después de reemplazar el símbolo $z$ con $1 + iy$ en $w = 1/z$ y, simplificando, obtenemos:

$$w = \frac{1}{1+iy} = \frac{1}{1+y^2} - \frac{y}{1+y^2}i.$$

Se tiene que la imagen de la recta vertical $x = 1$ bajo $w = 1/z$ consta de todos los puntos $u + iv$ que satisfacen:

$$u = \frac{1}{1+y^2}, \quad v = \frac{-y}{1+y^2} \quad \text{y} \quad -\infty < y < \infty. \tag{3}$$

Podemos describir esta imagen con una sola ecuación cartesiana eliminando la variable $y$. Observamos de (3) que $v = -yu$. La primera ecuación en (3) implica que $u \neq 0$, y así podemos reescribir esta ecuación como $y = -v/u$. Ahora sustituimos $y = -v/u$ en la primera ecuación de (3) y simplificamos para obtener la ecuación de segundo grado $u^2 - u + v^2 = 0$. Después de completar el cuadrado en la variable $u$, vemos que la imagen dada en (3) está dada por:

$$\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4}, \quad u \neq 0. \tag{4}$$

La ecuación en (4) define una circunferencia centrada en $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ con radio $\frac{1}{2}$. Sin embargo, ya que $u \neq 0$, el punto $(0, 0)$ *no* está en la imagen. Utilizando la variable compleja $w = u + iv$, podemos describir esta imagen con $\left|w - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$, $w \neq 0$. Representamos este mapeo utilizando una sola copia del plano complejo. En la figura 2.5.5, la recta $x = 1$ que se muestra a color se mapea sobre la circunferencia $\left|w - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ excluyendo el punto $w = 0$ que se muestra en negro con $w = 1/z$. ❑

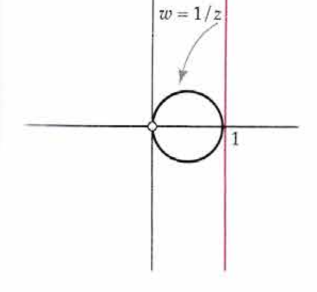



Figura 2.5.5 El mapeo recíproco

La solución en el ejemplo 2 es poco satisfactoria ya que la imagen no es toda la circunferencia $\left|w - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$. Esto ocurrió ya que los puntos en la recta $x = 1$ se mapean con módulos extremadamente grandes en puntos de la circunferencia $\left|w - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ que están extremadamente cerca de 0, pero no hay un punto en la recta $x = 1$ que en realidad mapea en 0. Para obtener toda la circunferencia como la imagen de la recta debemos considerar a la función recíproca definida en el sistema extendido de números complejos.

En las observaciones en la sección 1.5 vimos que el sistema extendido de números complejos se compone de todos los puntos en el plano complejo junto con el punto ideal $\infty$. En el contexto de mapeos este conjunto de puntos comúnmente se conoce como **plano complejo extendido**. La

importante propiedad del plano complejo extendido para nuestro análisis en este momento es la correspondencia, que se describió en la sección 1.5, entre los puntos del plano complejo extendido y los puntos del plano complejo. En particular, los puntos del plano complejo extendido que están cerca del punto ideal $\infty$ corresponden a puntos con módulo extremadamente grande en el plano complejo.

Usamos esta correspondencia para ampliar la función recíproca a una función cuyo dominio y rango son el plano complejo extendido. Ya que (1) define la función recíproca para todos los puntos $z \neq 0$ o $\infty$ en el plano complejo extendido, extendemos esta función especificando las imágenes de 0 y de $\infty$. Una forma natural para determinar la imagen de estos puntos es considerar las imágenes de puntos cercanos. Observe si $z = re^{i\theta}$ es un punto que está cerca de 0, entonces $r$ es un pequeño número real positivo. Se tiene que $w = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$ es un punto cuyo módulo $1/r$ es grande. Es decir, en el plano complejo extendido, si $z$ es un punto cerca de 0, entonces $w = 1/z$ es un punto que está cerca del punto ideal $\infty$. Por tanto, es razonable definir la función recíproca $f(z) = 1/z$ en el plano complejo extendido de modo que $f(0) = \infty$. En una forma similar, si observamos que $z$ es un punto cerca de $\infty$ en el plano complejo extendido, entonces $f(z)$ es un punto cerca de 0. Por lo que también es razonable definir la función recíproca en el plano complejo extendido tal que $f(\infty) = 0$.

**Definición 2.5.1 La función recíproca en el plano complejo extendido**

La **función recíproca en el plano complejo extendido** es la función definida por:

$$f(z) = \begin{cases} 1/z, & \text{si } z \neq 0 \text{ o } \infty \\ \infty, & \text{si } z = 0 \\ 0, & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

Más que introducir una nueva notación, vamos a dejar que la notación $1/z$ represente tanto a la función recíproca como a la función recíproca en el plano complejo extendido. Cada vez que se mencione el punto ideal $\infty$, se debe suponer que $1/z$ representa a la función recíproca definida en el plano complejo extendido.

**EJEMPLO 3 Imagen de una recta bajo $w = 1/z$**

Determine la imagen de la recta vertical $x = 1$ bajo la función recíproca en el plano complejo extendido.

**Solución** Comenzamos por indicar que ya que la recta $x = 1$ es un conjunto no acotado en el plano complejo, se tiene que el punto ideal $\infty$ está en la recta en el plano complejo extendido. En el ejemplo 2 encontramos que la imagen de los puntos $z \neq \infty$ en la recta $x = 1$ es la circunferencia $\left|w - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ excluyendo al punto $w = 0$. Por lo que, sólo necesitamos determinar la imagen del punto ideal para determinar la imagen de la recta bajo la función recíproca en el plano complejo extendido. De la definición 2.5.1 tenemos que $f(\infty) = 0$, y así $w = 0$ es la imagen del punto ideal. Éste "llena" el punto que falta en la circunferencia $\left|w - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$. Por tanto, la recta vertical $x = 1$

se mapea en toda la circunferencia $\left|w - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ con el mapeo recíproco en el plano complejo extendido. Este mapeo se puede representar en la figura 2.5.5 con el "hueco" en $w = 0$ lleno. ❑

Ya que el punto ideal $\infty$ está en cada recta vertical en el plano complejo extendido, tenemos que la imagen de cualquier recta vertical $x = k$ con $k \neq 0$ es toda la circunferencia $\left|w - \dfrac{1}{2k}\right| = \left|\dfrac{1}{2k}\right|$ bajo la función recíproca en el plano complejo extendido. Vea el problema 23 en los ejercicios 2.5. En una forma similar, también podemos demostrar que las rectas horizontales se mapean a las circunferencias con $w = 1/z$. Ahora resumimos estas propiedades del mapeo de $w = 1/z$.

### *Rectas mapeadas a circunferencias con $w = 1/z$*

*La función recíproca en el plano complejo extendido mapea:*

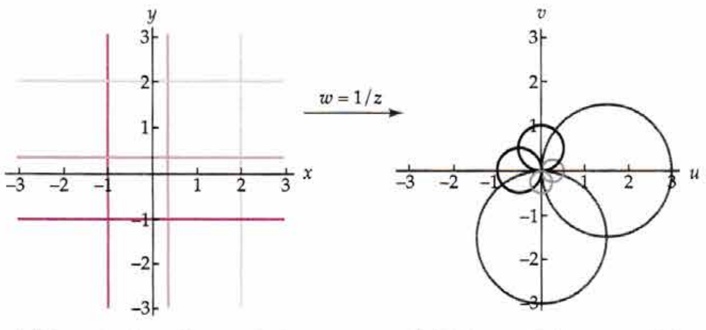
(*i*) *la recta vertical* $x = k$ *con* $k \neq 0$ *sobre la circunferencia*

$$\left|w - \frac{1}{2k}\right| = \left|\frac{1}{2k}\right| \quad \text{y} \tag{5}$$

(*ii*) *la recta horizontal* $y = k$ *con* $k \neq 0$ *sobre la circunferencia*

$$\left|w + \frac{1}{2k}i\right| = \left|\frac{1}{2k}\right|. \tag{6}$$

Estas dos propiedades de los mapeos de la función recíproca, se muestran en la figura 2.5.6. Las rectas verticales $x = k$, $k \neq 0$, que se muestran a color en la figura 2.5.6(a) se mapean con $w = 1/z$ en las circunferencias centradas en el eje real que se muestra en negro en la figura 2.5.6(b). La imagen de la recta $x = k$, $k \neq 0$, contiene al punto $(1/k, 0)$. Así, vemos que la recta vertical $x = 2$ que se muestra en la figura 2.5.6(a) mapea sobre la circunferencia centrada en el eje real que contiene a $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ mostrada en la figura 2.5.6(b), y así sucesivamente. Del mismo modo, las rectas horizontales $y = k$, $k \neq 0$, que se muestran a color en la figura 2.5.6(a) se mapean con $w = 1/z$ sobre las circunferencias centradas en el eje imaginario que se muestra en negro en la figura 2.5.6(b). Ya que la imagen de la recta $y = k$, $k \neq 0$, contiene al punto



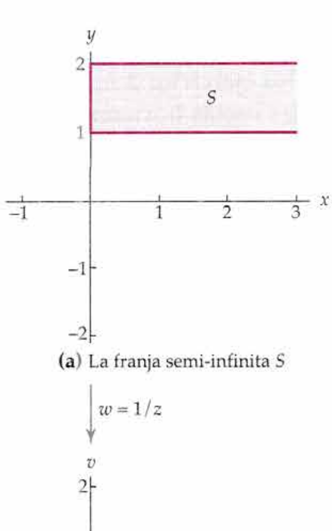

**(a)** Rectas horizontales y verticales **(b)** Imágenes de las rectas en (a)

Figura 2.5.6 Imágenes de las rectas horizontales y verticales bajo el mapeo recíproco

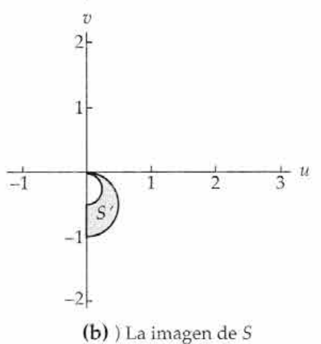
$(0, -1/k)$, tenemos que la recta $y = 2$ que se muestra en la figura 2.5.6(a) es la circunferencia centrada en el en el eje imaginario que contiene al punto $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ mostrado en la figura 2.5.6(b), y así sucesivamente.

### EJEMPLO 4 Mapeo de una tira semi-infinita

Determine la imagen de la franja horizontal semi-infinita definida por $1 \leq y \leq 2$, $x \geq 0$, bajo $w = 1/z$.



(a) La franja semi-infinita $S$



(b) ) La imagen de $S$

**Figura 2.5.7** El mapeo recíproco

**Solución** Sea $S$ la franja horizontal semi-infinita definida por $1 \leq y \leq 2$, $x \geq 0$. La frontera de $S$ consta del segmento de recta $x = 0$, $1 \leq y \leq 2$, y las dos semirrectas $y = 1$ y $y = 2$, $0 \leq x < \infty$. Primero, determine las imágenes de estas curvas frontera. El segmento de recta $x = 0$, $1 \leq y \leq 2$, se puede describir también como el conjunto $1 \leq |z| \leq 2$, $\arg(z) = \pi/2$. Ya que $w = 1/z$, se tiene que $\frac{1}{2} \leq |w| \leq 1$. Además, de (1) tenemos que $\arg(w) = \arg(1/z) = -\arg(z)$, y así, $\arg(w) = -\pi/2$. Por lo que, la imagen del segmento de recta $x = 0$, $1 \leq y \leq 2$, es el segmento de recta en el eje de $v$ de $-\frac{1}{2}i$ a $-i$. Ahora consideramos la semirrecta horizontal $y = 1$, $0 \leq x < \infty$. Identificando $k = 1$ en (6), vemos que la imagen de esta semirrecta es un arco en la circunferencia $\left|w + \frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{2}$. Ya que los argumentos de los puntos de la semirrecta satisfacen $0 < \arg(z) \leq \pi/2$, se sigue que los argumentos de los puntos en su imagen satisfacen $-\pi/2 \leq \arg(w) < 0$. Por otra parte, el punto ideal $\infty$ está en la semirrecta, y así el punto $w = 0$ está en su imagen. Por lo que, vemos que la imagen de la semirrecta $y = 1$, $0 \leq x < \infty$, es el arco de circunferencia definido por $\left|w + \frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{2}$, $-\pi/2 \leq \arg(w) \leq 0$. De una forma similar, encontramos que la imagen de la semirrecta horizontal $y = 2$, $0 \leq x < \infty$, es el arco de circunferencia arc $\left|w + \frac{1}{4}i\right| = \frac{1}{4}$, $-\pi/2 \leq \arg(w) \leq 0$. Concluimos observando que, de (6), cada semirrecta $y = k$, $1 \leq k \leq 2$, se encuentra entre las semirrectas frontera $y = 1$ y $y = 2$ en la franja $S$ que mapea sobre un arco de circunferencia arc $\left|w + \dfrac{1}{2k}i\right| = \dfrac{1}{2k}$, $-\pi/2 \leq \arg(w) \leq 0$, que se encuentra entre los arcos de circunferencia $\left|w + \frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{2}$ y $\left|w + \frac{1}{4}i\right| = \frac{1}{4}$, $-\pi/2 \leq \arg(w) \leq 0$. Por tanto, la franja semi-infinita $S$ que se muestra a color en la figura 2.5.7(a) se mapea en el conjunto $S'$ que se muestra en gris en la figura 2.5.7 (b) por el mapeo complejo $w = 1/z$. ❑

## Observaciones

Es fácil comprobar que la función recíproca $f(z) = 1/z$ es unívoca. Por tanto, $f$ tiene una función inversa bien definida $f^{-1}$. Encontramos una fórmula para la función inversa $f^{-1}(z)$ al resolver la ecuación $z = f(w)$ para $w$. Obviamente, esta da $f^{-1}(z) = 1/z$. Esta observación amplía nuestro entendimiento del mapeo complejo $w = 1/z$. Por ejemplo, hemos visto que la imagen de la recta $x = 1$ bajo el mapeo recíproco es la circunferencia $\left|w - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$. Puesto que $f^{-1}(z) = 1/z = f(z)$, entonces se tiene que la imagen de la circunferencia $\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ bajo el mapeo recíproco es la recta $u = 1$. De manera similar, vemos que las circunferencias $\left|z - \dfrac{1}{2k}\right| = \left|\dfrac{1}{2k}\right|$ y $\left|z + \dfrac{1}{2k}i\right| = \left|\dfrac{1}{2k}\right|$ se mapean en las rectas $x = k$ y $y = k$, respectivamente.

## EJERCICIOS 2.5 *Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-8.*

En los problemas 1 a 10 determine la imagen del conjunto bajo el mapeo recíproco $w = 1/z$ en el plano complejo extendido.

1. la circunferencia $|z| = 5$
2. la semicircunferencia $|z| = \frac{1}{2}$, $\pi/2 \leq \arg(z) \leq 3\pi/2$
3. la semicircunferencia $|z| = 3$, $-\pi/4 \leq \arg(z) \leq 3\pi/4$
4. el cuarto de circunferencia $|z| = \frac{1}{4}$, $\pi/2 \leq \arg(z) \leq \pi$
5. el anillo $\frac{1}{3} \leq |z| \leq 2$
6. la región $1 \leq |z| \leq 4$, $0 \leq \arg(z) \leq 2\pi/3$
7. el rayo $\arg(z) = \pi/4$
8. el segmento de recta de $-1$ a $1$ en el eje real excluyendo al punto $z = 0$
9. la recta $y = 4$
10. la recta $x = \frac{1}{6}$

En los problemas 11 a 14 utilice las Observaciones del final de la sección 2.5 para encontrar la imagen del conjunto dado bajo el mapeo recíproco $w = 1/z$ en el plano complejo extendido

11. la circunferencia $|z + i| = 1$
12. la circunferencia $|z + \frac{1}{3}i| = \frac{1}{3}$
13. la circunferencia $|z - 2| = 2$
14. la circunferencia $|z + \frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$

En los problemas 15 al 18, determine la imagen del conjunto dado $S$ bajo el mapeo $w = 1/z$ en el plano complejo extendido.

15.

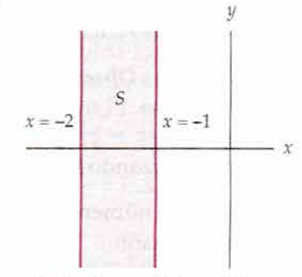



Figura 2.5.8 Figura del problema 15

16.

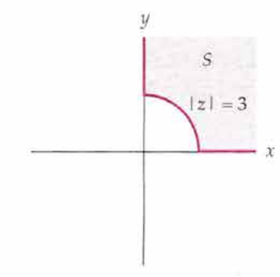



Figura 2.5.9 Figura del problema 16

17.

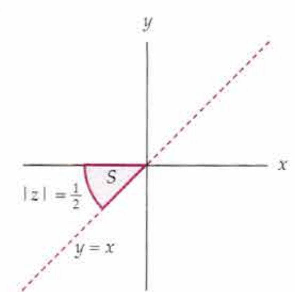



Figura 2.5.10 Figura del problema 17

18.

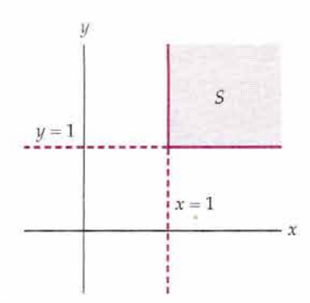



Figura 2.5.11 Figura del problema 18

19. Considere la función $h(z) = \dfrac{2i}{z} + 1$ definida en el plano complejo extendido.
    (**a**) Utilizando el hecho de que $h$ es una composición de la función recíproca $f(z) = 1/z$ y la lineal función $g(z) = 2iz + 1$, es decir, $h(z) = g(f(z))$, describa con palabras la acción del mapeo $w = h(z)$.
    (**b**) Determine la imagen de la recta $x = 4$ bajo $w = h(z)$.
    (**c**) Determine la imagen de la circunferencia $|z + 2| = 2$ bajo $w = h(z)$.

**20.** Considere la función $h(z) = \dfrac{1}{2iz - 1}$ definida en el plano complejo extendido.

(**a**) Utilizando el hecho de que $h$ es una composición de la función lineal $g(z) = 2iz - 1$ y de la función recíproca $f(z) = 1/z$, es decir, $h(z) = f(g(z))$, describa con palabras la acción del mapeo $w = h(z)$.

(**b**) Determine la imagen de la recta $y = 1$ bajo $w = h(z)$.

(**c**) Determine la imagen de la circunferencia $|z + i| = \frac{1}{2}$ bajo $w = h(z)$.

**21.** Considere la función $h(z) = 1/z^2$ definida en el plano complejo extendido.

(**a**) Escriba $h$ como una composición de la función recíproca y la función potencia cuadrada.

(**b**) Determine la imagen de la circunferencia $|z + \frac{1}{2}i| = \frac{1}{2}$ bajo el mapeo $w = h(z)$.

(**c**) Determine la imagen de la circunferencia $|z - 1| = 1$ bajo el mapeo $w = h(z)$.

**22.** Considere el mapeo $h(z) = \dfrac{3i}{z^2} + 1 + i$ definido en el plano complejo extendido.

(**a**) Escriba $h$ como una composición de una función lineal, de la recíproca, y de la función potencia cuadrada.

(**b**) Determine la imagen de la circunferencia $|z + \frac{1}{2}i| = \frac{1}{2}$ bajo el mapeo $w = h(z)$.

(**c**) Determine la imagen de la circunferencia $|z - 1| = 1$ bajo el mapeo $w = h(z)$.

## Enfocando los conceptos

**23.** Demuestre que la imagen de la recta $x = k$, $x \neq 0$, bajo el mapeo recíproco definido en el plano complejo extendido es la circunferencia $\left|w - \dfrac{1}{2k}\right| = \left|\dfrac{1}{2k}\right|$.

**24.** De acuerdo con las Observaciones de la sección 2.5, ya que $f(z) = 1/z$ es su propia función inversa, el mapeo $w = 1/z$ en el plano complejo extendido mapea la circunferencia $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ en la recta $\text{Re}(w) = 1$. Compruebe este hecho directamente utilizando las partes real e imaginaria de $f$, como en el ejemplo 1.

**25.** Si $A$, $B$, $C$ y $D$ son números reales, entonces el conjunto de puntos en el plano satisfacen la ecuación:

$$A\left(x^2 + y^2\right) + Bx + Cy + D = 0 \tag{7}$$

que se llama **circunferencia generalizada**.

(**a**) Demuestre que si $A = 0$, entonces la circunferencia generalizada es una recta.

(**b**) Suponga que $A \neq 0$ y sea $\Delta = B^2 + C^2 - 4AD$. Complete el cuadrado en $x$ y en $y$ para demostrar que una circunferencia generalizada es una circunferencia centrada en $\left(\dfrac{-B}{2A}, \dfrac{-C}{2A}\right)$ con radio $\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2A}$ suponiendo que $\Delta > 0$. (Si $\Delta < 0$, con frecuencia la circunferencia generalizada es llamada *circunferencia imaginaria*).

**26.** En este problema demostraremos que la imagen de una circunferencia generalizada (7) bajo el mapeo recíproco $w = 1/z$ es una circunferencia generalizada.

(**a**) Reescriba (7) en coordenadas polares utilizando las ecuaciones $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$.

(**b**) Demuestre que, en forma polar, la función recíproca $w = 1/z$ está dada por:

$$w = \frac{1}{r}\left(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta\right).$$

(c) Sea $w = u + iv$. Observe que, del inciso (b), $u = \frac{1}{r}\cos\theta$ y $v = -\frac{1}{r}\operatorname{sen}\theta$. Ahora reescriba la ecuación del inciso (a) en términos de $u$ y $v$ utilizando estas ecuaciones.

(d) Concluya de los incisos (a) al (c) que la imagen de la circunferencia generalizada (7) bajo $w = 1/z$ es la circunferencia generalizada dada por:

$$D\left(u^2 + v^2\right) + Bu - Cv + A = 0. \tag{8}$$

**27.** Considere la recta $L$ dada por la ecuación $Bx + Cy + D = 0$.

(a) Utilice los problema 25 y 26 para determinar cuándo la imagen de la recta $L$ bajo el mapeo recíproco $w = 1/z$ es una recta.

(b) Si la imagen de $L$ es una recta $L'$, entonces, ¿cuál es la pendiente de $L'$? ¿Cómo es esta pendiente comparada con la pendiente de $L$?

(c) Utilice los problemas 25 y 26 para determinar cuándo la imagen de la recta $L$ es una circunferencia.

(d) Si la imagen de $L$ es una circunferencia $S'$, entonces, ¿cuáles son el centro y el radio de $S'$?

**28.** Considere la circunferencia $S$ dada por la ecuación $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$, con $B^2 + C^2 - 4AD > 0$.

(a) Utilice los problemas 25 y 26 para determinar cuándo la imagen de la circunferencia $S$ es una recta.

(b) Utilice los problemas 25 y 26 para determinar cuándo la imagen de la circunferencia $S$ es una circunferencia.

(c) Si la imagen de $S$ es una circunferencia $S'$, entonces, ¿cuáles son el centro y el radio de $S'$? ¿Cómo se comparan estos valores con el centro y el radio de $S$?

En los problemas 29 y 30, (a) utilice mapeos para determinar las cotas superior e inferior en el módulo de la función dada $f(z)$ definida en el conjunto dado $S$. Es decir, determine los valores reales $L$ y $M$ tales que $L \leq |f(z)| \leq M$ para toda $z$ en $S$ y (b) determine los valores complejos $z_0$ y $z_1$ en $S$ tales que $f(z_0) = L$ y $f(z_1) = M$.

**29.** $f(z) = \dfrac{1+i}{z} + 2$; $S$ es el anillo $1 \leq |z| \leq 2$.

**30.** $f(z) = \dfrac{1}{z} + i$; $S$ es el semiplano $x \geq 2$.

## 2.6 Límites y continuidad

El concepto más importante en el cálculo elemental es el del límite. Recuerde que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ intuitivamente significa que los valores $f(x)$ de la función $f$ se pueden hacer arbitrariamente cercanos al número real $L$ si se eligen valores de $x$ suficientemente cerca, pero no iguales al número real $x_0$. En análisis real los conceptos de continuidad, derivada, y de integral definida todos se definieron utilizando el concepto de límite. Los límites complejos juegan un igualmente importante papel en el estudio del análisis complejo. El concepto de un límite complejo es similar al del límite real en el sentido que $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ significará que los valores $f(z)$ de la función compleja $f$ se pueden hacer arbitrariamente cercanos al número complejo $L$ si los valores de $z$ se eligen suficientemente cerca, pero no iguales al número complejo $z_0$. Aunque superficialmente similar, existe una diferencia importante entre estos dos conceptos de límite. En un límite real, hay dos direcciones desde las que se puede aproximar $x$ a $x_0$ en la recta real, a saber, por la izquierda o por la derecha. Sin embargo, en un límite complejo hay un número infinito de direcciones a partir de las que se puede aproximar $z$ a $z_0$ en el plano complejo. Para que exista un límite complejo, cada forma en la que $z$ se puede aproximar a $z_0$ debe producir el mismo valor límite. En esta sección definiremos el límite de una función compleja examinando algunas de sus propiedades, e introduciremos el concepto de continuidad para funciones de una variable compleja.

## 2.6.1 Límites

**Límites reales** La descripción de un límite real dada en la introducción de la sección es solamente una definición intuitiva de este concepto. Para dar la definición rigurosa de un límite real, se debe indicar con precisión qué se entiende con la frases "arbitrariamente cerca de" y "suficientemente cerca de". Primero tenemos que reconocer que una indicación precisa de estos términos utiliza valores absolutos ya que $|a - b|$ mide la distancia entre dos puntos en la recta numérica real. En ésta, los puntos $x$ y $x_0$ están "cerca" si $|x - x_0|$ es un número positivo pequeño. Del mismo modo, los puntos $f(x)$ y $L$ son "cercanos" si $|f(x) - L|$ es un número positivo pequeño. En matemáticas, se acostumbra usar las letras griegas $\varepsilon$ y $\delta$ para representar números reales positivos pequeños. Por tanto, la expresión "$f(x)$ puede hacerse arbitrariamente cercana a $L$" se puede precisar al establecer que para que cualquier número real $\varepsilon > 0$, $x$ se puede elegir de modo tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$. En nuestra definición intuitiva necesitamos que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que los valores de $x$ sean "lo suficientemente cercanos a, pero no iguales, $x_0$". Esto significa que hay alguna distancia $\delta > 0$ con la propiedad de que si $x$ está dentro de la distancia $\delta$ de $x_0$ y $x \neq x_0$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. En otras palabras, si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. El número real $\delta$ no es único y, en general, depende de la elección de $\varepsilon$, de la función $f$, y del punto $x_0$. En resumen, tenemos la siguiente definición precisa del límite real:

### *Límite de una función real $f(x)$*

*El límite de $f$ conforme $x$ tiende a $x_0$ existe y es igual a $L$*

*si para todo $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$* (1)

*siempre que $0 < |x - x_0| < \delta$.*

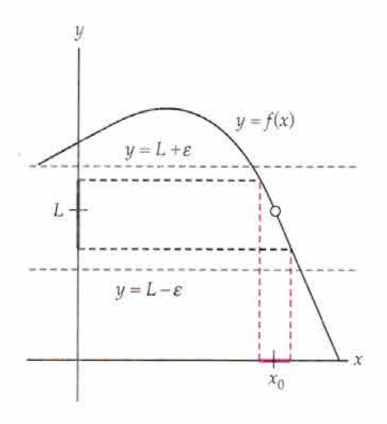
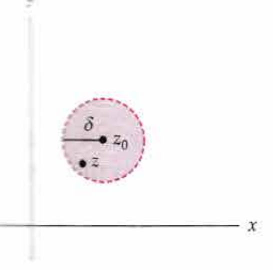


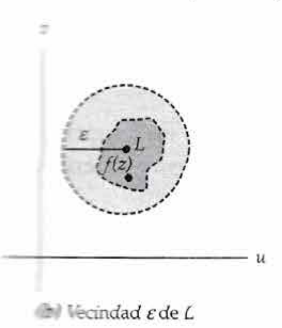

**Figura 2.6.1** Significado geométrico de un límite real

En la figura 2.6.1 se muestra la interpretación geométrica de (1). En esta figura vemos que la gráfica de la función $y = f(x)$ en el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, excluyendo al punto $x_0$, se encuentra entre las rectas $y = L - \varepsilon$ y $y = L + \varepsilon$ que se muestra con líneas punteadas en la figura 2.6.1. En la terminología de mapeos, el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, excluyendo al punto $x = x_0$, que se muestra a color en el eje $x$, se mapea al conjunto que se muestra en negro en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ en el eje $y$. Para que el límite exista, la relación que se muestra en la figura 2.6.1 debe existir para cualquier elección de $\varepsilon > 0$. También observamos en la figura 2.6.1 que si se elige un $\varepsilon$ menor, entonces se puede necesitar una $\delta$ más pequeña.

**Límites complejos** Un límite complejo es, en esencia, lo mismo que un límite real, salvo que se basa en un concepto de "cercanía" en el plano complejo. Ya que la distancia en el plano complejo entre dos puntos $z_1$ y $z_2$ está dado por la diferencia de los módulos $z_1$ y $z_2$, la definición precisa de un límite complejo involucrará a $|z_2 - z_1|$. Por ejemplo, la frase "$f(z)$ puede hacerse arbitrariamente cercana al número complejo $L$", se puede establecer de manera exacta como: para todo $\varepsilon > 0$, $z$ se puede elegir de modo tal que $|f(z) - L| < \varepsilon$. Ya que el módulo de un número complejo es un número *real*, tanto $\varepsilon$ como $\delta$ siguen representando números positivos reales pequeños en la siguiente definición de un límite complejo. El análogo complejo de (1) es:




(a) Vecindad δ excluyente de $z_0$




(b) Vecindad ε de $L$

Figura 2.6.2 El significado geométrico de un límite complejo

**Definición 2.6.1 Límite de una función compleja**

Supongamos que una función compleja $f$ está definida en una vecindad que excluye a $z_0$ y suponga que $L$ es un número complejo. El **límite de $f$ conforme $z$ tiende a $z_0$ existe y es igual a $L$**, lo cual se escribe como $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que $|f(z) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |z - z_0| < \delta$.

Para funciones complejas, confiamos en el concepto de mapeos complejos para ganar una comprensión geométrica de la definición 2.6.1. Recuerde de la sección 1.5 que el conjunto de puntos $w$ en el plano complejo que satisface que $|w - L| < \varepsilon$ se llama vecindad de $L$, y que este conjunto se compone de todos los puntos en el plano complejo que se encuentran dentro, pero no sobre, la circunferencia de un círculo de radio $\varepsilon$ centrado en el punto $L$. También recuerde de la sección 1.5 que el conjunto de puntos que satisfacen las desigualdades $0 < |z - z_0| < \delta$ se llama vecindad excluyente de $z_0$ y consiste de todos los puntos en la vecindad $|z - z_0| < \delta$ *excluyendo al* punto $z_0$. Por la definición 2.6.1, si $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ y si $\varepsilon$ es cualquier número positivo, entonces existe una vecindad excluyente de $z_0$ de radio $\delta$ con la propiedad de que para que cada punto $z$ en esta vecindad excluyente, $f(z)$ está en la vecindad $\varepsilon$ de $L$. Es decir, $f$ mapea la vecindad excluyente $0 < |z - z_0| < \delta$ en el plano $z$ en la vecindad $|w - L| < \varepsilon$ en el plano $w$. En la figura 2.6.2(a), la vecindad excluyente de $z_0$ que se muestra a color se mapea sobre el conjunto mostrado en color gris oscuro en la figura 2.6.2(b). Como se requiere por la definición 2.6.1, la imagen se encuentra dentro de la vecindad $\varepsilon$ de $L$ que se muestra en color gris claro en la figura 2.6.2(b).

Los límites complejos y reales tienen muchas propiedades comunes, pero hay al menos una diferencia muy importante. Para funciones reales, $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$ y $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$. Es decir, hay dos direcciones por las que $x$, puede acercarse a $x_0$ en la recta real, por la derecha (que se denota por $x \to x_0^+$) o por la izquierda (que se denota por $x \to x_0^-$). El límite real existe si y sólo si estos límites laterales tienen el mismo valor. Por ejemplo, considere la función real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x - 1, & x \geq 0 \end{cases}.$$

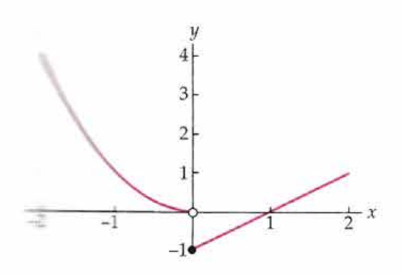



Figura 2.6.3 El límite de $f$ no existe conforme $x$ tiende a 0

El límite de $f$ conforme $x$ tiende a 0 no existe, ya que $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0$, pero $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x - 1) = -1$. Vea la figura 2.6.3.

*Para límites de funciones complejas, a $z$ se le permite acercarse en cual*quier dirección a $z_0$ en el plano complejo, es decir, a lo largo de cualquier curva o trayectoria que pase por $z_0$. Vea la figura 2.6.4. Para que $\lim_{z \to z_0} f(z)$ exista y sea igual a $L$, se requiere que $f(z)$ se aproxime al mismo número complejo $L$ a lo largo de toda curva posible que pase por $z_0$. Poniendo esto en una manera negativa:

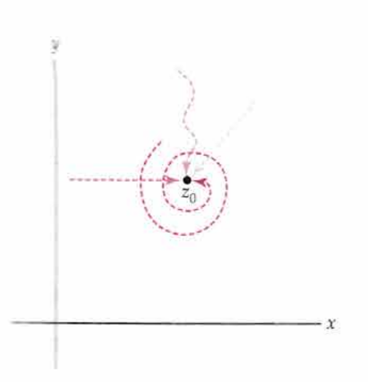



Figura 2.6.4 Diferentes trayectorias para aproximarse a $z_0$ en un límite

### *Criterio para la no existencia de un límite*

*Si $f$ tiende a dos números complejos $L_1 \neq L_2$ a lo largo de dos diferentes curvas o trayectorias que pasan por $z_0$, entonces $\lim_{z \to z_0} f(z)$ no existe.*

## EJEMPLO 1 Un límite que no existe

Demuestre que $\lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}}$ no existe.

**Solución** Demostremos que este límite no existe al encontrar dos formas diferentes de hacer que $z$ se aproxime a 0 que producen valores diferentes para $\lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}}$. Primero, hacemos que $z$ tienda a 0 a lo largo del eje real. Es decir, consideramos números complejos de la forma $z = x + 0i$, donde el número real $x$ se aproxima a 0. Para estos puntos tenemos que:

$$\lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}} = \lim_{x \to 0} \frac{x + 0i}{x - 0i} = \lim_{x \to 0} 1 = 1. \tag{2}$$

Por otra parte, si hacemos que $z$ tienda a 0 a lo largo del eje imaginario, entonces $z = 0 + iy$, donde el número real $y$ se aproxima a 0. Con este enfoque tenemos:

$$\lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}} = \lim_{y \to 0} \frac{0 + iy}{0 - iy} = \lim_{y \to 0} (-1) = -1. \tag{3}$$

Ya que los valores en (2) y (3) no son iguales, concluimos que $\lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}}$ no existe. ❑

El límite $\lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}}$ del ejemplo 1 no existe ya que los valores de $\lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}}$ conforme $z$ se acerca a 0 a lo largo de los ejes real e imaginario no concuerdan. Sin embargo, aún si estos valores concordaran, el límite complejo puede no existir. Vea los problemas 19 y 20 en los ejercicios 2.6. En general, con los valores calculados de $\lim_{z \to z_0} f(z)$ conforme $z$ se aproxima a $z_0$ por diferentes direcciones, como en el ejemplo 1, se puede demostrar que *no existe* un límite, pero esta técnica no puede utilizarse para demostrar que un límite *existe*. Para demostrar que un límite existe tenemos que utilizar la definición 2.6.1 directamente. Para ello es necesario demostrar que para que todo número real positivo $\varepsilon$ existe una $\delta$ elegida apropiadamente que cumple con los requisitos de la definición 2.6.1. Estas demostraciones se denominan comúnmente "demostraciones de épsilon y delta". Aun para funciones relativamente simples, las demostraciones de épsilon y delta pueden ser bastante complicadas. Puesto que este es un libro introductorio, restringimos nuestra atención a lo que, en nuestra opinión, son ejemplos directos de demostraciones épsilon y delta.

## EJEMPLO 2 Una demostración de épsilon y delta de un límite

Demuestre que $\lim_{z \to 1+i} (2 + i)z = 1 + 3i$.

**Solución** De acuerdo con la definición 2.6.1, $\lim_{z \to 1+i} (2 + i)z = 1 + 3i$, si, para todo $\varepsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que $|(2 + i)z - (1 + 3i)| < \varepsilon$ siempre que $0 < |z - (1 + i)| < \delta$. Demostrar que el límite existe requiere que encontremos un valor apropiado de $\delta$ para un valor dado de $\varepsilon$. En otras palabras, para un valor dado de $\varepsilon$ debemos determinar un número positivo $\delta$ con la propiedad de que si $0 < |z - (1 + i)| < \delta$, entonces $|(2 + i)z - (1 + 3i)| < \varepsilon$. Una forma de encontrar $\delta$ es "trabajar hacia atrás". La idea es empezar con la desigualdad:

$$|(2 + i)z - (1 + 3\text{i})| < \varepsilon \tag{4}$$

y después utilizar las propiedades de números complejos y el módulo para manipular esta desigualdad hasta que en ésta se implique a la expresión $|z - (1 + i)|$. Así, un primer paso natural es factorizar $(2 + i)$ del miembro izquierdo de (4):

$$|2 + i| \cdot \left| z - \frac{1 + 3i}{2 + i} \right| < \varepsilon. \tag{5}$$

Puesto que $|2 + i| = \sqrt{5}$ y $\dfrac{1 + 3i}{2 + i} = 1 + i$, (5) es equivalente a:

$$\sqrt{5} \cdot |z - (1 + i)| < \varepsilon \quad \text{o} \quad |z - (1 + i)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{5}}. \tag{6}$$

Aquí, (6) nos indica que debemos tomar $\delta = \varepsilon/\sqrt{5}$. Considere que la elección de $\delta$ no es única. Nuestra elección de $\delta = \varepsilon/\sqrt{5}$ es un resultado de los manejos algebraicos que se emplearon para obtener (6). Una vez que se ha encontrado a $\delta$, presentamos la demostración formal de que $\lim_{z \to 1+i} (2+i)z = 1+3i$ que no indica cómo se eligió a $\delta$:

Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta = \varepsilon/\sqrt{5}$. Si $0 < |z - (1 + i)| < \delta$, entonces tenemos $|z - (1 + i)| < \varepsilon/\sqrt{5}$. Multiplicando ambos lados de la última desigualdad por $|2 + i| = \sqrt{5}$ obtenemos:

$$|2 + i| \cdot |z - (1 + i)| < \sqrt{5} \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{5}} \quad \text{o} \quad |(2 + i)z - (1 + 3i)| < \varepsilon.$$

Por tanto, $|(2 + i)z - (1 + 3i)| < \varepsilon$ siempre que $0 < |z - (1 + i)| < \delta$. Por tanto, de acuerdo con la definición 2.6.1, hemos demostrado que $\lim_{z \to 1+i} (2 + i)z = 1 + 3i$. ❑

**Límites reales multivariables** La demostración épsilon y delta del ejemplo 2 muestra el hecho importante de que aunque la teoría de los límites complejos se basa en la definición 2.6.1, esta definición no proporciona un método conveniente para calcular límites. Ahora presentamos un método práctico para calcular límites complejos del teorema 2.6.1. Además de ser una herramienta de cálculo útil, este teorema también establece una importante conexión entre los límites *complejos* de $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y los límites *reales* de las funciones de valores reales de dos variables reales $u(x, y)$ y $v(x, y)$. Ya que cada función compleja está completamente determinada por las funciones reales $u$ y $v$, no es sorprendente que el límite de una función compleja se pueda expresar en términos de los límites reales de $u$ y $v$.

Antes de establecer el teorema 2.6.1, recuerde algunos de los conceptos importantes respecto a los límites de las funciones de valores reales de dos variables reales $F(x, y)$. La siguiente definición de $\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} F(x, y) = L$ es análoga tanto para (1) como para la definición 2.6.1.

***Límite de la función real $F(x, y)$***

*El límite de F conforme $(x, y)$ tiende a $(x_0, y_0)$ existe y es igual al número real L si para cada $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que $|F(x, y) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$.* (7)

La expresión $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ en (7) representa la distancia entre los puntos $(x, y)$ y $(x_0, y_0)$ en el plano cartesiano. Utilizando (7), es relativamente fácil demostrar que:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} 1 = 1, \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0, \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y = y_0. \tag{8}$$

Si $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F(x,y) = L$ y $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} G(x,y) = M$, entonces (7) se puede también utilizar para demostrar:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} cF(x,y) = cL, \quad c \text{ una constante real} \tag{9}$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (F(x,y) \pm G(x,y)) = L \pm M, \tag{10}$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F(x,y) \cdot G(x,y) = L \cdot M, \tag{11}$$

y

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{F(x,y)}{G(x,y)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0. \tag{12}$$

Los límites que involucran expresiones polinomiales en $x$ y $y$ pueden ser fácilmente calculados utilizando los límites en (8) combinados con las propiedades (9) a la (12). Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,2)} (3xy^2 - y) &= 3\left(\lim_{(x,y)\to(1,2)} x\right)\left(\lim_{(x,y)\to(1,2)} y\right)\left(\lim_{(x,y)\to(1,2)} y\right) - \lim_{(x,y)\to(1,2)} y \\ &= 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 - 2 = 10.\end{aligned}$$

En general, si $p(x, y)$ es una función polinomial de dos variables, entonces (8) a (12) se pueden usar para demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} p(x,y) = p(x_0, y_0). \tag{13}$$

Si $p(x, y)$ y $q(x, y)$ son funciones polinomiales de dos variables y $q(x_0, y_0) \neq 0$, entonces con (13) y (12) se obtiene:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{p(x,y)}{q(x,y)} = \frac{p(x_0,y_0)}{q(x_0,y_0)}. \tag{14}$$

Ahora presentamos el teorema 2.6.1, que relaciona los límites reales de $u(x, y)$ y $v(x, y)$ con el límite complejo de $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Una demostración épsilon y delta del teorema 2.6.1 se puede encontrar en el apéndice I.

**Teorema 2.6.1 Partes real e imaginaria de un límite**

Suponga que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$, y $L = u_0 + iv_0$. Entonces $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ si y sólo si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0.$$

El teorema 2.6.1 tiene muchos usos. El primero y más importante nos permite calcular un gran número de límites complejos simplemente calculando un par de límites reales.

**EJEMPLO 3 Uso del teorema 2.6.1 para calcular un límite**

*Utilice el teorema 2.6.1 para calcular* $\lim\limits_{z \to 1+i} (z^2 + i)$.

**Solución** Ya que $f(z) = z^2 + i = x^2 - y^2 + (2xy + 1)i$, podemos aplicar el teorema 2.6.1 con $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy + 1$, y $z_0 = 1 + i$. Identificando $x_0 = 1$ y $y_0 = 1$, encontramos a $u_0$ y $v_0$ calculando los dos límites reales:

$$u_0 = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \left(x^2 - y^2\right) \quad \text{y} \quad v_0 = \lim_{(x,y)\to(1,1)} (2xy + 1).$$

Ya que ambos límites involucran sólo funciones polinomiales multivariables, podemos utilizar (13) para obtener:

$$u_0 = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \left(x^2 - y^2\right) = 1^2 - 1^2 = 0$$

y

$$v_0 = \lim_{(x,y)\to(1,1)} (2xy + 1) = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 = 3,$$

y, por tanto, $L = u_0 + iv_0 = 0 + i(3) = 3i$. Por tanto, $\lim\limits_{z \to 1+i} \left(z^2 + i\right) = 3i$. ❑

Además, para calcular límites específicos, el teorema 2.6.1 es también una importante herramienta teórica que nos permite deducir muchas propiedades de los límites complejos a partir de las propiedades de los límites reales. El siguiente teorema da un ejemplo de este procedimiento.

**Teorema 2.6.2** ***Propiedades de los límites complejos***

*Supongamos que* $f$ *y* $g$ son funciones complejas. Si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$ y $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = M$, entonces

(*i*) $\lim\limits_{z \to z_0} cf(z) = cL$, $c$ es una constante compleja,

(*ii*) $\lim\limits_{z \to z_0} (f(z) \pm g(z)) = L \pm M$,

(*iii*) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) \cdot g(z) = L \cdot M$, y

(*iv*) $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{L}{M}$, siempre que $M \neq 0$.

**Demostración de (*i*)** Cada inciso del teorema 2.6.2 es consecuencia del teorema 2.6.1 y de la propiedad análoga (9) a la (12). Demostraremos el inciso (*i*) y dejaremos los incisos restantes como ejercicios.

Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $L = u_0 + iv_0$, y $c = a + ib$. Ya que $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$, se deduce del teorema 2.6.1 que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y) = v_0.$$

Por (9) y (10), tenemos

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (au(x, y) - bv(x, y)) = au_0 - bv_0$$

y $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (bu(x, y) + av(x, y)) = bu_0 + av_0.$$

Sin embargo, $\text{Re}(cf(z)) = au(x, y) - bv(x, y)$ e $\text{Im}(cf(z)) = bu(x, y) + av(x, y)$. Por tanto, por el teorema 2.6.1,

$$\lim_{z\to z_0} cf(z) = au_0 - bv_0 + i\,(bu_0 + av_0) = cL. \qquad \square$$

Por supuesto, los resultados de los teoremas 2.6.2(*ii*) y 2.6.2(*iii*) valen para cualquier suma finita de funciones o producto finito de funciones, respectivamente. Después de establecer un par de límites complejos básicos, podemos utilizar el teorema 2.6.2 para calcular un gran número de límites en una forma muy directa. Los dos límites básicos que necesitamos son aquellos de la **función constante compleja** $f(z) = c$, donde $c$ es una constante compleja, y la **función identidad compleja** $f(z) = z$. En el problema 45 en los ejercicios 2.6 se le pedirá demostrar que:

$$\lim_{z\to z_0} c = c, \quad c \text{ es una constante compleja,} \tag{15}$$

y

$$\lim_{z\to z_0} z = z_0. \tag{16}$$

El siguiente ejemplo ilustra cómo estos límites básicos se pueden combinar con el teorema 2.6.2 para calcular los límites de funciones complejas racionales.

**EJEMPLO 4 Límites calculados con el teorema 2.6.2**

Utilice el teorema 2.6.2 y los límites básicos (15) y (16) para calcular los límites

**(a)** $\displaystyle\lim_{z\to i} \frac{(3+i)z^4 - z^2 + 2z}{z+1}$

**(b)** $\displaystyle\lim_{z\to 1+\sqrt{3}i} \frac{z^2 - 2z + 4}{z - 1 - \sqrt{3}i}$

**Solución**

**(a)** Por el teorema 2.6.2(*iii*) y (16), tenemos:

$$\lim_{z\to i} z^2 = \lim_{z\to i} z\cdot z = \left(\lim_{z\to i} z\right)\cdot\left(\lim_{z\to i} z\right) = i\cdot i = -1.$$

De manera similar, $\lim_{z\to i} z^4 = i^4 = 1$. Utilizando estos límites, los teoremas 2.6.2(*i*), 2.6.2(*ii*), y el límite en (16), obtenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to i}\left((3+i)z^4 - z^2 + 2z\right) &= (3+i)\lim_{z\to i} z^4 - \lim_{z\to i} z^2 + 2\lim_{z\to i} z\\ &= (3+i)(1) - (-1) + 2(i)\\ &= 4 + 3i,\end{aligned}$$

y $\lim_{z\to i}(z+1) = 1 + i$. Por tanto, por el teorema 2.6.2(*iv*), tenemos:

$$\lim_{z\to i} \frac{(3+i)z^4 - z^2 + 2z}{z+1} = \frac{\lim_{z\to i}\left((3+i)z^4 - z^2 + 2z\right)}{\lim_{z\to i}(z+1)} = \frac{4+3i}{1+i}.$$

Después de realizar la división, obtenemos $\lim_{z\to i}\dfrac{(3+i)z^4 - z^2 + 2z}{z+1} = \dfrac{7}{2} - \dfrac{1}{2}i.$

(**b**) Para encontrar $\lim_{z\to 1+\sqrt{3}i}\dfrac{z^2 - 2z + 4}{z - 1 - \sqrt{3}i}$, se procede como en (a):

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 1+\sqrt{3}i}(z^2 - 2z + 4) &= \left(1+\sqrt{3}i\right)^2 - 2\left(1+\sqrt{3}i\right) + 4\\ &= -2 + 2\sqrt{3}i - 2 - 2\sqrt{3}i + 4 = 0,\end{aligned}$$

y $\lim_{z\to 1+\sqrt{3}i}(z - 1 - \sqrt{3}i) = 1 + \sqrt{3}i - 1 - \sqrt{3}i = 0$. Parece que no se puede aplicar el teorema 2.6.2(*iv*) ya que el límite del denominador es 0. Sin embargo, en el cálculo anterior hemos encontrado que $1+\sqrt{3}i$, es una raíz del polinomio cuadrático $z^2 - 2z + 4$. De la sección 1.6, recuerde que si $z_1$ es una raíz de un polinomio cuadrático, entonces $z - z_1$ es un factor del polinomio. Utilizando división larga, encontramos que

$$z^2 - 2z + 4 = \left(z - 1 + \sqrt{3}i\right)\left(z - 1 - \sqrt{3}i\right).$$

Vea (5) en la sección 1.6. Ya que no se le permite a $z$ asumir el valor $1+\sqrt{3}i$, en el límite, podemos eliminar el factor común en el denominador y en el numerador de la función racional. Esto es,

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 1+\sqrt{3}i}\frac{z^2 - 2z + 4}{z - 1 - \sqrt{3}i} &= \lim_{z\to 1+\sqrt{3}i}\frac{(z - 1 + \sqrt{3}i)(z - 1 - \sqrt{3}i)}{z - 1 - \sqrt{3}i}\\ &= \lim_{z\to 1+\sqrt{3}i}\left(z - 1 + \sqrt{3}i\right).\end{aligned}$$

Por el teorema 2.6.2(*ii*) y los límites en (15) y (16), tenemos

$$\lim_{z\to 1+\sqrt{3}i}\left(z - 1 + \sqrt{3}i\right) = 1 + \sqrt{3}i - 1 + \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}i.$$

Por tanto, $\lim_{z\to 1+\sqrt{3}i}\dfrac{z^2 - 2z + 4}{z - 1 - \sqrt{3}i} = 2\sqrt{3}i.$ ❑

En la sección 3.1 calcularemos el límite del inciso (b) del ejemplo 4 de una manera diferente.

## 2.6.2 Continuidad

**Continuidad de funciones reales** Recuerde que si el límite de una función real $f$ conforme $x$ se aproxima al punto $x_0$ existe y concuerda con el valor de la función $f$ en $x_0$, entonces decimos que $f$ es **continua** en el punto $x_0$. Simbólicamente, esta definición está dada por:

***Continuidad de una función real $f(x)$***

*Una función $f$ es continua en el punto $x_0$ si* $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. (17)

Observe que para que la ecuación $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ en (17) se satisfaga, deben ser ciertas tres cosas. El límite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ debe existir, $f$ debe estar definida en $x_0$, y estos dos valores deben ser iguales. Si cualquiera de estas tres condiciones falla, entonces $f$ no puede ser continua en $x_0$. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x - 1, & x \geq 0 \end{cases},$$

que se muestra en la figura 2.6.3 no es continua en el punto $x = 0$ ya que $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe. De manera similar, aunque $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$, la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ no es continua en $x = 1$ ya que $f(1)$ no está definida.

En análisis real, visualizamos el concepto de continuidad utilizando la gráfica de la función $f$. Informalmente, una función $f$ es continua si no hay cortes o huecos en la gráfica de $f$. Ya que no podemos trazar la gráfica de una función compleja, nuestro análisis de la continuidad de funciones complejas será principalmente de naturaleza algebraica.

**Continuidad de las funciones complejas** La definición de continuidad para una función compleja es, en esencia, igual que para una función real. Es decir, una función compleja $f$ es continua en un punto $z_0$ si el límite de $f$ conforme $z$ se aproxima a $z_0$ existe y es igual al valor de $f$ en $z_0$. Esto nos lleva a la siguiente definición para funciones complejas, que es análoga a (17).

**Definición 2.6.2 Continuidad de una función compleja**

Una función compleja $f$ es **continua en un punto $z_0$** si

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Análogamente a las funciones reales, si una $f$ compleja es continua en un punto, entonces se deben cumplir las tres condiciones siguientes.

***Criterio para la continuidad en un punto***

Una función compleja $f$ es continua en un punto $z_0$ si se cumple cada una de las siguientes tres condiciones:

(*i*) $\lim_{z \to z_0} f(z)$ *existe,*

(*ii*) *$f$ está definida en $z_0$, y*

(*iii*) $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Si una función compleja $f$ no es continua en un punto $z_0$ entonces decimos que $f$ es **discontinua** en $z_0$. Por ejemplo, la función $f(z) = \dfrac{1}{1 + z^2}$ es discontinua en $z = i$ y en $z = -i$.

### EJEMPLO 5 Comprobación de la continuidad en un punto

Considere la función $f(z) = z^2 - iz + 2$. Con la finalidad de determinar si $f$ es continua en, digamos, el punto $z_0 = 1 - i$, debemos establecer el $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ y $f(z_0)$, después se comprueba si estos dos valores complejos son iguales. Del Teorema 2.6.2 y los límites en (15) y (16) obtenemos:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to 1-i}\left(z^2 - iz + 2\right) = (1-i)^2 - i(1-i) + 2 = 1 - 3i.$$

Además, para $z_0 = 1 - i$ tenemos:

$$f(z_0) = f(1-i) = (1-i)^2 - i(1-i) + 2 = 1 - 3i.$$

Ya que $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$, concluimos que $f(z) = z^2 - iz + 2$ es continua en el punto $z_0 = 1 - i$. ❑

Como indica el ejemplo 5, la continuidad de un polinomio complejo o de una función racional se determina fácilmente utilizando el Teorema 2.6.2 y los límites en (15) y (16). Sin embargo, con frecuencia las funciones más complicadas, requieren otras técnicas.

### EJEMPLO 6 Discontinuidad de una función raíz cuadrada principal

Demuestre que la función raíz cuadrada principal $f(z) = z^{1/2}$ definida por (7) de la sección 2.4 es discontinua en el punto $z_0 = -1$.

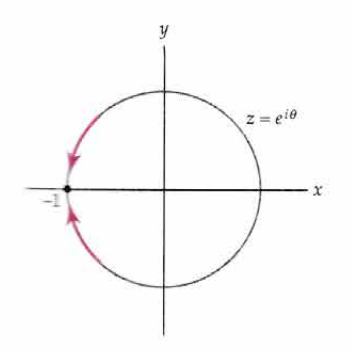



Figura 2.6.5 Figura para el ejemplo 6

**Solución** Demostraremos que $f(z) = z^{1/2}$ es discontinua en $z_0 = -1$ al demostrar que el límite $\lim\limits_{z\to -1} z^{1/2}$ no existe. Con el criterio de la página 101, es suficiente encontrar dos diferentes curvas que pasen por $z_0 = -1$ para las que $z^{1/2}$ se aproxima a valores diferentes. Antes de comenzar, recuerde de (7) de la sección 2.4 que la función raíz cuadrada principal está definida por $z^{1/2} = \sqrt{|z|}\,e^{i\operatorname{Arg}(z)/2}$. Ahora considere que $z$ se aproxima a $-1$ a lo largo del cuarto de circunferencia del círculo unitario que se encuentra en el segundo cuadrante. Vea la figura 2.6.5. Es decir, considere los puntos $|z| = 1$, $\pi/2 < \arg(z) < \pi$. En forma exponencial, esta curva se puede describir como $z = e^{i\theta}$, $\pi/2 < \theta < \pi$, con $\theta$ aproximándose a $\pi$. Por lo que, haciendo $|z| = 1$ y haciendo que $\operatorname{Arg}(z) = \theta$ tienda a $\pi$, obtenemos:

$$\lim_{z\to -1} z^{1/2} = \lim_{z\to -1}\sqrt{|z|}\,e^{i\operatorname{Arg}(z)/2} = \lim_{\theta\to\pi}\sqrt{1}\,e^{i\theta/2}.$$

Ya que $e^{i\theta/2} = \cos(\theta/2) + i\,\operatorname{sen}(\theta/2)$, esto se simplifica a:

$$\lim_{z\to -1} z^{1/2} = \lim_{\theta\to\pi}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\,\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 0 + i(1) = i. \quad (18)$$

Ahora, hacemos que $z$ se aproxime a $-1$ a lo largo del cuarto del círculo unitario que en el tercer cuadrante. De nuevo consulte la figura 2.6.5. A lo largo de esta curva tenemos los puntos $z = e^{i\theta}$, $-\pi < \theta < -\pi/2$, con $\theta$ aproximándose a $-\pi$. Haciendo $|z| = 1$ y que $\operatorname{Arg}(z) = \theta$ tienda a $-\pi$ encontramos:

$$\lim_{z\to -1} z^{1/2} = \lim_{\theta\to -\pi} e^{i\theta/2} = \lim_{\theta\to -\pi}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\,\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right) = -i. \quad (19)$$

Ya que los valores complejos en (18) y (19) no concuerdan, concluimos que $\lim\limits_{z\to -1} z^{1/2}$ no existe. Por tanto, la función raíz cuadrada principal $f(z) = z^{1/2}$ es discontinua en el punto $z_0 = -1$. ❑

En la Definición 2.6.2 determinamos la continuidad de una función compleja $f$ en un solo punto $z_0$ en el plano complejo. Con frecuencia también nos interesa la continuidad de una función en un conjunto de puntos en el plano complejo. Una función compleja $f$ **es continua en un conjunto *S*** si $f$ es continua en $z_0$ para cada $z_0$ en $S$. Por ejemplo, utilizando el teorema 2.6.2 y los límites en (15) y (16) podemos demostrar que $f(z) = z^2 - iz + 2$ es continua en cualquier punto $z_0$ en el plano complejo. Por tanto, $f(z) = z^2 - iz + 2$ es continua en ***C***. Por otra parte la función $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$, es continua en el conjunto consistente de todos los complejos $z$ tales que $z \neq \pm i$.

**Propiedades de las funciones continuas** Ya que el concepto de continuidad se define utilizando el límite complejo, varias propiedades de los límites complejos se pueden traducir en enunciados respecto a la continuidad. Considere el Teorema 2.6.1, que describe la conexión entre el límite complejo de $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y los límites reales de $u$ y $v$. Utilizando la siguiente definición de continuidad para funciones reales $F(x, y)$, podemos restablecer este teorema de límites como un teorema de continuidad.

### Continuidad de una función real $F(x, y)$

*Una función F es continua en un punto, $(x_0, y_0)$ si*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F(x, y) = F(x_0, y_0). \tag{20}$$

De nuevo, esta definición de continuidad es análoga a (17). De (20) y del teorema 2.6.1, obtenemos el resultado siguiente.

**Teorema 2.6.3 Partes real e imaginaria de una función continua**

Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y $z_0 = x_0 + iy_0$, entonces la función compleja $f$ es continua en el punto $z_0$ si y sólo si ambas funciones reales $u$ y $v$ son continuas en el punto $(x_0, y_0)$.

**Demostración** Si $f$ es continua en $z_0$, entonces de la Definición 2.6.2 tenemos que:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0). \tag{21}$$

Después de hacer las identificaciones $u_0 = u(x_0, y_0)$ y $v_0 = v(x_0, y_0)$, usando el teorema 2.6.1 se obtiene:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = u(x_0, y_0) \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y) = v(x_0, y_0). \tag{22}$$

Por tanto, de (20), tanto $u$ como $v$ son continuas en $(x_0, y_0)$. Por el contrario, si $u$ y $v$ son continuas en $(x_0, y_0)$, entonces

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = u(x_0, y_0) \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y) = v(x_0, y_0).$$

Usando el Teorema 2.6.1 se tiene que $\lim_{z\to z_0} f(z) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) = f(z_0)$. Por tanto, $f$ es continua por la definición 2.6.2. ❑

**EJEMPLO 7 Comprobación de continuidad utilizando el teorema 2.6.3**

Demuestre que la función $f(z) = \bar{z}$ es continua en *C*.

**Solución** De acuerdo con el teorema 2.6.3, $f(z) = \bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$ es continua en $z_0 = x_0 + iy_0$ si tanto $u(x, y) = x$ como $v(x, y) = -y$ son continuas en $(x_0, y_0)$. Ya que $u$ y $v$ son funciones polinomiales de dos variables, de (13) se tiene que:

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} u(x, y) = x_0 \quad \text{y} \quad \lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} v(x, y) = -y_0.$$

Esto implica que $u$ y $v$ son continuas en $(x_0, y_0)$, y, por tanto, que $f$ es continua en $z_0 = x_0 + iy_0$ por el teorema 2.6.3. Ya que $z_0 = x_0 + iy_0$ fue un punto arbitrario, concluimos que la función $f(z) = \bar{z}$ es continua en **C**. ❑

Las propiedades algebraicas de los límites complejos del teorema 2.6.2 se puede también restablecer en términos de la continuidad de las funciones complejas.

**Teorema 2.6.4 Propiedades de funciones continuas**

Si $f$ y $g$ son continuas en el punto $z_0$, entonces las funciones siguientes son continuas en el punto $z_0$:

(*i*) $cf$, $c$ es una constante compleja,

(*ii*) $f \pm g$,

(*iii*) $f \cdot g$, y

(*iv*) $\dfrac{f}{g}$ siempre que $g(z_0) \neq 0$.

**Demostración de (*ii*)** Demostraremos sólo (*ii*); las demostraciones de las partes restantes son similares. Ya que $f$ y $g$ son continuas en $z_0$ tenemos que $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ y $\lim_{z \to z_0} g(z) = g(z_0)$. Del teorema 2.6.2(*ii*), se tiene que $\lim_{z \to z_0} (f(z) + g(z)) = f(z_0) + g(z_0)$. Por tanto, $f + g$ es continua en $z_0$ por la Definición 2.6.2. ❑

Por supuesto, los resultados de los teoremas 2.6.4(*ii*) y 2.6.4(*iii*) se extienden a cualquier suma finita o producto finito de funciones continuas, respectivamente. Podemos utilizar estos hechos para demostrar que los polinomios complejos son funciones continuas.

**Teorema 2.6.5 Continuidad de funciones polinomiales**

Las funciones polinomiales complejas son continuas en todo el plano complejo.

**Demostración** Sea $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ una función polinomial compleja y sea $z_0$ cualquier punto en el plano complejo *C*. De (16) tenemos que la función identidad $f(z) = z$ es continua en $z_0$, y repitiendo la aplicación del teorema 2.6.4(*iii*), esto implica que la función potencia $f(z) = z^n$, donde $n$ es un entero y $n \geq 1$, es continua en este punto también. Además, (15) implica que cada función constante compleja $f(z) = c$ es continua en

$z_0$, y así se tiene del teorema 2.6.4($i$) que cada una de las funciones $a_n z^n$, $a_{n-1}z^{n-1}$, ..., $a_1 z$ y $a_0$ son continuas en $z_0$. Ahora repitiendo la aplicación del Teorema 2.6.4($ii$) vemos que $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ es continua en $z_0$. Ya que a $z_0$ se le permitió ser cualquier punto en el plano complejo, hemos demostrado que la función polinomial $p$ es continua en todo el plano complejo **C**. ❑

Ya que una función racional $f(z) = p(z)/q(z)$ es el cociente de las funciones polinomiales $p$ y $q$, se tiene usando el Teorema 2.6.5 y el Teorema 2.6.4($iv$) que $f$ es continua en cada punto $z_0$ para el cual $q(z_0) \neq 0$. En otras palabras,

***Continuidad de funciones racionales***

*Las funciones racionales son continuas en sus dominios.*

**Funciones acotadas** Las funciones continuas complejas tienen muchas propiedades importantes que son análogas a las propiedades de las funciones continuas reales. Por ejemplo, si una función real $f$ es continua en un intervalo cerrado $I$ en la recta real, entonces $f$ está acotada en $I$. Esto significa que existe un número real $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x$ en $I$. Un resultado similar para funciones reales multivariables establece que si $F(x, y)$ es continua en una región $R$ cerrada y acotada del plano cartesiano, entonces existe un número real $M > 0$ tal que $|F(x, y)| \leq M$ para todo $(x, y)$ en $R$, y decimos que $F$ está acotado en $R$.

Ahora suponga que la función compleja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ está definida en una región $R$ cerrada y acotada en el plano complejo. Como con funciones reales, decimos que $f$ está **acotada** en $R$ si existe una constante real $M > 0$ tal que $|f(z)| < M$ para toda $z$ en $R$. Si $f$ es continua en $R$, entonces el teorema 2.6.3 nos dice que $u$ y $v$ son funciones continuas reales en $R$. Se tiene que $F(x, y) = \sqrt{[u(x, y)]^2 + [v(x, y)]^2}$ es también continua en $R$. Ya que $F$ es continua en la región $R$ cerrada y acotada, concluimos que $F$ está acotada en $R$. Es decir, existe una constante real $M > 0$ tal que $|F(x, y)| \leq M$ para todo $(x, y)$ en $R$. Sin embargo, ya que $|f(z)| = F(x, y)$, tenemos que $|f(z)| \leq M$ para toda $z$ en $R$. En otras palabras, la función compleja $f$ está acotada en $R$. Esto establece la siguiente importante propiedad de las funciones continuas complejas.

***Una propiedad de acotamiento***

*Si una función compleja $f$ es continua en una región $R$ cerrada y acotada, entonces $f$ está acotada en $R$. Es decir existe una constante real $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para toda $z$ en $R$.*

Aunque este resultado nos asegura que existe un límite $M$ para $f$ en $R$, no ofrece un método práctico para encontrarlo. Un método para encontrar un límite es utilizar la desigualdad del triángulo. Vea el ejemplo 3 de la sección 1.2. Otro método para determinar un límite es utilizar mapeos complejos. Vea los problemas 38 y 39 en los ejercicios 2.3. Los problemas 55 y 56 en los ejercicios 2.4, y los problemas 29 y 30 en los ejercicios 2.5. En el capítulo 5, veremos que para una clase especial importante de funciones complejas, sólo se puede alcanzar el límite en un punto en la frontera de $R$.

**Ramas** En la sección 2.4 analizamos, brevemente, el concepto de un función multivaluada $F(z)$ que asigna un conjunto de números complejos a la entrada $z$. (Recuerde que nuestra convención es utilizar siempre letras mayúsculas tales como $F$, $G$, y $H$ para representar funciones multivaluadas). Ejemplos de funciones multivaluadas incluyen a $F(z) = z^{1/n}$, que asigna a la entrada $z$ el conjunto de raíces $n$-ésimas de $z$, y $G(z) = \arg(z)$, que asigna a la entrada $z$ el conjunto infinito de argumentos de $z$. En la práctica, pasa con frecuencia el caso que necesitamos una forma consistente de elegir exactamente una de las raíces de un número complejo o, quizá, exactamente uno de los argumentos de un número complejo. Es decir, comúnmente estamos interesados en calcular exactamente uno de los valores de una función multivaluada. Si hacemos esta elección del valor considerando el concepto de continuidad, entonces obtenemos una *función* que se llama *rama* de una función multivaluada. En términos más rigurosos, una **rama** de una función multivaluada $F$ es una función $f_1$ que es continua en algún dominio y que asigna exactamente uno de los múltiples valores de $F$ en cada punto $z$ de ese dominio.

*Notación: Ramas*

*Cuando representamos ramas de una función multivaluada F en notación funcional, utilizaremos letras minúsculas con un subíndice numérico tal como $f_1$, $f_2$, y así sucesivamente.*

El requisito para que una rama sea continua es que el dominio de una rama sea diferente del dominio de la función multivaluada. Por ejemplo, la función multivaluada $F(z) = z^{1/2}$ que asigna a cada entrada $z$ el conjunto de dos raíces cuadradas de $z$ está definido para todo número complejo $z$ distinto de cero. Aunque la función raíz cuadrada principal $F(z) = z^{1/2}$ asigna exactamente un valor de $F$ a cada entrada $z$ (a saber, asigna a $z$ la raíz cuadrada principal de $z$), $f$ *no es* una rama de $F$. La razón es porque la función raíz cuadrada principal no es continua en su dominio. En particular, en el ejemplo 6 demostramos que $f(z) = z^{1/2}$ no es continua en $z_0 = -1$. El argumento que se usó en el ejemplo 6 se puede fácilmente modificar para demostrar que $f(z) = z^{1/2}$ es discontinua en cada punto en el eje real negativo. Por tanto, con la finalidad de obtener una rama de $F(z) = z^{1/2}$ que concuerda con la función raíz cuadrada principal, debemos restringir el dominio para excluir puntos en el eje real negativo. Esto da la función

$$f_1(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}, \quad -\pi < \theta < \pi. \tag{23}$$

Llamamos la función $f_1$ definida por (23) la **rama principal** de $F(z) = z^{1/2}$ ya que el valor de $\theta$ representa el argumento principal de $z$ para todo $z$ en $\mathrm{Dom}(f_1)$. En el siguiente ejemplo demostramos que $f_1$ es, de hecho, una rama de $F$.

### EJEMPLO 8 Una rama de $F(z) = z^{1/2}$

Demuestre que la función $f_1$ definida por (23) es una rama de la función multivaluada $F(z) = z^{1/2}$.

**Solución** El dominio de la función $f_1$ es el conjunto definido por $|z| > 0$, $-\pi < \arg(z) < \pi$, que se muestra en gris en la figura 2.6.6. De (8) de la sección 2.4, vemos que la función $f_1$ concuerda con la función raíz cuadrada principal $f$ en este conjunto. Por lo que, $f_1$ asigna a la entrada $z$ exactamente uno de

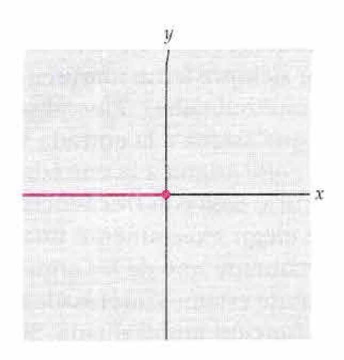


Figura 2.6.6 El dominio $D$ de la rama $f_1$

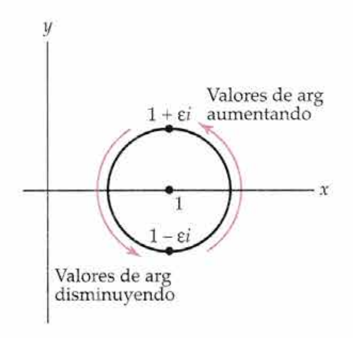
los valores de $F(z) = z^{1/2}$. Falta demostrar que $f_1$ es una función continua en su dominio. Con la finalidad de ver que esto es así, sea $z$ un punto con $|z| > 0$. $-\pi < \arg(z) < \pi$. Si $z = x + iy$ y $x > 0$, entonces $z = re^{i\theta}$ donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = \tan^{-1}(y/x)$. Ya que $-\pi/2 < \tan^{-1}(y/x) < \pi/2$, la desigualdad $-\pi < \theta < \pi$ se satisface. Por lo que, sustituyendo las expresiones para $r$ y $\theta$ en (23) obtenemos:

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \sqrt[4]{x^2 + y^2}\, e^{i \tan^{-1}(y/x)/2} \\ &= \sqrt[4]{x^2 + y^2} \cos\left(\frac{\tan^{-1}(y/x)}{2}\right) + i\sqrt[4]{x^2 + y^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\tan^{-1}(y/x)}{2}\right). \end{aligned}$$

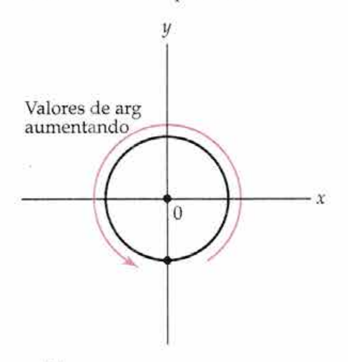
Ya que las partes real e imaginaria de $f_1$ son funciones continuas reales para $x > 0$, concluimos del Teorema 2.6.3 que $f_1$ es continua para $x > 0$. Se puede hacer un argumento similar para puntos con $y > 0$ usando $\theta = \cot^{-1}(x/y)$ y para puntos con $y < 0$ utilizando $\theta = -\cot^{-1}(x/y)$. En cada caso, concluimos del Teorema 2.6.3 que $f_1$ es continua. Por tanto, la función $f_1$ definida en (23) es una rama de la función multivaluada $F(z) = z^{1/2}$. ❑

## Puntos y cortes de rama

Aunque la función multivaluada $F(z) = z^{1/2}$ está definida para todos los números complejos distintos de cero $C$, la rama principal $f_1$ está definida sólo en el dominio $|z| > 0$, $-\pi < \arg(z) < \pi$. En general, un **corte de rama** para una rama $f_1$ de una función multivaluada $F$ es una parte de una curva que se excluye del dominio de $F$ por lo que $f_1$ es continua en los puntos que faltan. Por tanto, el eje real no positivo, que se muestra a color en la figura 2.6.6, es un corte de rama para la rama principal $f_1$ dada por (23) de la función multivaluada $F(z) = z^{1/2}$. Una rama diferente de $F$ con el mismo corte de rama está dada por $f_2(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$, $\pi < \theta < 3\pi$. Estas ramas son diferentes ya que para, digamos, $z = i$ tenemos $f_1(i) = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i$, pero $f_2(i) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i$. Observe que si hacemos $\phi = \theta - 2\pi$, entonces la rama $f_2$ se puede expresar como $f_2(z) = \sqrt{r}e^{i(\phi+2\pi)/2} = \sqrt{r}e^{i\phi/2}e^{i\pi}$, $-\pi < \phi < \pi$. Ya que $e^{i\pi} = -1$, esta se simplifica como $f_2(z) = -\sqrt{r}e^{i\phi/2}$, $-\pi < \phi < \pi$. Por lo que, hemos demostrado que $f_2 = -f_1$. Podemos pensar que estas dos ramas de $F(z) = z^{1/2}$ son análogas a las raíces cuadradas positivas y negativas de un número positivo real.



**(a)** $z = 1$ no es un punto rama



**(b)** $z = 0$ es un punto rama

Figura 2.6.7 $G(z) = \arg(z)$

Se pueden definir otras ramas de $F(z) = z^{1/2}$ de una manera similar a (23) utilizando cualquier rayo que sale del origen como un corte de rama. Por ejemplo $f_3(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$, $-3\pi/4 < \theta < 5\pi/4$, define una rama de $F(z) = z^{1/2}$. El corte de rama para $f_3$ es el rayo $\arg(z) = -3\pi/4$ junto con el punto $z = 0$.

No es coincidencia que el punto $z = 0$ esté en el corte de rama para $f_1, f_2$ y $f_3$. El punto $z = 0$ debe estar en el corte de rama de cada rama de la función multivaluada $F(z) = z^{1/2}$. En general, un punto con la propiedad de que está en el corte de rama de cada rama se llama un **punto de rama** de $F$. Por otra parte, un punto de rama es un punto $z_0$ con la siguiente propiedad: Si recorremos cualquier circunferencia centrada en $z_0$ con radio suficientemente pequeño comenzando en un punto $z_1$, entonces los valores de cualquier rama no regresan al valor de $z_1$. Por ejemplo, considere cualquier rama de la función multivaluada $G(z) = \arg(z)$. En el punto, $z_0 = 1$, recorremos la pequeña circunferencia $|z - 1| = \varepsilon$ en sentido contrario a las manecillas del reloj desde el punto $z_1 = 1 - \varepsilon i$, entonces los valores de la rama aumentan hasta que alcancemos el punto $1 + \varepsilon i$; entonces los valores de la rama disminuyen al valor de la rama en $z_1$. Vea la figura 2.6.7(a). Esto significa que el punto $z_0 = 1$ no es un punto de rama. Por otra parte, suponga que repetimos este proceso para el punto $z_0 = 0$. Para la pequeña circunferencia $|z| = \varepsilon$, los valores de la rama aumentan a lo largo de toda la circunferencia. Vea la figura 2.6.7(b). En el momento en que regresamos a nuestro punto

de partida, el valor de la rama ya no es el mismo; ha aumentado en $2\pi$. Por tanto $z_0 = 0$ es un punto de rama de $G(z) = \arg(z)$.

**Observaciones** *Comparación con el análisis real*

(*i*) Como con el análisis real podemos definir los conceptos de límites infinito y límites en el infinito para funciones complejas. Intuitivamente, el límite $\lim_{z\to\infty} f(z) = L$ significa que los valores de la función $f$ se pueden hacer arbitrariamente cercanos a $L$ si los valores de $z$ se eligen tal que $|z|$ sea suficientemente grande. Un enunciado preciso de un **límite al infinito** es:

*El límite de $f$ conforme $z$ tiende a $\infty$ existe y es igual a $L$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que $|f(z) - L| < \varepsilon$ siempre que $|z| > 1/\delta$.*

Usando esta definición no es difícil demostrar que:

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = L \text{ si y sólo si } \lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = L. \tag{24}$$

De manera similar, el **límite infinito** $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ se define como:

*El límite de $f$ conforme $z$ tiende a $z_0$ es $\infty$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que $|f(z)| > 1/\varepsilon$ siempre que $0 < |z - z_0| < \delta$.*

De esta definición obtenemos el siguiente resultado:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \text{ si y sólo si } \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0. \tag{25}$$

Vea los problemas 21 al 26 de los ejercicios 2.6.

(*ii*) En un análisis real visualizamos una función continua como una función cuya gráfica no tiene cortes o huecos en ésta. Es natural preguntarse si hay una propiedad análoga para funciones continuas complejas. La respuesta es sí, pero esta propiedad se debe establecer en términos de mapeos complejos. Comenzamos por recordar que una curva paramétrica definida por las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$ y $y = y(t)$ se llama continua si las funciones $x$ y $y$ son continuas. En una forma similar decimos que una curva paramétrica compleja definida por $z(t) = x(t) + iy(t)$ es **continua** si tanto $x(t)$ como $y(t)$ son funciones reales continuas. Como con las curvas paramétricas en el plano cartesiano, una curva paramétrica continua en el plano complejo no tiene cortes ni huecos. Estas curvas proporcionan un medio para visualizar a las funciones continuas complejas.

*Si una función compleja $f$ es continua en un conjunto $S$, entonces la imagen de toda curva paramétrica continua en $S$ debe ser una curva continua.*

Para ver por qué es esto, considere una función continua compleja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y una curva paramétrica continua definida por $z(t) = x(t) - iy(t)$. Del Teorema 2.6.3, $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son funciones reales continuas. Además, puesto que $x(t)$ y $y(t)$ son funciones continuas, se tiene del cálculo de varias variables que las composiciones $u(x(t), y(t))$ y $v(x(t), y(t))$ son funciones continuas. Por tanto, la imagen de una curva paramétrica dada por $w(t) = f(z(t)) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))$ es continua. Vea los problemas 59 al 62 de los ejercicios 2.6.

**EJERCICIOS 2.6** *Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-9.*

## 2.6.1 Límites

En los problemas 1 a 8 utilice el Teorema 2.6.1 y las propiedades de los límites reales de la página 104 para calcular el límite complejo dado.

**1.** $\lim_{z \to 2i} (z^2 - \bar{z})$

**2.** $\lim_{z \to 1+i} \frac{z - \bar{z}}{z + \bar{z}}$

**3.** $\lim_{z \to 1-i} (|z|^2 - i\bar{z})$

**4.** $\lim_{z \to 3i} \frac{\text{Im}(z^2)}{z + \text{Re}(z)}$

**5.** $\lim_{z \to \pi i} e^z$

**6.** $\lim_{z \to 0} \frac{z^2 + \bar{z}^2}{\text{Re}(z) + \text{Im}(z)}$

**7.** $\lim_{z \to 0} \frac{e^z - e^{\bar{z}}}{\text{Im}(z)}$

**8.** $\lim_{z \to 1+i} \left(\log_e |x^2 + y^2| + i \arctan \frac{y}{x}\right)$

En los problemas 9 a 16 utilice el Teorema 2.6.2 y los límites básicos (15) y (16) para calcular el límite complejo dado.

**9.** $\lim_{z \to 2-i} (z^2 - z)$

**10.** $\lim_{z \to i} (z^5 - z^2 + z)$

**11.** $\lim_{z \to e^{i\pi/4}} \left(z + \frac{1}{z}\right)$

**12.** $\lim_{z \to 1+i} \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}$

**13.** $\lim_{z \to -i} \frac{z^4 - 1}{z + i}$

**14.** $\lim_{z \to 2+i} \frac{z^2 - (2 + i)^2}{z - (2 + i)}$

**15.** $\lim_{z \to z_0} \frac{(az + b) - (az_0 + b)}{z - z_0}$

**16.** $\lim_{z \to -3+i\sqrt{2}} \frac{z + 3 - i\sqrt{2}}{z^2 + 6z + 11}$

**17.** Considere el límite $\lim_{z \to 0} \frac{\text{Re}(z)}{\text{Im}(z)}$.

**(a)** ¿A qué valor tiende el límite conforme $z$ tiende a 0 a largo de la recta $y = x$?

**(b)** ¿A qué valor tiende el límite conforme $z$ tiende a 0 a largo del eje imaginario?

**(c)** En base a sus respuestas de los incisos (a) y (b), ¿Qué puede decir acerca de $\lim_{z \to 0} \frac{\text{Re}(z)}{\text{Im}(z)}$?

**18.** Considere el límite $\lim_{z \to i} (|z| + i\text{Arg}(iz))$.

**(a)** ¿A qué valor tiende el límite conforme $z$ tiende a $i$ a largo de la circunferencia unitaria $|z| = 1$ en el primer cuadrante?

**(b)** ¿A qué valor tiende el límite conforme $z$ tiende a $i$ a largo de la circunferencia unitaria $|z| = 1$ en el segundo cuadrante?

**(c)** En base a sus respuestas de los incisos (a) y (b), ¿Qué puede decir acerca de $\lim_{z \to i} (|z| + i\text{Arg}(iz))$?

**19.** Considere el límite $\lim_{z \to 0} \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$.

**(a)** ¿A qué valor tiende el límite conforme $z$ tiende a 0 a largo del eje real?

**(b)** ¿A qué valor tiende el límite conforme $z$ tiende a 0 a largo del eje imaginario?

**(c)** ¿Las respuestas (a) y (b) implican que $\lim_{z \to 0} \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$ existe? Explique.

**(d)** ¿A qué valor tiende el límite conforme $z$ se aproxima a 0 a lo largo de la recta $y = x$?

**(e)** ¿Qué puede decir acerca de $\lim_{z \to 0} \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$?

**20.** Considere el límite $\lim_{z\to 0}\left(\frac{2y^2}{x^2}-\frac{x^2-y^2}{y^2}i\right)$.

(**a**) ¿A qué valor tiende el límite conforme $z$ tiende a 0 a largo de la recta $y = x$?

(**b**) ¿A qué valor tiende el límite conforme $z$ tiende a 0 a largo de la recta $y = -x$?

(**c**) ¿Las respuestas de (a) y (b) implican que $\lim_{z\to 0}\left(\frac{2y^2}{x^2}-\frac{x^2-y^2}{y^2}i\right)$ existe? Explique.

(**d**) ¿A qué valor tiende el límite conforme $z$ tiende a 0 a largo de la recta $y = 2x$?

(**e**) ¿Que puede decir acerca de $\lim_{z\to 0}\left(\frac{2y^2}{x^2}-\frac{x^2-y^2}{y^2}i\right)$?

Los problemas 21 a 26 involucran los conceptos de límites infinitos y límites al infinito analizados en (*i*) de las observaciones. En los problemas 21 a 26, utilice (24) o (25), y el Teorema 2.6.2, y los límites básicos (15) y (16) para calcular el límite complejo dado.

**21.** $\lim_{z\to\infty}\frac{z^2+iz-2}{(1+2i)z^2}$

**22.** $\lim_{z\to\infty}\frac{iz+1}{2z-i}$

**23.** $\lim_{z\to i}\frac{z^2-1}{z^2+1}$

**24.** $\lim_{z\to -i/2}\frac{(1-i)z+i}{2z+i}$

**25.** $\lim_{z\to\infty}\frac{z^2-(2+3i)z+1}{iz-3}$

**26.** $\lim_{z\to i}\frac{z^2+1}{z^2+z+1-i}$

## 2.6.2 Continuidad

En los problemas 27 a 34 demuestre que la función $f$ es continua en el punto dado.

**27.** $f(z)=z^2-iz+3-2i;\ z_0=2-i$

**28.** $f(z)=z^3-\frac{1}{z};\ z_0=3i$

**29.** $f(z)=\frac{z^3}{z^3+3z^2+z};\ z_0=i$

**30.** $f(z)=\frac{z-3i}{z^2+2z-1};\ z_0=1+i$

**31.** $f(z)=\begin{cases}\frac{z^3-1}{z-1}, & |z|\neq 1\\ 3, & |z|=1\end{cases};\ z_0=1$

**32.** $f(z)=\begin{cases}\frac{z^3-1}{z^2+z+1}, & |z|\neq 1\\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, & |z|=1\end{cases};\ z_0=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

**33.** $f(z)=\bar{z}-3\,\mathrm{Re}(z)+i;\ z_0=3-2i$

**34.** $f(z)=\frac{\mathrm{Re}(z)}{z+iz}-2z^2;\ z_0=e^{i\pi/4}$

En los problemas 35 a 40 demuestre que la función $f$ es discontinua en el punto dado.

**35.** $f(z)=\frac{z^2+1}{z+i};\ z_0=-i$

**36.** $f(z)=\frac{1}{|z|-1};\ z_0=i$

PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
Biblioteca Central

**37.** $f(z) = \text{Arg}(z);\ z = -1$

**38.** $f(z) = \text{Arg}(iz);\ z_0 = i$

**39.** $f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^3 - 1}{z - 1}, & |z| \neq 1 \\ 3, & |z| = 1 \end{cases};\ z_0 = i$

**40.** $f(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{|z|}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases};\ z_0 = 0$

En los problemas 41 a 44 utilice el eorema 2.6.3 para determinar la región más grande en el plano complejo en la que la función $f$ es continua.

**41.** $f(z) = \text{Re}(z)\,\text{Im}(z)$

**42.** $f(z) = \bar{z}$

**43.** $f(z) = \dfrac{z - 1}{z\bar{z} - 4}$

**44.** $f(z) = \dfrac{z^2}{(|z| - 1)\,\text{Im}(z)}$

## Enfocando los conceptos

**45.** Utilice el Teorema 2.6.1 para demostrar que:

(**a**) $\lim_{z \to z_0} c = c$, donde $c$ es una constante (**b**) $\lim_{z \to z_0} z = z_0$.

**46.** Utilice el Teorema 2.6.1 para demostrar que $\lim_{z \to z_0} \bar{z} = \bar{z}_0$.

**47.** Utilice el Teorema 2.6.2 y el problema 46 para demostrar que

(**a**) $\lim_{z \to z_0} \text{Re}(z) = \text{Re}(z_0)$.

(**b**) $\lim_{z \to z_0} \text{Im}(z) = \text{Im}(z_0)$.

(**c**) $\lim_{z \to z_0} |z| = |z_0|$.

**48.** Utilice el Teorema 2.6.1 para demostrar el inciso ($ii$) del Teorema 2.6.2.

**49.** La siguiente es una demostración épsilon y delta de que $\lim_{z \to z_0} z = z_0$. Llene los espacios en blanco.

**Demostración** Por la Definición 2.6.1, $\lim_{z \to z_0} z = z_0$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que $|_____| < \varepsilon$ siempre que $0 < |_______| < \delta$. Haciendo $\delta =$ _______ aseguramos que el enunciado anterior es cierto.

**50.** La siguiente es una demostración épsilon y delta de que $\lim_{z \to z_0} \bar{z} = \bar{z}_0$. Llene las justificaciones que faltan en la demostración.

**Demostración** Por Definición 2.6.1, $\lim_{z \to z_0} \bar{z} = \bar{z}_0$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que $|_______| < \varepsilon$ siempre que $0 < |_______| < \delta$. Por las propiedades de los módulos y de la conjugación compleja $|z - z_0| = |\overline{z - z_0}| = |_____|$. Por tanto, si $0 < |z - z_0| < \delta$ y $\delta =$ _______, entonces $|\bar{z} - \bar{z}_0| = \varepsilon$.

**51.** En este problema desarrollaremos una demostración épsilon y delta de que $\lim_{z \to 1+i} ((1 - i)z + 2i) = 2 + 2i$.

(**a**) Escriba a continuación la definición épsilon y delta (Definición 2.6.1) de $\lim_{z \to 1+i} [(1 - i)z + 2i] = 2 + 2i$.

(**b**) Saque el factor $(1 - i)$ de la desigualdad que involucra a $\varepsilon$ (del inciso (a)) y simplifique. Ahora reescriba esta desigualdad en la forma $|z - (1 + i)| <$ _______.

(**c**) En base a su trabajo del inciso (b), ¿a qué debe ser igual $\delta$?

(**d**) Escriba una demostración épsilon y delta de $\lim_{z \to 1+i} [(1 - i)z + 2i] = 2 + 2i$.

**52.** En este problema desarrollamos una demostración épsilon y delta de que $\lim_{z \to 2i} \dfrac{2z^2 - 3iz + 2}{z - 2i} = 5i.$

(**a**) Escriba a continuación la definición épsilon y delta (Definición 2.6.1) de $\lim_{z \to 2i} \dfrac{2z^2 - 3iz + 2}{z - 2i} = 5i.$

(**b**) Simplifique la desigualdad que involucre $\varepsilon$ (del inciso (a)), después reescriba esta desigualdad en la forma $|z - 2i| <$ ________.

(**c**) En base a su trabajo del inciso (b), ¿a qué debe ser igual $\delta$?

(**d**) Escriba una demostración épsilon y delta de que $\lim_{z \to 2i} \dfrac{2z^2 - 3iz + 2}{z - 2i} = 5i.$

**53.** (**a**) ¿Es cierto que $\lim_{z \to z_0} \overline{f(z)} = \lim_{z \to z_0} f(\bar{z})$ para cualquier función compleja $f$? Si es así, entonces dé una breve justificación; si no, entonces encuentre un contraejemplo.

(**b**) Si $f(z)$ es una función continua en $z_0$, entonces es cierto que $\overline{f(z)}$ es continua en $z_0$?

**54.** Si $f$ es una función para la que $\lim_{x \to 0} f(x + i0) = 0$ y $\lim_{y \to 0} f(0 + iy) = 0$, entonces podemos concluir que $\lim_{z \to 0} f(z) = 0$? Explique.

**55.** (**a**) Demuestre que la función $f(z) = \text{Arg}(z)$ es discontinua en cada punto en el eje negativo real.

(**b**) Demuestre que la función $f_1$ definida por

$$f_1(z) = \theta, \ -\pi < \theta < \pi$$

es una rama de la función multivaluada $F(z) = \arg(z)$. [*Sugerencia*: Vea el ejemplo 8].

**56.** Considere la función multivaluada $F(z) = z^{1/3}$ que asigna a $z$ el conjunto de las tres raíces cúbicas de $z$. Explícitamente defina tres ramas distintas $f_1, f_2$ y $f_3$ de $F$, en las que en todas se ha considerado al eje real no negativo como un corte de rama.

**57.** Considere la función multivaluada $F(z) = (z - 1 + i)^{1/2}$.

(**a**) ¿Cuál es el punto de rama de $F$? Explique.

(**b**) Defina explícitamente dos ramas distintas de $f_1$ y $f_2$, de $F$. En cada caso, establezca el corte de rama.

**58.** Considere la función multivaluada $F(z) = (z^2 + 1)^{1/2}$. ¿Cuáles son los puntos de rama (hay dos de ellos) de $F$? Explique.

## Tarea del laboratorio de cómputo

Lea nuevamente el inciso (*ii*) de las Observaciones al final de la sección 2.6. En los problemas 57 a 60 utilice un SAC para demostrar que la función dada no es continua dentro de la circunferencia unitaria al dibujar la imagen de la curva paramétrica continua dada. (Tenga cuidado, *Mathematica* y *Maple* trazan gráficas que a veces pueden tener errores).

**59.** $f(z) = z + \text{Arg}(z),\ z(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}it,\ -1 \le t \le 1$

**60.** $f(z) = \sqrt[4]{r}e^{i\theta/4},\ \theta = \text{Arg}(z),\ z(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}it,\ -1 \le t \le 1$

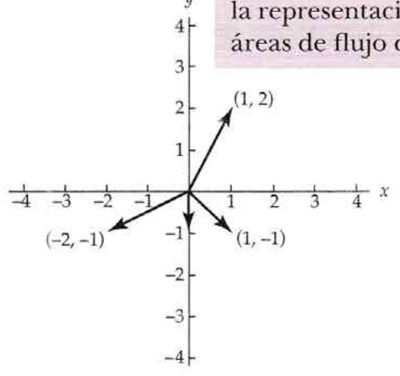
**61.** $f(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2},\ \theta = \text{Arg}(z),\ z(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi$

**62.** $f(z) = |z - 1|\text{Arg}(-z) + i\text{Arg}(iz),\ z(t) = \frac{1}{2}e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi$

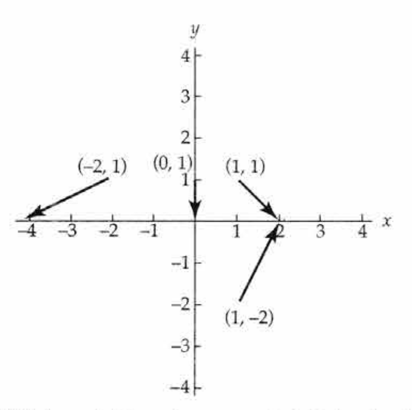
## 2.7 Aplicaciones

***Para el profesor*:** En las aplicaciones a líneas de corriente que se presentan en esta sección suponemos que está familiarizado con la solución de ecuaciones diferenciales.

En este capítulo vimos que una de las principales diferencias entre las funciones reales y complejas es la incapacidad de trazar la gráfica de una función compleja. Esto motiva a la introducción de mapeos como un método alternativo para representar gráficamente a las funciones complejas. Sin embargo, existen otras formas de visualizar a las funciones complejas. En esta sección demostraremos que las funciones complejas dan las representaciones complejas de campos vectoriales bidimensionales. En el último capítulo, utilizaremos la representación compleja de un campo vectorial para resolver problemas aplicados en las áreas de flujo de fluidos, flujo de calor, gravitación y electrostática.



**(a)** Valores de **F** trazados como vectores de posición



**(b)** Valores de **F** trazados con punto inicial en $(x, y)$

Figura 2.7.1 Algunos valores vectoriales de la función $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$

**Campos vectoriales** En cálculo de varias variables, una función con valores vectoriales de dos variables reales

$$\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) \tag{1}$$

también se llama un **campo vectorial bidimensional**. Utilizando los vectores base unitarios ortogonales **i** y **j**, también podemos expresar el campo vectorial en (1) como:

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}. \tag{2}$$

Por ejemplo, la función $\mathbf{F}(x, y) = (x + y)\mathbf{i} + (2xy)\mathbf{j}$ es un campo vectorial bidimensional, para el que, por ejemplo, $\mathbf{F}(1, 3) = (1 + 3)\mathbf{i} + (2 \cdot 1 \cdot 3)\mathbf{j} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$. Valores de una función **F** dados por (2) son vectores que se pueden dibujar como vectores de posición con el punto inicial en el origen. Sin embargo, para obtener una representación gráfica del campo vectorial (2) que presente la relación entre la entrada $(x, y)$ y la salida $\mathbf{F}(x, y)$, dibujamos al vector $\mathbf{F}(x, y)$ con punto inicial $(x, y)$ y punto terminal $(x + P(x, y), y + Q(x, y))$. Por ejemplo, en la figura 2.7.1(a) los cuatro valores de la función $\mathbf{F}(1, 1) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{F}(0, 1) = -\mathbf{j}$, $\mathbf{F}(1, -2) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, y $\mathbf{F}(-2, 1) = -2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ se dibujan como vectores de posición, mientras que en la figura 2.7.1(b) tenemos una parte de la representación gráfica del campo vectorial obtenido al trazar la gráfica de estos cuatro vectores con punto inicial en $(x, y)$. Específicamente, la figura 2.7.1(b) consiste de los cuatro vectores $\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $-\mathbf{j}$, $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $-2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ dibujados con puntos iniciales en $(1, 1)$, $(0, 1)$, $(1, -2)$, y $(-2, 1)$, y puntos terminales $(2, 0)$, $(0, 0)$, $(2, 0)$, y $(-4, 0)$, respectivamente.

**Funciones complejas como campos vectoriales** Existe una forma natural de representar un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ con una función compleja $f$. A saber, usamos a las funciones $P$ y $Q$ como partes real e imaginaria de $f$, en tal caso, decimos que la función compleja $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ es la **representación compleja** del campo vectorial $F(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$. Por el contrario, cualquier función compleja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ tiene un campo vectorial asociado $\mathbf{F}(x, y) = u(x, y)\mathbf{i} + v(x, y)\mathbf{j}$. A partir de este punto nos referiremos a $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ y a $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ como **campos vectoriales**. Como un ejemplo de este análisis, considere el campo vectorial $f(z) = \bar{z}$. Ya que $f(z) = x - iy$, la función $f$ es la representación compleja del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$. Parte de este campo vectorial se mostró en la figura 2.7.1(b). Una representación más completa del campo vectorial $f(z) = \bar{z}$ es la que se muestra en la figura 2.7.2 (este dibujo se construyó con *Mathematica*). Observe que el campo vectorial que está dibujado en la figura 2.7.2 da una representación gráfica de la función compleja $f(z) = \bar{z}$ es decir diferente de un mapeo. Compárela con la figura 2.5.3 de la sección 2.5.

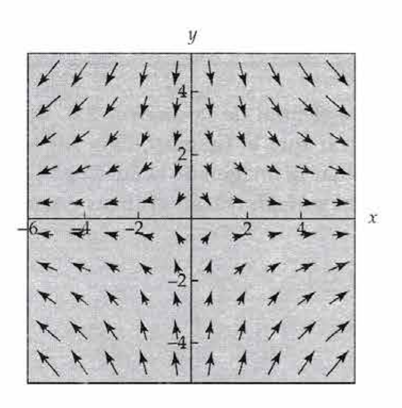


Figura 2.7.2 El campo vectorial $f(z) = \bar{z}$

Figura 2.7.3 Vectores en el campo vectorial $f(z) = z^2$

Cuando se dibuja un campo vectorial **F** asociado con una función compleja $f$ es útil observar que dibujar el vector $\mathbf{F}(x, y)$ con punto inicial $(x, y)$ es equivalente a dibujar la representación vectorial del número complejo $f(z)$ con punto inicial $z$. Ilustramos esta observación en el ejemplo siguiente.

### EJEMPLO 1 Dibujando vectores en un campo vectorial

Dibuje los vectores en el campo vectorial $f(z) = z^2$ correspondiente a los puntos $z = 1, 2 + i, 1 + i$ e $i$.

**Solución** Al calcular directamente encontramos que:

$$f(1) = 1^2 = 1, \qquad f(2+i) = (2+i)^2 = 3 + 4i,$$
$$f(i) = i^2 = -1, \qquad \text{y} \qquad f(1+i) = (1+i)^2 = 2i.$$

Esto implica que en el campo vectorial $f(z) = z^2$ tenemos las representaciones vectoriales de los números complejos $1$, $3 + 4i$, $-1$, y $2i$ dibujados con puntos iniciales en $1$, $2 + i$, $i$, y $1 + i$, respectivamente. Estos vectores se muestran en la figura 2.7.3. ❑

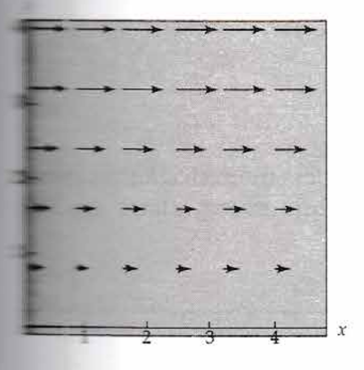


Figura 2.7.4 Dibujo en *Mathematica* del campo vectorial $f(z) = iy$

## Uso de computadoras

Dibujar los campos vectoriales a mano es un procedimiento simple pero tedioso. Afortunadamente, los sistemas algebraicos computarizados tales como *Mathematica* y *Maple* tienen instrucciones preconstruidas para dibujar campos vectoriales bidimensionales. En la figura 2.7.4, el campo vectorial $f(z) = iy$ se ha dibujado utilizando la instrucción **PlotVectorField** de *Mathematica*. Observe que las longitudes de los vectores en los dibujos de *Mathematica* son mucho más pequeños que lo que deberían de ser. Por ejemplo en digamos, $z = 1 + i$ tenemos $f(1 + i) = i$, pero el vector dibujado en $z = 1 + i$ no tiene longitud 1. La razón para esto es que *Mathematica* escala los vectores en un campo vectorial con la finalidad de crear una imagen agradable (en particular, *Mathematica*, lo hace para asegurarse que no hay vectores sobrepuestos). Por tanto, las longitudes de los vectores en la figura 2.7.4 no representan exactamente las longitudes *absolutas* de los vectores en este campo vectorial. Sin embargo, los vectores en la figura 2.7.4, representan exactamente las longitudes relativas de los vectores en el campo vectorial.*

En muchas aplicaciones el interés principal está en las direcciones y no en las magnitudes de los vectores en un campo vectorial. Por ejemplo, en el próximo análisis nos ocuparemos en determinar las trayectorias a lo largo de las que las partículas se mueven en un flujo de fluidos. Para este tipo de aplicación, podemos utilizar un campo vectorial normalizado. En un **campo vectorial normalizado** todos los vectores se escalan para tener la misma longitud. La figura 2.7.5 presenta un campo vectorial normalizado para $f(z) = iy$ creado utilizando la opción **ScaleFunction** con la instrucción **PlotVectorField** en *Mathematica*. Compare con la figura 2.7.4.

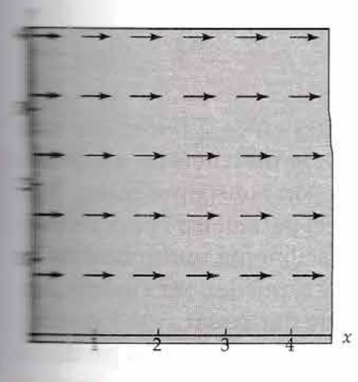


Figura 2.7.5 Dibujo en *Mathematica* del campo vectorial normalizado $f(z) = iy$

Considere que en muchas aplicaciones las magnitudes de los vectores son importantes y, en dichos casos, un campo vectorial normalizado no es adecuado. Veremos ejemplos de esto en el capítulo 5 cuando analicemos la circulación y flujo neto de un flujo de fluidos. En este libro, siempre que usemos un campo vectorial normalizado, explícitamente estableceremos eso. Por tanto, en un sentido gráfico, el término campo vectorial se referirá a un dibujo de un conjunto de vectores que no se han normalizado.

## Flujo de fluidos

Uno de los principales usos de los campos vectoriales en matemáticas aplicados es modelar el flujo de fluidos. Ya que estamos confinados a dos

---

*Para más información sobre como dibujar campos vectoriales en *Mathematica*, consulte el reporte técnico *Guide to Standard Mathematical Packages* publicado por Wolfram Research.

dimensiones en el análisis complejo, consideraremos sólo **flujos planares** de un fluido. Esto significa que el movimiento del fluido tiene lugar en planos que son paralelos al plano $xy$ y que el movimiento y las características físicas del fluido son idénticos en todos los planos. Estas suposiciones nos permiten analizar el flujo de una sola lámina del fluido. Suponga que $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ representa un **campo de velocidades** de un flujo planar en el plano complejo. Entonces $f(z)$ específica la velocidad de una partícula del fluido localizado en el punto $z$ en el plano. El módulo $|f(z)|$ es la **rapidez** de la partícula y el vector $f(z)$ da la dirección del flujo en ese punto.

Para un campo de velocidades $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ de un flujo en un plano, las funciones $P$ y $Q$ representan las componentes de la velocidad en las direcciones $x$ y $y$, respectivamente. Si $z(t) = x(t) + iy(t)$ es una parametrización de la trayectoria que sigue una partícula en el flujo de fluidos, entonces el vector tangente $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ a la trayectoria debe coincidir con $f(z(t))$. Por tanto, las partes real e imaginaria del vector tangente a la trayectoria de una partícula en el fluido debe satisfacer el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y)\\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y).\end{aligned} \tag{3}$$

La familia de soluciones al sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden (3) se llama **líneas de corriente** del flujo en un plano asociado con $f(z)$.

## EJEMPLO 2 Líneas de corriente

Determine las líneas de corriente del flujo en un plano asociado con $f(z) = \bar{z}$.

**Solución** Ya que $f(z) = \bar{z} = x - iy$, identificamos $P(x, y) = x$ y $Q(x, y) = -y$. De (3), las líneas de corriente de $f$ son la familia de soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x\\ \frac{dy}{dt} &= -y.\end{aligned}$$

Estas ecuaciones diferenciales son independientes entre sí por lo que cada una se puede resolver por variables separables. Se obtienen las soluciones generales $x(t) = c_1e^t$ y $y(t) = c_2e^{-t}$ donde $c_1$ y $c_2$ son constantes reales. Para dibujar la curva $z(t) = x(t) + iy(t)$, eliminamos el parámetro $t$ para obtener una ecuación cartesiana en $x$ y $y$. Esto se hace fácilmente multiplicando las dos soluciones para obtener $xy = c_1c_2$. Ya que $c_1$ y $c_2$ pueden ser cualesquiera constantes reales, esta familia de curvas se puede dar como $xy = c$ donde $c$ es una constante real. En conclusión, hemos demostrado que las partículas en el flujo planar asociado con $f(z) = \bar{z}$ se mueven a lo largo de curvas de la familia de hipérbolas $xy = c$. En la figura 2.7.6, hemos usado *Mathematica* para dibujar las líneas de corriente correspondientes a $c = \pm 1$, $\pm 4$ y $\pm 9$ para este flujo. Estas líneas de corriente son las que se muestran en negro sobrepuestas sobre el dibujo del campo vectorial normalizado de $f(z) = \bar{z}$.

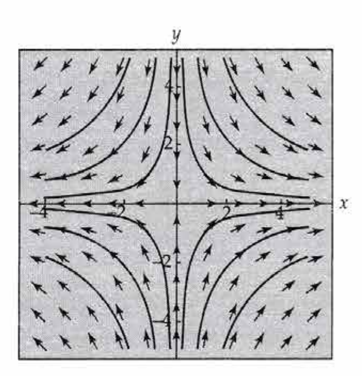


Figura 2.7.6 Líneas de corriente en el flujo en un plano asociadas con $f(z) = \bar{z}$

**EJEMPLO 3 Líneas de corriente**

Determine las líneas de corriente del flujo en un plano asociadas con $f(z) = \bar{z}^2$.

**Solución** *Procedemos como en el ejemplo 2.* Ya que la función $f$ se puede expresar como $f(z) = \bar{z}^2 = x^2 - y^2 - 2xyi$, identificamos $P(x, y) = x^2 - y^2$ y $Q(x, y) = -2xy$. Por lo que, las líneas de corriente de este flujo satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x^2 - y^2 \\ \frac{dy}{dt} &= -2xy. \end{aligned} \tag{4}$$

La regla de la cadena del cálculo elemental establece que $(dy/dx)\cdot(dx/dt) = dy/dt$, y así después de resolver para $dy/dx$ tenemos que

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)\bigg/\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dy}{dx}.$$

Por tanto, dividiendo $dy/dt = -2xy$ entre $dx/dt = x^2 - y^2$, encontramos que el sistema en (4) es equivalente a la ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{x^2 - y^2} \quad \text{o} \quad 2xy\,dx + \left(x^2 - y^2\right)dy = 0. \tag{5}$$

Recuerde que una ecuación diferencial de la forma $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ se llama exacta si $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$. Dada una ecuación diferencial exacta, si podemos determinar una función $F(x, y)$ para la que $\partial F/\partial x = M$ y $\partial F/\partial y = N$, entonces $F(x, y) = c$ es una solución implícita a la ecuación diferencial. Identificando $M(x, y) = 2xy$ y $N(x, y) = x^2 - y^2$, vemos que nuestra ecuación diferencial en (5) es exacta ya que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - y^2\right) = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Para encontrar una función $F$ para la que $\partial F/\partial x = M$ y $\partial F/\partial y = N$, primero integramos parcialmente la función $M(x, y) = 2xy$ con respecto a la variable $x$:

$$F(x, y) = \int 2xy\,dx = x^2y + g(y).$$

Entonces la función $g(y)$ se determina tomando la derivada parcial de $F$ con respecto a la variable $y$ y haciendo esta expresión igual a $N(x, y) = x^2 - y^2$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + g'(y) = x^2 - y^2.$$

Esto implica que $g'(y) = -y^2$, y así podemos tomar $g(y) = -\frac{1}{3}y^3$. En conclusión, $F(x, y) = x^2y - \frac{1}{3}y^3 = c$ es una solución implícita de la ecuación diferencial en (5), y así las líneas de corriente del flujo de un plano asociado con $f(z) = \bar{z}^2$ están dadas por:

$$x^2y - \frac{1}{3}y^3 = c$$

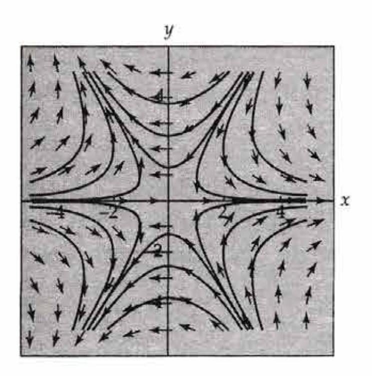



Figura 2.7.7 Líneas de corriente en el flujo del plano asociado con $f(z) = \bar{z}^2$

donde $c$ es una constante real. En la figura 2.7.7, se ha usado *Mathematica* para dibujar las líneas de corriente correspondientes a $c = \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{16}{3}, \pm 18$. Estas líneas de corriente se muestran en negro sobrepuestas sobre el dibujo del campo vectorial normalizado para el flujo. ❑

## EJERCICIOS 2.7 *Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-9.*

En los problemas 1 a 8, (**a**) dibuje las imágenes de los números complejos $z = 1, 1 + i, 1 - i$ e $i$ bajo la función dada $f$ como vectores de posición, y (**b**) dibuje las imágenes como vectores en el campo vectorial asociado con $f$.

**1.** $f(z) = 2z - i$

**2.** $f(z) = z^3$

**3.** $f(z) = \overline{1 - z^2}$

**4.** $f(z) = \dfrac{1}{z}$

**5.** $f(z) = z - \dfrac{1}{z}$

**6.** $f(z) = z^{1/2}$, la función raíz cuadrada principal dada por (7) de la sección 2.4

**7.** $f(z) = \dfrac{1}{\bar{z}}$

**8.** $f(z) = \log_e|z| + i\text{Arg}(z)$

En los problemas 9 a 12 (**a**) determine las líneas de corriente del flujo en el plano asociado con la función compleja dada $f$ y (**b**) dibuje las líneas de corriente.

**9.** $f(z) = 1 - 2i$

**10.** $f(z) = \dfrac{1}{\bar{z}}$

**11.** $f(z) = iz$

**12.** $f(z) = (1 + i)\bar{z}$

### Enfocando los conceptos

**13.** Sea $f$ una función compleja. Explique la relación entre el campo vectorial asociado con $f(z)$ y el campo vectorial asociado con $g(z) = f(z - 1)$. Muestre con dibujos utilizando una función simple para $f$.

**14.** Sea $f$ una función compleja. Explique la relación entre el campo vectorial asociado con $f(z)$ y el campo vectorial asociado con $g(z) = if(z)$. Muestre con dibujos utilizando una función simple para $f$.

**15.** Considere el flujo en el plano asociado con $f(z) = c$ donde $c$ es una constante compleja.

(**a**) Determine las líneas de corriente de este flujo.

(**b**) Explique por qué este flujo que se llama **flujo uniforme**.

**16.** Considere el flujo en el plano asociado con $f(z) = 1 - 1/\bar{z}^2$.

(**a**) Utilice un SAC para dibujar el campo vectorial asociado con $f$ en la región $|z| > 1$.

(**b**) Compruebe analíticamente que la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$ es una línea de corriente en este flujo.

(**c**) Explique por qué $f(z) = 1 - 1/\bar{z}^2$ se llama **flujo alrededor de la circunferencia unitaria**.

### Tareas del laboratorio de cómputo

En los problemas 17 a 22 utilice un SAC para dibujar el campo vectorial asociado con la función compleja $f$ dada.

**17.** $f(z) = 2z - i$

**18.** $f(z) = z^3$

**19.** $f(z) = 1 - z^2$

**20.** $f(z) = \dfrac{1}{z}$

**21.** $f(z) = 2 + i$

**22.** $f(z) = 1 - \dfrac{1}{\bar{z}^2}$

## CAPÍTULO 2 PREGUNTAS DE REPASO

*Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-10.*

En los problemas 1 a 20 responda verdadero o falso. Si el enunciado es falso, justifique su respuesta ya sea explicando por qué es falso o dando un contraejemplo; si el enunciado es verdadero, justifique su respuesta ya sea demostrando el enunciado o citando un resultado apropiado de este capítulo.

1. Si $f(z)$ es una función compleja, entonces $f(x + 0i)$ debe ser un número real.
2. $\arg(z)$ es una función compleja.
3. El dominio de la función $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + i}$ es todos los números complejos.
4. El dominio de la función $f(z) = e^{z^2-(1+i)z+2}$ es todos los números complejos.
5. Si $f(z)$ es una función compleja con $u(x, y) = 0$, entonces el rango de $f$ se encuentra en el eje imaginario.
6. Todo el plano complejo se mapea bajo el eje real $v = 0$ con $w = z + \bar{z}$.
7. Todo el plano complejo se mapea en la circunferencia unitaria $|w| = 1$ con $w = \dfrac{z}{|z|}$.
8. El rango de la función $f(z) = \text{Arg}(z)$ es todos los números reales.
9. La imagen de la circunferencia $|z - z_0| = \rho$ bajo un mapeo lineal es una circunferencia con un (posible) centro diferente, pero el mismo radio.
10. El mapeo lineal $w = (1 - \sqrt{3}i)\,z + 2$ actúa girando a través de un ángulo de $\pi/3$ radianes en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del origen, ampliado en un factor de 2, y después trasladado por 2.
11. Hay más de un mapeo lineal que convierte a la circunferencia $|z - 1| = 1$ en la circunferencia $|z + i| = 1$.
12. Las rectas $x = 3$ y $x = -3$ se mapean en la misma parábola con $w = z^2$.
13. No hay soluciones a la ecuación $\text{Arg}(z) = \text{Arg}(z^3)$.
14. Si $f(z) = z^{1/4}$ es la función cuarta raíz principal, entonces $f(-1) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i$.
15. El número complejo $i$ no está en el rango de la función raíz cúbica principal.
16. Bajo el mapeo $w = 1/z$ en el plano complejo extendido, el dominio $|z| > 3$ se mapea sobre el dominio $|w| < \frac{1}{3}$.
17. Si $f$ es una función compleja para la que $\lim_{z \to 2+i} \text{Re}(f(z)) = 4$ y $\lim_{z \to 2+i} \text{Im}(f(z)) = -1$, entonces $\lim_{z \to 2+i} f(z) = 4 - i$.
18. Si $f$ es una función compleja para la que $\lim_{x \to 0} f(x + 0i) = 0$ y $\lim_{y \to 0} f(0 + iy) = 0$, entonces $\lim_{z \to 0} f(z) = 0$.
19. Si $f$ es una función compleja que es continua en el punto $z = 1 + i$, entonces la función $g(z) = 3\,[f(z)]^2 - (2 + i)\,f(z) + i$ es continua en $z = 1 + i$.
20. Si $f$ es una función compleja que es continua en todo el plano complejo, entonces la función $g(z) = \overline{f(z)}$ es continua en todo el plano complejo.

En los problemas 21 al 40, trate de llenar los espacios en blanco sin consultar el libro.

21. Si $f(z) = z^2 + i\bar{z}$ entonces las partes real e imaginaria de $f$ son $u(x, y) =$ ________ y $v(x, y) =$ ________.
22. Si $f(z) = \dfrac{|z - 1|}{z^2 + 2iz + 2}$, entonces el dominio natural de $f$ es ________.
23. Si $f(z) = z - \bar{z}$, entonces el rango de $f$ está contenido en el eje ________.

**24.** La función exponencial $e^z$ tiene partes real e imaginaria $u(x, y) =$ ________ y $v(x, y) =$ ________.

**25.** Una parametrización del segmento de recta que va de $1 + i$ a $2i$ es $z(t) =$ ________.

**26.** Una parametrización de la circunferencia centrada en $1 - i$ con radio 3 es $z(t) =$ ________.

**27.** Todo mapeo lineal complejo es una composición de a lo sumo una ________, una ________ y una ________.

**28.** El mapeo complejo $w = iz + 2$ gira y ________, pero no ________.

**29.** La función $z^2$ eleva al cuadrado el módulo de $z$ y ________ su argumento.

**30.** La imagen del sector $0 \leq \arg(z) \leq \pi/2$ bajo el mapeo $w = z^3$ es ________.

**31.** La imagen de las rectas horizontal y vertical bajo el mapeo $w = z^2$ es ________.

**32.** La función $n$-ésima raíz principal $z^{1/n}$ mapea el plano complejo en la región ________.

**33.** Si $f(z) = z^{1/6}$ es la función sexta raíz principal, entonces $f(-1) =$ ________.

**34.** La función recíproca compleja $1/z$ es una composición de ________ en la circunferencia ________ seguida de una reflexión a través del eje ________.

**35.** De acuerdo con la definición formal de un límite complejo $\lim_{z \to 2i} (z^2 - i) = -4 - i$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que $|$________$| < \varepsilon$ siempre que $0 < |z -$ ________$| < \delta$.

**36.** Si $f(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{z}$, entonces $\lim_{x \to 0} f(x + 0i) =$ ________ y $\lim_{y \to 0} f(0 + iy) =$ ________. Por tanto $\lim_{z \to 0} f(z)$ ________________.

**37.** Una función compleja $f$ es continua en $z = z_0$ si $\lim_{z \to z_0} f(z) =$ ________.

**38.** La función $f(z) =$ ________ es un ejemplo de una función que es continua en el dominio $|z| > 0$, $-\pi < \arg(z) < \pi$.

**39.** La función compleja $f(z) = \dfrac{x}{y} + i \log_e x$ es continua en la región ________.

**40.** Tanto ________ como ________ son ejemplos de funciones multivaluadas.

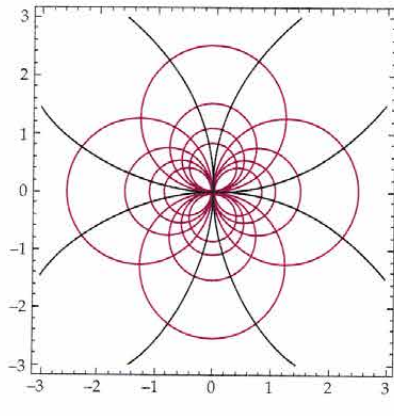
CAPÍTULO

3

# Funciones analíticas

## Contenido del capítulo





Curvas de nivel para $f(z) = 1/z$.
Vea la página 153.

**Introducción** En el capítulo anterior hemos introducido el concepto de una función compleja. De la misma manera que con el cálculo de funciones reales, podemos desarrollar los conceptos de derivadas e integrales de funciones complejas basadas en el concepto fundamental de límite. En este capítulo, nuestro interés principal estará en la definición y en las propiedades de la derivada de una función compleja.

## 3.1 Derivabilidad y analiticidad

El cálculo de funciones complejas trata con los conceptos usuales de derivada e integral de estas funciones. En esta sección daremos la definición de derivada de una función compleja $f(z)$. Aunque muchos de los conceptos de esta sección le parecerán familiares, tales como la de derivada de productos, cocientes y regla de la cadena, hay importantes diferencias entre este material y el cálculo de funciones reales $f(x)$. En los siguientes capítulos que se desarrollan en este libro, veremos que, salvo por la familiaridad de los nombres y definiciones, hay una pequeña similitud entre las *interpretaciones* de cantidades tales como $f'(x)$ y $f'(z)$.

**La derivada** Supongamos que $z = x + iy$ y $z_0 = x_0 + iy_0$; entonces el cambio en $z_0$ es la diferencia $\Delta z = z - z_0$ o $\Delta z = x - x_0 + i(y - y_0) = \Delta x + i\Delta y$. Si una función compleja $w = f(z)$ se define en $z$ y $z_0$, entonces el cambio correspondiente en la función es la diferencia $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$. La **derivada** de la función $f$ se define en términos del límite del cociente de diferencias $\Delta w/\Delta z$ conforme $\Delta z \to 0$.

**Definición 3.1.1 Derivada de una función compleja**

Suponga que la función compleja $f$ se define en una vecindad de un punto $z_0$. La derivada de $f$ en $z_0$, que se denota con $f'(z_0)$, es

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \tag{1}$$

siempre que este límite exista.

Si el límite en (1) existe, entonces se dice que la función $f$ es **derivable** en $z_0$. Otros dos símbolos que denotan a la derivada de $w = f(z)$ son $w'$ y $dw/dz$. Si se utiliza la última notación, entonces el valor de la derivada en un punto específico $z_0$ se escribe como $\left.\dfrac{dw}{dz}\right|_{z=z_0}$.

**EJEMPLO 1 Utilizando la definición 3.1.1**

Use la definición 3.1.1 para encontrar la derivada de $f(z) = z^2 - 5z$.

**Solución** Puesto que vamos a calcular la derivada de $f$ en cualquier punto, reemplazamos a $z_0$ en (1) por el símbolo $z$. Primero,

$$f(z + \Delta z) = (z + \Delta z)^2 - 5(z + \Delta z) = z^2 + 2z\Delta z + (\Delta z)^2 - 5z - 5\Delta z.$$

Segundo,

$$\begin{aligned} f(z + \Delta z) - f(z) &= z^2 + 2z\Delta z + (\Delta z)^2 - 5z - 5\Delta z - (z^2 - 5z) \\ &= 2z\Delta z + (\Delta z)^2 - 5\Delta z. \end{aligned}$$

Entonces, finalmente, de (1) se obtiene

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2 - 5\Delta z}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z(2z + \Delta z - 5)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z - 5).$$

El límite es $f'(z) = 2z - 5$. ❑

**Reglas de derivación** Las familiares reglas de la derivación del cálculo de variables reales se transfieren al cálculo de variables complejas. Si $f$ y $g$ son derivables en un punto $z$, y $c$ es una constante compleja, entonces (1) se puede utilizar para demostrar:

*Reglas de derivación*

*Regla de la constante:* $\frac{d}{dz}c = 0$ y $\frac{d}{dz}cf(z) = cf'(z)$ (2)

*Regla de la suma:* $\frac{d}{dz}[f(z) \pm g(z)] = f'(z) \pm g'(z)$ (3)

*Regla del producto:* $\frac{d}{dz}[f(z)g(z)] = f(z)g'(z) + f'(z)g(z)$ (4)

*Regla del cociente:* $\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}$ (5)

*Regla de la cadena:* $\frac{d}{dz}f(g(z)) = f'(g(z))\,g'(z).$ (6)

La **regla de la potencia** para la derivada de potencias de $z$ también es válida:

$$\frac{d}{dz}z^n = nz^{n-1}, \quad n \text{ es un entero.} \tag{7}$$

La combinación de (7) con (6) da la **regla para las funciones potencia**:

$$\frac{d}{dz}[g(z)]^n = n[g(z)]^{n-1}g'(z), \quad n \text{ es un entero.} \tag{8}$$

**EJEMPLO 2 Uso de las reglas de derivación**

Derive:

**(a)** $f(z) = 3z^4 - 5z^3 + 2z$ **(b)** $f(z) = \frac{z^2}{4z+1}$ **(c)** $f(z) = \left(iz^2 + 3z\right)^5$

**Solución**

(**a**) Utilizando la regla de potencia (7), la regla de la suma (3), junto con (2), obtenemos

$$f'(z) = 3\cdot 4z^3 - 5\cdot 3z^2 + 2\cdot 1 = 12z^3 - 15z^2 + 2.$$

(**b**) A partir de la regla del cociente (5),

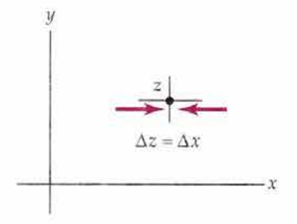
$$f'(z) = \frac{(4z+1)\cdot 2z - z^2\cdot 4}{(4z+1)^2} = \frac{4z^2+2z}{(4z+1)^2}.$$

(**c**) En la regla de las funciones potencia (8) se identifica $n = 5$, $g(z) = iz^2 + 3z$, y $g'(z) = 2iz + 3$, con lo que

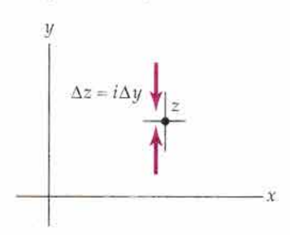
$$f'(z) = 5(iz^2 + 3z)^4(2iz+3).$$

❑

Para que una función compleja $f$ sea derivable en un punto $z_0$, sabemos del capítulo anterior que el límite $\lim_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ debe existir y ser igual a la misma cantidad compleja desde cualquier dirección, es decir, el límite debe existir independientemente de cómo $\Delta z$ tienda a 0. Esto significa que en el análisis complejo, el requerimiento de derivabilidad de una función $f(z)$ en un punto $z_0$ es una demanda mucho mayor que en el cálculo de las funciones reales $f(x)$, donde se puede tender a un número real $x_0$ en la recta numérica en sólo dos direcciones. Si una función compleja se forma especificando su parte real e imaginaria $u$ y $v$, tal como $f(z) = x + 4iy$ hay más probabilidad de que no sea derivable.




(**a**) $\Delta z \to 0$ a lo largo de una recta paralela al eje $x$




(**b**) $\Delta z \to 0$ a lo largo de una recta paralela al eje $y$

**Figura 3.1.1** Aproximándose a $z$ a lo largo de una recta horizontal y después a lo largo de una recta vertical

### EJEMPLO 3 Una función que no es derivable en ninguna parte

Demuestre que la función $f(z) = x + 4iy$ no es derivable en algún punto $z$.

**Solución** Sea $z$ cualquier punto en el plano complejo. Con $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$,

$$f(z+\Delta z) - f(z) = (x+\Delta x) + 4i(y+\Delta y) - x - 4iy = \Delta x + 4i\Delta y$$

y así

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x + 4i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}. \tag{9}$$

Ahora, como se muestra en la figura 3.1.1(a), si dejamos que $\Delta z \to 0$ a lo largo de una recta paralela al eje $x$, entonces $\Delta y = 0$ y $\Delta z = \Delta x$. A lo largo de esta trayectoria tenemos que:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = 1. \tag{10}$$

Por otra parte, si hacemos que $\Delta z \to 0$ lo largo de una recta paralela al eje $y$ como se muestra en la figura 3.1.1(b), entonces $\Delta x = 0$ y $\Delta z = i\Delta y$ de manera que

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{4i\Delta y}{i\Delta y} = 4. \tag{11}$$

En vista del hecho obvio de que los valores de (10) y (11) son diferentes, se concluye que el límite en (9) no existe. Por lo tanto, $f(z) = x + 4iy$ no es derivable en ninguna parte, es decir, $f$ no es derivable en ningún punto $z$. ❑

La regla de la potencia básica (7) no se aplica a las potencias del conjugado de $z$, ya que, como la función del ejemplo 3, la función $f(z) = \bar{z}$ no es derivable en ninguna parte. Vea el problema 21 de los ejercicios 3.1.

**Funciones analíticas** A pesar de que el requisito de la derivabilidad es una exigencia estricta, existe una clase de funciones de gran importancia, cuyos miembros cumplen los requisitos más severos. Estas funciones se llaman **funciones analíticas**.

**Definición 3.1.2 Analiticidad en un punto**

Una función compleja $w = f(z)$ se dice que es **analítica en un punto** $z_0$ si $f$ es derivable en $z_0$ y en cada punto de una vecindad de $z_0$.

Una función $f$ **es analítica en un dominio** $D$ si es analítica en cada punto de $D$. También se utiliza la frase "analítica *en* un dominio $D$". A pesar de que no se usan estos términos en este libro, una función $f$ que es analítica en un dominio $D$ se llama **holomorfa** o **regular**.

Muy importante ➡

Debe leer cuidadosamente la Definición 3.1.2. Analiticidad en un punto *no* es lo mismo que derivabilidad en un punto. Analiticidad *en un punto es una propiedad de vecindad*; en otras palabras, analiticidad es una propiedad que se define sobre un conjunto abierto. Se deja como un ejercicio para demostrar que la función $f(z) = |z|^2$ es derivable en $z = 0$, pero no es derivable en ningún otro punto. A pesar de que $f(z) = |z|^2$ es derivable en $z = 0$, no es analítica en ese punto porque no existe una vecindad de $z = 0$ *para la que* $f$ sea derivable, de ahí que la función $f(z) = |z|^2$ no es analítica en ningún punto. Vea el problema 19 en los ejercicios 3.1.

Por el contrario, el polinomio simple $f(z) = z^2$ es derivable en todo punto $z$ del plano complejo. Por tanto, $f(z) = z^2$ es analítica en todas partes.

**Funciones enteras** Una función que es analítica en todo punto $z$ del plano complejo se dice que es una **función entera**. En vista de las reglas de derivación (2), (3), (7) y (5), podemos concluir que las funciones polinomiales son derivables en todos los puntos $z$ del plano complejo y que las funciones racionales son analíticas en cualquier dominio $D$ que no contenga puntos en los que el denominador sea cero. El teorema siguiente resume estos resultados.

**Teorema 3.1.1 Funciones polinomiales y racionales**

(*i*) Una función polinomial compleja $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, donde $n$ es un entero no negativo, es una función entera.

(*ii*) Una función racional compleja $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, donde $p$ y $q$ son funciones polinomiales, es analítica en un dominio $D$ que no contiene ningún punto $z_0$ para el que $q(z_0) = 0$.

$1 \pm i$ son ceros en el denominador de $f$. ➡

**Puntos singulares** Dado que la función racional $f(z) = 4z/(z^2 - 2z + 2)$ no está definido en $1 + i$ y $1 - i$, $f$ no es analítica en estos puntos. Así, por (*ii*) del teorema 3.1.1, $f$ no es analítica en un dominio que contenga uno o ambos de estos puntos. En general, un punto $z$ en el que una función compleja

$w = f(z)$ no es analítica se llama **punto singular** de $f$. Vamos a analizar los puntos singulares con mayor profundidad en el capítulo 6.

Otra consecuencia de las reglas de derivación de la página 129 es:

### *Analiticidad de la suma, el producto y el cociente*

*Si las funciones $f$ y $g$ son analíticas en un dominio $D$, entonces la suma $f(z) + g(z)$, la diferencia $f(z) - g(z)$, y el producto $f(z)g(z)$ son analíticas en $D$. El cociente de $f(z)/g(z)$ es analítica siempre que $g(z) \neq 0$ en $D$.*

**Una definición alternativa de $f'(z)$** A veces es conveniente definir la derivada de una función $f$ usando una forma alternativa del cociente de diferencias $\Delta w/\Delta z$. Puesto que $\Delta z = z - z_0$, entonces $z = z_0 + \Delta z$, y así (1) puede escribirse como

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \tag{12}$$

A diferencia de lo que hicimos en el ejemplo 1, si deseamos calcular $f'$ en un punto general $z$ utilizando (12), entonces reemplazamos $z_0$ con el símbolo $z$ y *después* se calcula el límite. Vea los problemas 7 a 10 en los ejercicios 3.1.

Como en el análisis real, si una función compleja $f$ es derivable en un punto entonces la función es necesariamente continua en el punto. Usamos la forma de la derivada dada en (12) para demostrar el último enunciado.

**Teorema 3.1.2 Derivabilidad implica continuidad**

Si $f$ es derivable en un punto $z_0$ en un dominio $D$, entonces $f$ es continua en $z_0$.

**Demostración** Los límites $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ y $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)$ existen y son iguales a $f'(z_0)$ y a 0, respectivamente. Por tanto, de acuerdo con el teorema 2.6.2(*iii*) de la sección 2.6, podemos escribir el siguiente límite de un producto como el producto de los límites:

$$\begin{aligned}\lim_{z \to z_0} (f(z) - f(z_0)) &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot (z - z_0) \\ &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot \lim_{z \to z_0} (z - z_0) = f'(z_0) \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

De $\lim_{z \to z_0} (f(z) - f(z_0)) = 0$ llegamos a la conclusión de que $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. En vista de la definición 2.6.2, $f$ es continua en $z_0$. ❑

Por supuesto, el inverso del teorema 3.1.2 no es cierto; la continuidad de una función $f$ en un punto no garantiza que $f$ sea derivable en el punto. Por lo que se deduce del teorema 2.6.3 que la simple función $f(z) = x + 4iy$ es continua en cualquier punto porque las partes real e imaginaria de $f$, $u(x, y) = x$ y $v(x, y) = 4y$ son continuas en cualquier punto $(x, y)$. Sin embargo, vimos en el ejemplo 3 que $f(z) = x + 4iy$ no es derivable en ningún punto $z$.

Como otra consecuencia de la derivabilidad, la regla de L'Hôpital para calcular límites de la forma indeterminada 0/0, se transfiere al análisis complejo.

**Teorema 3.1.3 Regla de L'Hôpital**

Supongamos que $f$ y $g$ son funciones analíticas en un punto $z_0$ y $f(z_0) = 0$, $g(z_0) = 0$, pero $g'(z_0) \neq 0$. Entonces

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}. \tag{13}$$

La tarea de establecer (13) no es ni larga ni difícil. Se le guiará a través de los pasos para una demostración en el problema 33 de los ejercicios 3.1.

**EJEMPLO 4 Uso de la regla de L'Hôpital**

Calcule $\lim_{z \to 2+i} \dfrac{z^2 - 4z + 5}{z^3 - z - 10i}$.

**Solución** Si identificamos $f(z) = z^2 - 4z + 5$ y $g(z) = z^3 - z - 10i$, debe comprobar que $f(2 + i) = 0$ y $g(2 + i) = 0$. El límite dado tiene la forma indeterminada 0/0. Ahora bien, como $f$ y $g$ son funciones polinomiales, ambas funciones son necesariamente analíticas en $z_0 = 2 + i$. Usando

$$f'(z) = 2z - 4, \quad g'(z) = 3z^2 - 1, \quad f'(2 + i) = 2i, \quad g'(2 + i) = 8 + 12i,$$

vemos que con (13) se obtiene

$$\lim_{z \to 2+i} \frac{z^2 - 4z + 5}{z^3 - z - 10i} = \frac{f'(2 + i)}{g'(2 + i)} = \frac{2i}{8 + 12i} = \frac{3}{26} + \frac{1}{13}i.$$

❑

En el inciso (b) del ejemplo 4 en la sección 2.6 se recurrió al procedimiento lento de factorización y de eliminación para calcular el límite

$$\lim_{z \to 1+\sqrt{3}i} \frac{z^2 - 2z + 4}{z - 1 - \sqrt{3}i}. \tag{14}$$

Una relectura de ese ejemplo muestra que el límite (14) tiene la forma indeterminada 0/0. Con $f(z) = z^2 - 2z + 4$, $g(z) = z - 1 - \sqrt{3}i$, $f'(z) = 2z - 2$ y $g'(z) = 1$, la regla de L'Hôpital (13) da inmediatamente

$$\lim_{z \to 1+\sqrt{3}i} \frac{z^2 - 2z + 4}{z - 1 - \sqrt{3}i} = \frac{f'(1 + \sqrt{3}i)}{1} = 2\left(1 + \sqrt{3}i - 1\right) = 2\sqrt{3}i.$$

**Observaciones** *Comparación con el análisis real*

($i$) En el cálculo real de la derivada de una función $y = f(x)$ en un punto $x$ tiene muchas interpretaciones. Por ejemplo, $f'(x)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto $(x, f(x))$. Cuando la pendiente es positiva, negativa o cero, la función, a su vez, está aumentando, disminuyendo, y posiblemente tiene un máximo o mínimo. También, $f'(x)$ es la razón de cambio instantánea de $f$ en $x$. En un entorno físico, la razón de cambio se puede interpretar como la velocidad de un objeto en movimiento. *Ninguna de estas interpretaciones se transfiere*

*al cálculo complejo.* Por lo tanto, es justo preguntar: ¿Qué significa la derivada de una función compleja $w = f(z)$? He aquí la respuesta: En análisis complejo la principal preocupación *no* es lo que una derivada de la función es o *representa,* sino más bien, si una función $f$ *tiene* en realidad una derivada, el hecho de que una función compleja $f$ tenga una derivada nos dice mucho acerca de la función. Como hemos visto, cuando $f$ es derivable en $z$ y en cada punto de una vecindad de $z$, entonces $f$ es analítica en el punto $z$. Verá la importancia de las funciones analíticas en los capítulos que restan de este libro. Por ejemplo, la derivada juega un papel importante en la teoría de los mapeos para funciones complejas. A grandes rasgos, bajo un mapeo definido por una función analítica $f$, la magnitud y el sentido de un ángulo entre dos curvas que se cruzan en un punto $z_0$ en el plano $z$ se conserva en el plano $w$ en todos los puntos en que $f'(z) \neq 0$. Vea el capítulo 7.

(*ii*) Se ha indicado en el análisis anterior que $f(z) = |z|^2$ era derivable sólo en el punto $z = 0$. Por el contrario, la función real $f(x) = |x|^2$ es derivable en todo punto. La función real $f(x) = x$ es derivable en todo punto, pero la función compleja $f(z) = x = \text{Re}(z)$ no es derivable en ninguna parte.

(*iii*) Las fórmulas de derivación (2)-(8) son importantes, pero no tan importantes como en el análisis real. En análisis complejo tratamos con funciones tales como $f(z) = 4x^2 - iy$ y $g(z) = xy + i(x + y)$, que, aun si tienen derivadas, pueden ser no derivables con las fórmulas (2)-(8).

(*iv*) En esta sección no hemos mencionado el concepto de derivadas de orden superior de las funciones complejas. Vamos a tratar este tema a profundidad en la sección 5.5. No hay nada sorprendente en las definiciones de las derivadas más altas; se definen exactamente de la misma manera que en el análisis real. Por ejemplo, la segunda derivada es la derivada de la primera derivada. En el caso $f(z) = 4z^3$ vemos que $f'(z) = 12z^2$ y así la segunda derivada $f''(z) = 24z$. Pero hay una diferencia importante entre las variables reales y complejas respecto a la existencia de las derivadas de orden superior. En el análisis real, si una función $f$ tiene, por ejemplo, una primera derivada, no hay garantía de que $f$ tenga cualquier otra derivada de mayor orden. Por ejemplo, en el intervalo $(-1, 1)$, $f(x) = x^{3/2}$ es derivable en $x = 0$, pero $f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$ no es derivable en $x = 0$. En el análisis complejo, si una función $f$ es *analítica* en un dominio $D$ entonces, $f$ tiene derivada en cada punto de $D$. Vamos a ver en la sección 5.5 que este hecho por sí solo garantiza que $f$ tiene derivadas de orden superior en todos los puntos $D$. En realidad, una función analítica $f$ es infinitamente derivable en $D$.

(*v*) La definición de "analítica en un punto $a$" en el análisis real difiere de la definición común de este concepto en el análisis complejo (definición 3.1.2). En el análisis real, analiticidad de una función se define en términos de series de potencias: una función $y = f(x)$ es analítica en un punto $a$ si $f$ tiene una serie de Taylor en $a$ que representa a $f$ en una vecindad de $a$. En vista de las observaciones (*iv*), ¿por qué estas dos definiciones no son realmente diferentes?

(*vi*) Como en el cálculo real, puede ser necesario aplicar la regla de L'Hôpital varias veces sucesivamente para calcular un límite. Es decir, si $f(z_0)$, $g(z_0)$, $f'(z_0)$ y $g'(z_0)$ son todas cero, el límite $\lim_{z \to z_0} f(z)/g(z)$

aún puede existir. En general, si $f$, $g$, y sus $n-1$ primeras derivadas son cero en $z_0$ y $g^{(n)}(z_0) \neq 0$; entonces,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{g^{(n)}(z_0)}.$$

## EJERCICIOS 3.1

*Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-11.*

En los problemas 1 a 6 use (1) de la definición 3.1.1 para encontrar $f'(z)$ para la función dada.

**1.** $f(z) = 9iz + 2 - 3i$

**2.** $f(z) = 15z^2 - 4z + 1 - 3i$

**3.** $f(z) = iz^3 - 7z^2$

**4.** $f(z) = \dfrac{1}{z}$

**5.** $f(z) = z - \dfrac{1}{z}$

**6.** $f(z) = -z^{-2}$

En los problemas 7 a 10 utilice la definición alternativa (12) para encontrar $f'(z)$ para la función dada.

**7.** $f(z) = 5z^2 - 10z + 8$

**8.** $f(z) = z^3$

**9.** $f(z) = z^4 - z^2$

**10.** $f(z) = \dfrac{1}{2iz}$

En los problemas 11 a 18 utilice las reglas de derivación para encontrar $f'(z)$ para la función dada.

**11.** $f(z) = (2-i)z^5 + iz^4 - 3z^2 + i^6$

**12.** $f(z) = 5(iz)^3 - 10z^2 + 3 - 4i$

**13.** $f(z) = (z^6 - 1)(z^2 - z + 1 - 5i)$

**14.** $f(z) = (z^2 + 2z - 7i)^2 (z^4 - 4iz)^3$

**15.** $f(z) = \dfrac{iz^2 - 2z}{3z + 1 - i}$

**16.** $f(z) = -5iz^2 + \dfrac{2+i}{z^2}$

**17.** $f(z) = \left(z^4 - 2iz^2 + z\right)^{10}$

**18.** $f(z) = \left(\dfrac{(4+2i)z}{(2-i)z^2 + 9i}\right)^3$

**19.** La función $f(z) = |z|^2$ es continua en el origen.

(**a**) Demuestre que $f$ *es* derivable en el origen.

(**b**) Demuestre que $f$ *no es* derivable en ningún punto $z \neq 0$.

**20.** Demuestre que la función

$$f(z) = \begin{cases} 0, & z = 0 \\ \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i\dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & z \neq 0 \end{cases}$$

no es derivable en $z = 0$ haciendo $\Delta z \to 0$ primero a lo largo del eje $y$ luego a lo largo de la recta $y = x$.

En los problemas 21 y 22 procedemos como en el ejemplo 3 para demostrar que la función dada no es derivable en ninguna parte.

**21.** $f(z) = \bar{z}$

**22.** $f(z) = |z|$

En los problemas 23 a 26 utilice la regla de L'Hôpital para calcular el límite dado.

**23.** $\displaystyle\lim_{z \to i} \frac{z^7 + i}{z^{14} + 1}$

**24.** $\displaystyle\lim_{z \to \sqrt{2} + \sqrt{2}i} \frac{z^4 + 16}{z^2 - 2\sqrt{2}z + 4}$

**25.** $\displaystyle\lim_{z \to 1+i} \frac{z^5 + 4z}{z^2 - 2z + 2}$

**26.** $\displaystyle\lim_{z \to \sqrt{2}i} z\frac{z^3 + 5z^2 + 2z + 10}{z^5 + 2z^3}$

En los problemas 27 a 30 determine los puntos en que la función dada no es analítica.

**27.** $f(z) = \dfrac{iz^2 - 2z}{3z + 1 - i}$

**28.** $f(z) = -5iz^2 + \dfrac{2+i}{z^2}$

**29.** $f(z) = \left(z^4 - 2iz^2 + z\right)^{10}$

**30.** $f(z) = \left(\dfrac{(4+2i)z}{(2-i)z^2 + 9i}\right)^3$

## Enfocando los conceptos

**31.** Use la definición 2.6.2 y el teorema 2.6.2 para demostrar la regla de la constante $\frac{d}{dz}cf(z) = cf'(z)$.

**32.** Use la Definición 2.6.2 y el teorema 2.6.2 para demostrar la regla de la suma $\frac{d}{dz}[f(z) + g(z)] = f'(z) + g'(z)$.

**33.** En este problema se le guiará a través del inicio de la demostración de la proposición:

*Si las funciones $f$ y $g$ son analíticas en un punto $z_0$ y $f(z_0) = 0$, $g(z_0) = 0$, pero $g'(z_0) \neq 0$, entonces* $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$.

**Demostración** Partimos de la hipótesis de que $f$ y $g$ son analíticas en un punto $z_0$. La analiticidad en $z_0$ implica que $f$ y $g$ son derivables en $z_0$. Por lo tanto, de (12) ambos límites,

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{y} \quad g'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}$$

existen. Pero puesto que $f(z_0) = 0$, $g(z_0) = 0$, los límites anteriores son los mismos que

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{z - z_0} \quad \text{y} \quad g'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z)}{z - z_0}.$$

Ahora examine $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)}$ y termine la demostración.

**34.** En este problema se le guiará a través del inicio de la demostración de la regla del producto.

**Demostración** Partimos de la hipótesis de que $f$ y $g$ son derivables en un punto $z$; es decir, cada uno de los límites siguientes existen:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad \text{y} \quad g'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{g(z + \Delta z) - g(z)}{\Delta z}$$

**(a)** Justifique la igualdad

$$\frac{d}{dz}[f(z)g(z)] = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z)g(z + \Delta z) - f(z)g(z)}{\Delta z}$$
$$= \lim_{\Delta z \to 0} \left[\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} g(z + \Delta z) + f(z)\frac{g(z + \Delta z) - g(z)}{\Delta z}\right].$$

**(b)** Use la definición 2.6.2 para justificar $\lim_{\Delta z \to 0} g(z + \Delta z) = g(z)$.

**(c)** Utilice los teoremas 2.6.2(*ii*) y 2.6.2(*iii*) para terminar la demostración.

**35.** En este problema demostrará que $f(z) = \bar{z}$ no es derivable en ninguna parte usando la forma polar $\Delta z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$.

**(a)** ¿A qué debe tender $r$ si $\Delta z \to 0$? ¿$\theta$ debe aproximarse a un valor específico?

**(b)** Si $f(z) = \bar{z}$, demuestre que

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta}.$$

**(c)** Explique brevemente por qué el resultado del inciso (b) demuestra que $f$ no es derivable en ninguna parte.

**36.** En este problema demostrará que $f(z) = |z|$ no es derivable en ninguna parte con la definición alternativa (12) y las formas polares de $z$ y $z_0$.

**(a)** Sea $z_0 = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ y $z = (r + \Delta r)(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$. A lo largo de esta trayectoria determine $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$.

(b) Sea $z_0 = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ y $z = r[\cos(\theta + \Delta\theta) + i\,\text{sen}\,(\theta + \Delta\theta)]$. A lo largo de esta trayectoria determine $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$.

(c) Explique brevemente por qué los resultados de los incisos (a) y (b) demuestran que $f$ no es derivable en ninguna parte.

**37.** Supongamos que $f'(z)$ existe en un punto $z$. ¿Es $f'(z)$ continua en $z$?

**38.** (a) Sea $f(z) = z^2$. Escriba las partes real e imaginaria de $f$ y de $f'$. ¿Qué observa?

(b) Repita el inciso (a) para $f(z) = 3iz + 2$.

(c) Haga una conjetura acerca de la relación entre las partes real e imaginaria de $f$ y $f'$.

## 3.2 Ecuaciones de Cauchy-Riemann

En la sección anterior vimos que una función $f$ de una variable compleja $z$ es *analítica en un punto* $z$ cuando $f$ es derivable en $z$ y derivable en cada punto en una vecindad de $z$. Este requisito es más estricto que simplemente *derivabilidad en un punto,* ya que una función compleja puede ser derivable en un punto $z$ y, sin embargo, no ser derivable en ningún otro punto. Una función $f$ es *analítica en un dominio D* si $f$ es derivable en todos los puntos de $D$. Vamos a desarrollar una prueba para la analiticidad de una función compleja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ que está basada en las derivadas parciales de sus partes real e imaginaria $u$ y $v$.

**Una condición necesaria para la analiticidad** En el siguiente teorema vemos que si una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es derivable en un punto $z$, entonces las funciones $u$ y $v$ deben satisfacer un par de ecuaciones que relacionan sus derivadas parciales de primer orden.

**Teorema 3.2.1 Ecuaciones de Cauchy-Riemann**

Supongamos que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es derivable en un punto $z = x + iy$. Entonces en $z$ las derivadas parciales de primer orden de $u$ y $v$ existen y satisfacen las **ecuaciones de Cauchy-Riemann**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

**Demostración** La derivada de $f$ en $z$ está dada por

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}. \tag{2}$$

Al escribir $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, (2) se convierte en

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x + i\Delta y}. \tag{3}$$

Ya que se supone que existe el límite (2), $\Delta z$ puede aproximarse a cero desde cualquier dirección conveniente. En particular, si elegimos hacer que $\Delta z \to 0$ lo largo de una recta horizontal, entonces $\Delta y = 0$ y $\Delta z = \Delta x$. Entonces podemos escribir a (3) como

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y) + i\,[v(x + \Delta x, y) - v(x, y)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x\to 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x}. \end{aligned} \tag{4}$$

PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
Biblioteca Central

La existencia de $f'(z)$ implica que cada límite en (4) existe. Estos límites son las definiciones de las derivadas parciales de primer orden respecto a $x$ de $u$ y de $v$, respectivamente. Hemos demostrado dos cosas: que $\partial u/\partial x$ y $\partial v/\partial x$ existen en el punto $z$, y que la derivada de $f$ es

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{5}$$

Ahora hacemos que $\Delta z \to 0$ a lo largo de una recta vertical. Con $\Delta x = 0$ y $\Delta z = i\Delta y$, (3) se convierte en

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y}. \tag{6}$$

En este caso (6) nos demuestra que $\partial u/\partial y$ y $\partial v/\partial y$ existen en $z$ y que

$$f'(z) = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \tag{7}$$

Igualando las partes real e imaginaria de (5) y (7) se obtiene el par de ecuaciones en (1). ❑

Ya que el teorema 3.2.1 establece que las ecuaciones de Cauchy-Riemann (1) se conservan en $z$ como una consecuencia *necesaria* de que $f$ es derivable en $z$, no podemos usar el teorema para ayudarnos a determinar dónde es derivable $f$. *Pero* es importante darse cuenta de que el teorema 3.2.1 nos puede decir si una función $f$ no tiene una derivada. Si las ecuaciones en (1) *no* se satisfacen en un punto $z$, entonces $f$ no puede ser derivable en $z$. Ya hemos visto en el ejemplo 3 de la sección 3.1 que $f(z) = x + 4iy$ no es derivable en ningún punto $z$. Si identificamos $u = x$ y $v = 4y$, entonces $\partial u/\partial x = 1$, $\partial v/\partial y = 4$, $\partial u/\partial y = 0$ y $\partial v/\partial x = 0$. Puesto que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 4$$

las dos ecuaciones en (1) no pueden cumplirse simultáneamente en cualquier punto $z$. Por lo tanto, de acuerdo con el teorema 3.2.1, $f$ no es derivable en ningún punto.

También se deduce del teorema 3.2.1, que si una función compleja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en un dominio $D$, entonces las funciones reales $u$ y $v$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (1) en todo punto de $D$.

### EJEMPLO 1 Comprobación del teorema 3.2.1

La función polinomial $f(z) = z^2 + z$ es analítica para todo $z$, y se puede escribir como $f(z) = x^2 - y^2 + x + i(2xy + y)$. Por lo tanto, $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$ y $v(x, y) = 2xy + y$. Para cualquier punto $(x, y)$ en el plano complejo, vemos que se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1 = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

❑

La forma de contraposición* de la frase anterior del ejemplo 1 es:

## *Criterio para la no analiticidad*

*Si las ecuaciones de Cauchy-Riemann no se satisfacen en todos los puntos z en un dominio D, entonces la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ no puede ser analítica en D.*

**EJEMPLO 2 Uso de las ecuaciones de Cauchy-Riemann**

Demuestre que la función compleja $f(z) = 2x^2 + y + i(y^2 - x)$ no es analítica en ningún punto.

**Solución** Identificamos $u(x, y) = 2x^2 + y$ y $v(x, y) = y^2 - x$. De

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 4x \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -1 \end{aligned} \tag{8}$$

vemos que $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$ pero que la igualdad $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ se cumple sólo en la recta $y = 2x$. Sin embargo, para cualquier punto $z$ en la recta, no hay vecindad o disco abierto alrededor de $z$ en el que se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Llegamos a la conclusión de que $f$ no es analítica en ningún punto. ❑

**Una condición suficiente para la analiticidad** Por sí mismas, las ecuaciones de Cauchy-Riemann no garantizan analiticidad de una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ en un punto $z = x + iy$. Es posible que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplan en $z$, y que, sin embargo, $f(z)$ puede ser no derivable en $z$, o $f(z)$ puede ser derivable en $z$, pero no en ningún otro punto. En cualquier caso, $f$ es no analítica en $z$. Vea el problema 36 de los ejercicios 3.2. Sin embargo, cuando agregamos la condición de continuidad a $u$ y $v$ y para las cuatro derivadas parciales $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$, y $\partial v/\partial y$, se puede demostrar que las ecuaciones de Cauchy-Riemann son no sólo necesarias sino también suficientes para garantizar la analiticidad de $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ en $z$. La demostración es larga y complicada, razón por la cual sólo enunciamos el resultado.

**Teorema 3.2.2 Criterio para la analiticidad**

Supongamos que las funciones reales $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son continuas y tienen derivadas parciales de primer orden continuas en un dominio $D$. Si $u$ y $v$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (1) en todos los puntos de $D$, entonces la función compleja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en $D$.

* Una proposición "Si $P$, entonces $Q$" es lógicamente equivalente a su contraposición: "Si no $Q$, entonces no $P$".

**EJEMPLO 3 Uso del teorema 3.2.2**

Para la función $f(z) = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$, las funciones reales $u(x, y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ y $v(x, y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$ son continuas, excepto en el punto donde $x^2 + y^2 = 0$, es decir, en $z = 0$. Además, las cuatro derivadas parciales de primer orden

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

son continuas, excepto en $z = 0$. Por último, vemos de

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y} \ \text{ y } \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen, excepto en $z = 0$. Así llegamos a la conclusión del teorema 3.2.2 de que $f$ es analítica en cualquier dominio $D$ que no contiene el punto $z = 0$. ❑

Los resultados de (5) y (7) se obtuvieron bajo el supuesto básico de que $f$ es derivable en el punto $z$. En otras palabras, si $f$ es derivable, entonces (5) y (7) nos dan una fórmula para calcular la derivada $f'(z)$:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{9}$$

Por ejemplo, ya sabemos de la parte ($i$) del teorema 3.1.1 que $f(z) = z^2$ es continua y derivable para toda $z$. Con $u(x, y) = x^2 - y^2$, $\partial u/\partial x = 2x$, $v(x, y) = 2xy$, y $\partial v/\partial y = 2y$, vemos de (9) que

$$f'(z) = 2x + i2y = 2(x + iy) = 2z.$$

Recordemos que analiticidad implica derivabilidad, pero no a la inversa. El teorema 3.2.2 tiene un análogo que da el siguiente criterio para la derivabilidad.

***Condiciones suficientes para la derivabilidad***

*Si las funciones reales $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son continuas y tienen derivadas parciales de primer orden continuas en una vecindad del punto $z$, y si $u$ y $v$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (1) en $z$, entonces la función compleja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es derivable en $z$ y $f'(z)$ está dada por (9).*

**EJEMPLO 4 Una función derivable en una recta**

En el ejemplo 2 vimos que la función compleja $f(z) = 2x^2 + y + i(y^2 - x)$ no era analítica en ningún punto, pero que, sin embargo, se satisfacían las ecuaciones de Cauchy-Riemann en la recta $y = 2x$. Puesto que las funciones $u(x, y) = 2x^2 + y$, $\partial u/\partial x = 4x$, $\partial u/\partial y = 1$, $v(x, y) = y^2 - x$, $\partial v/\partial x = -1$, y $\partial v/\partial y = 2y$ son continuas en cada punto, se tiene que $f$ es derivable en la recta $y = 2x$.

Por otra parte, de (9) vemos que la derivada de $f$ en los puntos de esta recta está dada por $f'(z) = 4x - i = 2y - i$. ❑

El siguiente teorema es una consecuencia directa de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Su demostración se deja como ejercicio. Vea los problemas 28 y 30 de los ejercicios 3.2.

**Teorema 3.2.3 Funciones constantes**

Suponga que la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en un dominio $D$.

(*i*) Si $|f(z)|$ es constante en $D$, entonces también lo es $f(z)$.

(*ii*) Si $f'(z) = 0$ en $D$, entonces $f(z) = c$ en $D$, donde $c$ es una constante compleja.

**Coordenadas polares** En la sección 2.1 vimos que una función compleja se puede expresar en términos de coordenadas polares. De hecho, con frecuencia es más cómodo utilizar la forma $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$. En coordenadas polares las ecuaciones de Cauchy-Riemann se convierten en

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}. \tag{10}$$

La versión polar de (9) en un punto $z$ cuyas coordenadas polares son $(r, \theta)$ es entonces,

$$f'(z) = e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}e^{-i\theta}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - i\frac{\partial u}{\partial \theta}\right). \tag{11}$$

Vea los problemas 34 y 35 de los ejercicios 3.2.

## Observaciones *Comparación con el análisis real*

En el cálculo real, una de las propiedades notables de la función exponencial $f(x) = e^x$ es que $f'(x) = e^x$. En (3) de la sección 2.1 obtuvimos la definición de la exponencial compleja $f(z) = e^z$. Ahora estamos en condiciones de demostrar que $f(z) = e^z$ es derivable en todo punto y que esta función compleja comparte la misma propiedad de la derivada que su contraparte real, es decir, $f'(z) = f(z)$. Véase el problema 23 de los ejercicios 3.2.

## EJERCICIOS 3.2 *Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-11.*

En los problemas 1 y 2, la función dada es analítica para toda $z$. Demuestre que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen en todo punto.

**1.** $f(z) = z^3$

**2.** $f(z) = 3z^2 + 5z - 6i$

En los problemas 3 a 8 demuestre que la función dada no es analítica en ningún punto.

**3.** $f(z) = \text{Re}(z)$

**4.** $f(z) = y + ix$

**5.** $f(z) = 4z - 6\bar{z} + 3$

**6.** $f(z) = \bar{z}^2$

**7.** $f(z) = x^2 + y^2$

**8.** $f(z) = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\dfrac{y}{x^2 + y^2}$

En los problemas 9 a 16 (**a**) use el teorema 3.2.2 para demostrar que la función dada es analítica en un dominio adecuado, y (**b**) use (9) u (11) para encontrar la derivada de la función en el dominio.

**9.** $f(z) = e^{-x}\cos y - ie^{-x}\operatorname{sen} y$

**10.** $f(z) = x + \operatorname{sen} x\cosh y + i(y + \cos x\operatorname{senh} y)$

**11.** $f(z) = e^{x^2-y^2}\cos 2xy + ie^{x^2-y^2}\operatorname{sen} 2xy$

**12.** $f(z) = 4x^2 + 5x - 4y^2 + 9 + i(8xy + 5y - 1)$

**13.** $f(z) = \dfrac{x-1}{(x-1)^2+y^2} - i\dfrac{y}{(x-1)^2+y^2}$

**14.** $f(z) = \dfrac{x^3+xy^2+x}{x^2+y^2} + i\dfrac{x^2y+y^3-y}{x^2+y^2}$

**15.** $f(z) = \dfrac{\cos\theta}{r} - i\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{r}$

**16.** $f(z) = 5r\cos\theta + r^4\cos 4\theta + i(5r\operatorname{sen}\theta + r^4\operatorname{sen} 4\theta)$

En los problemas 17 y 18, encuentre las constantes reales $a$, $b$, $c$ y $d$ de manera que la función dada sea entera.

**17.** $f(z) = 3x - y + 5 + i(ax + by - 3)$

**18.** $f(z) = x^2 + axy + by^2 + i(cx^2 + dxy + y^2)$

En los problemas 19 a 22 (**a**) demuestre que la función dada no es analítica en ningún punto, pero es derivable a lo largo de la(s) curva(s) indicada(s), y (**b**) use (9) o (11) para encontrar la derivada de la función en la curva(s).

**19.** $f(z) = x^2 + y^2 + 2ixy$ ; eje $x$

**20.** $f(z) = 3x^2y^2 - 6ix^2y^2$; ejes coordenados

**21.** $f(z) = x^3 + 3xy^2 - x + i(y^3 + 3x^2y - y)$; ejes coordenados

**22.** $f(z) = x^2 - x + y + i(y^2 - 5y - x)$; $y = x + 2$

**23.** En la sección 2.1 se define la función exponencial compleja $f(z) = e^z$ en la forma siguiente $e^z = e^x\cos y + ie^x\operatorname{sen} y$.

(**a**) Demuestre que $f(z) = e^z$ es una función entera.

(**b**) Demuestre que $f'(z) = f(z)$

**24.** En la sección 2.6 definimos la rama principal de la raíz cuadrada compleja de la siguiente manera $z^{1/2} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$, $-\pi < \theta < \pi$.

(**a**) Use (10) para demostrar que $f_1(z) = z^{1/2}$ es analítica en el dominio $-\pi < \theta < \pi$.

(**b**) Utilice (11) para demostrar que $f_1'(z) = \frac{1}{2}z^{-1/2}$ en este dominio.

## Enfocando los conceptos

**25.** Supongamos que $f(z)$ es analítica. Demuestre que $|f'(z)|^2 = u_x^2 + v_x^2 = u_y^2 + v_y^2$.

**26.** Supongamos que $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son las partes real e imaginaria de una función analítica $f$. ¿Puede $g(z) = v(x, y) + iu(x, y)$ ser una función analítica? Analice y defienda sus respuestas con argumentos matemáticos.

**27.** Supongamos que $f(z)$ es analítica. ¿Puede $g(z) = \overline{f(z)}$ ser analítica? Analice y defienda sus respuestas con argumentos matemáticos.

**28.** En este problema se le guiará a través del inicio de la demostración de la proposición:

*Si $f$ es analítica en un dominio $D$, y $|f(z)| = c$, donde $c$ es constante, entonces $f$ es constante en $D$.*

**Demostración** Comenzamos con la hipótesis de que $|f(z)| = c$. Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, entonces $|f(z)|^2 = c^2$ es igual que $u^2 + v^2 = c^2$. Las derivadas parciales de la última expresión respecto a $x$ y $y$ son, respectivamente,

$$2uu_x + 2vv_x = 0 \text{ y } 2uu_y + 2vv_y = 0.$$

Complete la demostración usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann para reemplazar $v_x$ y $v_y$ en el último par de ecuaciones. Luego de resolver para $u_x$ y $u_y$ y sacar una conclusión, use de nuevo las ecuaciones de Cauchy-Riemann y resuelva para $v_x$ y $v_y$.

**29.** Si $f(z) = \bar{z}/z$ entonces demuestre que $|f(z)|$ es constante en el dominio definido por $z \neq 0$. Explique por qué esto no contradice el teorema 3.2.3(i).

**30.** En este problema se le guiará a través del inicio de la demostración de la proposición:

*Si $f$ es analítica en un dominio $D$, y $f'(z) = 0$, entonces $f$ es constante en $D$.*

**Demostración** Comenzamos con la hipótesis de que $f$ es analítica en $D$ y, por lo tanto, es derivable en todo $D$. Por tanto, de (9) de esta sección y de la suposición de que $f'(z) = 0$ en $D$, tenemos $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$. Ahora complete la demostración.

**31.** Use las ecuaciones de Cauchy-Riemann para demostrar que si $f$ es analítica en un dominio $D$, y si $f'(z)$ es una constante, entonces $f(z)$ debe ser una función lineal compleja en $D$.

**32.** Use la proposición en el problema 30 para demostrar que si $f$ y $g$ son analíticas y $f'(z) = g'(z)$, entonces $f(z) = g(z) + c$, donde $c$ es una constante. [*Sugerencia:* Forma $h(z) = f(z) - g(z)$].

**33.** Si $f(z)$ y $\overline{f(z)}$ son analíticas en un dominio $D$, entonces, ¿qué se puede decir de $f$ en todo $D$?

**34.** Supongamos que $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, y $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Demuestre que

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\,\text{sen}\,\theta, \qquad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial u}{\partial x}r\,\text{sen}\theta + \frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta \tag{12}$$

y

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial v}{\partial y}\,\text{sen}\,\theta, \qquad \frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial x}r\,\text{sen}\theta + \frac{\partial v}{\partial y}r\cos\theta. \tag{13}$$

Ahora use (1) en las expresiones anteriores para $v_r$ y $v_\theta$. Al comparar con sus resultados con las expresiones de $u_r$ y $u_\theta$, deduzca las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares dadas en (10).

**35.** Suponga que la función $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ es derivable en un punto $z$ cuyas coordenadas polares son $(r, \theta)$. Resuelva las dos ecuaciones en (12) para $u_x$ y luego resuelva las dos ecuaciones en (13) para $v_x$. Después demuestre que la derivada de $f$ en $(r, \theta)$ es

$$f'(z) = (\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta)\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right).$$

**36.** Considere la función

$$f(z) = \begin{cases} 0, & z = 0 \\ \dfrac{z^5}{|z^4|}, & z \neq 0. \end{cases}$$

(**a**) Exprese $f$ en la forma $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

(**b**) Demuestre que $f$ no es derivable en el origen.

(**c**) Demuestre que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen en el origen. [*Sugerencia*: Use el límite de las definiciones de las derivadas parciales $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$, y $\partial v/\partial y$ en (0, 0)].

## 3.3 Funciones armónicas

En la sección 5.5 veremos que cuando una función compleja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en un punto $z$, entonces *todas* las derivadas de $f$: $f'(z), f''(z), f'''(z), \ldots$ también son analíticas en $z$. Como consecuencia de este hecho notable, podemos concluir que todas las derivadas parciales de las funciones reales $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son continuas en $z$. De la continuidad de las derivadas parciales entonces sabemos que las derivadas parciales mixtas de segundo orden son iguales. En esta sección se utilizará este último hecho, junto con las ecuaciones de Cauchy-Riemann, para demostrar que existe una conexión entre las partes real e imaginaria de una función analítica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y la ecuación diferencial parcial de segundo orden

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Esta ecuación, una de las más famosas de las matemáticas aplicadas, se conoce como la **ecuación de Laplace** con dos variables. La suma $\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$ de las derivadas parciales de segundo orden en (1) se denota por $\nabla^2 \phi$ y se llama **laplaciano** de $\phi$. Entonces la ecuación de Laplace (1) se abrevia como $\nabla^2 \phi = 0$.

**Funciones armónicas** La solución $\phi(x, y)$ de la ecuación de Laplace (1) en un dominio $D$ del plano recibe un nombre especial.

**Definición 3.3.1 Funciones armónicas**

Una función de valores reales $\phi$ de dos variables reales $x$ y $y$ que tiene primeras y segundas derivadas parciales continuas en un dominio $D$, y satisface la ecuación de Laplace, se dice que es **armónica** en $D$.

Las funciones armónicas se encuentran en el estudio de las temperaturas y potenciales. Estas aplicaciones se introducen en la sección 3.4. En el siguiente teorema, vemos que tanto las partes real como imaginaria de una función analítica son armónicas.

**Teorema 2.3.1 Funciones armónicas**

Suponga que la función compleja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en un dominio $D$. Entonces las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son armónicas en $D$.

**Demostración** Suponga que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en el dominio $D$ y que $u$ y $v$ tienen derivadas continuas de segundo orden en $D$.* Ya que $f$ es analítica, las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen en todo

*La continuidad de las derivadas parciales de segundo orden de $u$ y $v$ no es parte de la hipótesis del teorema. Este hecho se demostrará en el capítulo 5.

punto $z$. Derivando ambos lados de $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ respecto a $x$, y derivando ambos lados de $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$ respecto a $y$ se obtienen, respectivamente,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}. \tag{2}$$

Con la suposición de continuidad, las derivadas parciales mezcladas $\partial^2 v/\partial x\, \partial y$ y $\partial^2 v/\partial y\, \partial x$ son iguales. Por tanto, sumando las dos ecuaciones en (2) vemos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{o} \quad \nabla^2 u = 0.$$

Esto demuestra que $u(x, y)$ es armónica.

Ahora derivando ambos lados de $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ respecto a $y$, y derivando ambos lados de $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$ respecto a $x$, se obtiene, a su vez, que $\partial^2 u/\partial y\, \partial x = \partial^2 v/\partial y^2$ y $\partial^2 u/\partial x\, \partial y = -\partial^2 v/\partial x^2$. Restando las dos últimas ecuaciones se obtiene $\nabla^2 v = 0$. ❑

---

**EJEMPLO 1 Funciones armónicas**

La función $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ es continua. Por lo tanto, las funciones $u(x, y) = x^2 - y^2$ y $v(x, y) = 2xy$ son necesariamente armónicas en cualquier dominio $D$ del plano complejo. Esto también es fácil de comprobar directamente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 + 0 = 0.$$

❑

**Funciones armónicas conjugadas** Acabamos de demostrar que si una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en un dominio $D$, entonces sus partes real e imaginaria $u$ y $v$ son necesariamente armónicas en $D$. Ahora supongamos que $u(x, y)$ es una función real dada que se sabe que es armónica en $D$. Si es posible encontrar otra función real armónica $v(x, y)$ tal que $u$ y $v$ satisfagan las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo el dominio $D$, entonces la función $v(x, y)$ se llama una **armónica conjugada** de $u(x, y)$. Al combinar funciones como $u(x, y) + iv(x, y)$ se obtiene una función compleja que es analítica en $D$.

---

**EJEMPLO 2 Conjugada armónica**

(**a**) Compruebe que la función $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 5y$ es armónica en el plano complejo.
(**b**) Encuentre la función armónica conjugada de $u$.

**Solución**

(**a**) De las derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy - 5, \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x$$

vemos que $u$ satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0.$$

(**b**) Dado que la función armónica conjugada $v$ debe satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann $\partial v/\partial y = \partial u/\partial x$ y $\partial v/\partial x = -\partial u/\partial y$, debemos tener

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + 5. \tag{3}$$

Integrando parcialmente la primera ecuación en (3) respecto a la variable $y$ se obtiene $v(x, y) = 3x^2y - y^3 + h(x)$. La derivada parcial respecto a $x$ de esta última ecuación es

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + h'(x).$$

Cuando se sustituye este resultado en la segunda ecuación de (3) obtenemos $h'(x) = 5$, y así $h(x) = 5x + C$, donde $C$ es una constante real. Por lo tanto, la función armónica conjugada de $u$ es $v(x, y) = 3x^2y - y^3 + 5x + C$. ❑

En el ejemplo 2, combinando $u$ y su armónica conjugada $v$ como $u(x, y) + iv(x, y)$, la función compleja resultante

$$f(z) = x^3 - 3xy^2 - 5y + i(3x^2 - y^3 + 5x + C)$$

es una función analítica en todo el dominio $D$ que consiste, en este caso, del plano complejo. En el ejemplo 1, ya que $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ es continua, la función real $v(x, y) = 2xy$ es el conjugado armónico de $u(x, y) = x^2 + y^2$. Vea el problema 20 de los ejercicios 3.3.

## Observaciones *Comparación con el análisis real*

En esta sección hemos visto que si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es una función analítica en un dominio $D$, entonces ambas funciones $u$ y $v$ satisfacen $\nabla^2\phi = 0$ en $D$. Hay otra importante conexión entre las funciones analíticas y la ecuación de Laplace. En matemáticas aplicadas es frecuente el caso de que queremos resolver la ecuación de Laplace $\nabla^2\phi = 0$ en un dominio $D$ en el plano $xy$, y por razones que dependen de una manera muy fundamental en la forma de $D$, simplemente no es posible determinar a $\phi$. *Pero* sería posible diseñar un mapeo analítico especial $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ o

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \tag{4}$$

del plano $xy$ al plano $uv$ de modo que $D'$, la imagen de $D$ bajo (4), no sólo tiene una forma conveniente, sino que la función $\phi(x, y)$ que satisface la ecuación de Laplace en $D$ también satisface la ecuación de Laplace en $D'$. Entonces resolvemos la ecuación de Laplace en $D'$ (la solución $\Phi$ será una función de $u$ y $v$) y después regresamos al plano $xy$ y $\phi(x, y)$ por medio de (4). Esta *invariancia* de la ecuación de Laplace bajo el mapeo se utilizará en los capítulos 4 y 7. Vea la figura 3.3.1.

**Figura 3.3.1** Una solución de la ecuación de Laplace en $D$ se encuentra resolviéndola en $D'$.

## EJERCICIOS 3.3 *Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-11.*

En los problemas 1 al 10, (**a**) compruebe que la función dada $u$ es armónica en un dominio apropiado $D$, (**b**) determine $v(x, y)$, la armónica conjugada de $u$, y (**c**) forme la correspondiente función analítica $f(z) = u + iv$.

**1.** $u(x, y) = x$

**2.** $u(x, y) = 2x - 2xy$

**3.** $u(x, y) = x^2 - y^2$

**4.** $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$

**5.** $u(x, y) = \log_e (x^2 + y^2)$

**6.** $u(x, y) = \cos x \cosh y$

**7.** $u(x, y) = e^x (x \cos y - y \operatorname{sen} y)$

**8.** $u(x, y) = -e^{-x} \operatorname{sen} y$

**9.** $u(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

**10.** $u(x, y) = \arctan(-y/x)$

En los problemas 11 y 12, compruebe que la función dada $u$ es armónica en un dominio adecuado $D$. Determine su armónica conjugada $v$ y encuentre una función analítica $f(z) = u + iv$ que satisfaga la condición indicada.

**11.** $u(x, y) = xy + x + 2y - 5$; $f(2i) = -1 + 5i$

**12.** $u(x, y) = 4xy^3 - 4x^3y + x$; $f(1 + i) = 5 + 4i$

**13.** (**a**) Demuestre que $v(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ es armónica en un dominio $D$ que no contenga al origen.

(**b**) Determine una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ que es analítica en el dominio $D$.

(**c**) Exprese la función $f$ encontrada en el inciso (b) en términos del símbolo $z$.

**14.** Supongamos que $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ es analítica en un dominio $D$ que no contiene el origen. Use las ecuaciones de Cauchy-Riemann (10) de la sección 3.2 en la forma $ru_r = v_\theta$ y $rv_r = -u_\theta$ para demostrar que $u(r, \theta)$ satisface la ecuación de Laplace en coordenadas polares:

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0. \tag{5}$$

En los problemas 15 y 16 use (5) para comprobar que la función dada $u$ es armónica en un dominio $D$ que no contiene al origen.

**15.** $u(r, \theta) = r^3 \cos 3\theta$

**16.** $u(r, \theta) = \dfrac{10r^2 - \operatorname{sen} 2\theta}{r^2}$

### Enfocando los conceptos

**17.** (**a**) Compruebe que $u(x, y) = e^{x^2 - y^2} \cos 2xy$ es armónica en un dominio adecuado $D$.

(b) Determinar su armónica conjugada $v$ y encuentre la función analítica $f(z) = u + iv$ que satisface que $f(0) = 1$. [*Sugerencia:* Cuando integre, piense en la inversión de la regla del producto].

**18.** Exprese la función $f$ en el problema 11 en términos del símbolo $z$.

**19.** (a) Demuestre que $\phi(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ es armónica, es decir, satisface la ecuación de Laplace $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ en un dominio $D$ del espacio que no contiene al origen.

(b) ¿Es el análogo bidimensional de la función en el inciso (a), $\phi(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ armónica en un dominio $D$ del plano que no contiene el origen?

**20.** Construya un ejemplo acompañado de una breve explicación que ilustre el hecho siguiente:

*Si $v$ es armónica conjugada de $u$ en un dominio $D$, entonces $u$, en general, no es una armónica conjugada de $v$.*

**21.** Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es una función analítica en un dominio $D$ y $f(z) \neq 0$ para todo $z$ en $D$, demuestre que $\phi(x, y) = \log_e |f(z)|$ es armónica en $D$.

**22.** En este problema se le guiará a través del comienzo de la demostración de la proposición:

*Si $u(x, y)$ es una función armónica y $v(x, y)$ es su armónica conjugada, entonces la función $\phi(x, y) = u(x, y)v(x, y)$ es armónica.*

**Demostración** Supongamos que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en un dominio $D$. Vimos en la sección 3.1 que el producto de dos funciones analíticas es analítica. Por lo tanto $|f(z)|^2$ es analítica. Ahora examine $[f(z)]^2$ y termine la demostración.

## 3.4 Aplicaciones

En la sección 3.3 vimos que si la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en un dominio $D$, entonces las partes real e imaginaria de $f$ son armónicas, es decir, tanto $u$ como $v$ tienen segundas derivadas parciales continuas y satisfacen la ecuación de Laplace en $D$:

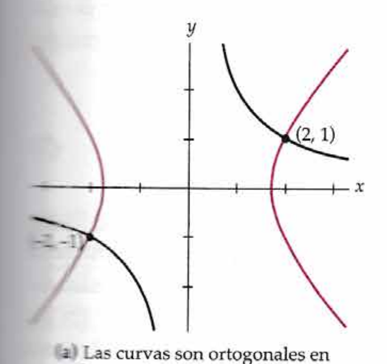
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Por el contrario, si sabemos que una función $u(x, y)$ es armónica en $D$, podemos encontrar una única (excepto por una constante aditiva) armónica conjugada $v(x, y)$ y construir una función $f(z)$ que es analítica en $D$.

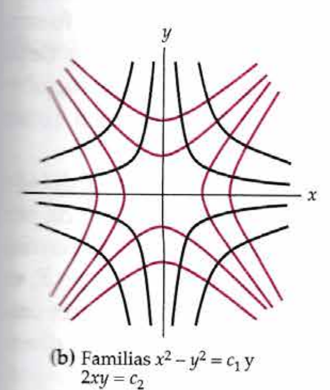
En las ciencias físicas e ingeniería, la ecuación diferencial parcial de Laplace se encuentra con frecuencia como un modelo matemático de un fenómeno independiente del tiempo, y en ese contexto, el problema que enfrentamos es *resolver* la ecuación dada sujeta a ciertas condiciones de la física llamadas condiciones de frontera. Vea los problemas 11 a 14 en los ejercicios 3.4. Debido a la relación que se presenta en (1), las funciones analíticas son la fuente de un número ilimitado de soluciones de la ecuación de Laplace, y podemos ser capaces de encontrar una que se ajuste al problema en cuestión. Vea las secciones 4.5 y 7.5. Esta es sólo una razón por la cual la teoría de variables complejas es tan fundamental en el estudio de las matemáticas aplicadas.

Comenzamos esta sección demostrando que las curvas de nivel de las partes reales e imaginarias de una función analítica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ son dos **familias ortogonales** de curvas.

Figura 3.4.1 Las tangentes $L_1$ y $L_2$ en el punto de intersección $z_0$ son perpendiculares



(a) Las curvas son ortogonales en los puntos de intersección



(b) Familias $x^2 - y^2 = c_1$ y $2xy = c_2$

Figura 3.4.2 Familias ortogonales

## Familias ortogonales

Suponga que la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en un dominio $D$. Entonces las partes real e imaginaria de $f$ se pueden utilizar para definir dos familias de curvas en $D$. Las ecuaciones

$$u(x, y) = c_1 \qquad \text{y} \qquad v(x, y) = c_2, \tag{2}$$

donde $c_1$ y $c_2$ son constantes reales arbitrarias, se llaman **curvas de nivel** de $u$ y $v$, respectivamente. Las curvas de nivel (2) son **familias ortogonales**. A grandes rasgos, esto significa que cada curva de una familia es ortogonal a cada curva de la otra familia. Más precisamente, en un punto de intersección $z_0 = x_0 + iy_0$, donde supondremos que $f'(z_0) \neq 0$, la recta tangente $L_1$ a la curva de nivel $u(x, y) = u_0$ y la recta tangente $L_2$ a la curva de nivel $v(x, y) = v_0$ son perpendiculares. Vea la figura 3.4.1. Los números $u_0$ y $v_0$ se definen evaluando a $u$ y a $v$ en $z_0$, es decir, $c_1 = u(x_0, y_0) = u_0$ y $c_2 = v(x_0, y_0) = v_0$. Para probar que $L_1$ y $L_2$ son perpendiculares en $z_0$ demostramos que la pendiente de una tangente es el recíproco negativo de la pendiente de la otra, demostrando que el producto de las dos pendientes es $-1$. Comenzamos por derivar a $u(x, y) = u_0$ y $v(x, y) = v_0$ respecto a $x$ utilizando la regla de la cadena de la derivación parcial:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Entonces resolvemos cada una de las ecuaciones anteriores para $dy/dx$:

$$\overbrace{\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial u/\partial x}{\partial u/\partial y}}^{\text{pendiente de una curva tangente } u(x,y) = u_0}, \qquad \overbrace{\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial v/\partial x}{\partial v/\partial y}}^{\text{pendiente de una curva tangente } v(x,y) = v_0}, \tag{3}$$

En $(x_0, y_0)$ vemos de (3), las ecuaciones de Cauchy-Reimann $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, y de $f'(z_0) \neq 0$, que el producto de las dos funciones pendiente es

$$\left(-\frac{\partial u/\partial x}{\partial u/\partial y}\right)\left(-\frac{\partial v/\partial x}{\partial v/\partial y}\right) = \left(\frac{\partial v/\partial y}{\partial v/\partial x}\right)\left(-\frac{\partial v/\partial x}{\partial v/\partial y}\right) = -1. \tag{4}$$

---

### EJEMPLO 1 Familias ortogonales

Para $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ identificamos $u(x, y) = x^2 - y^2$ y $v(x, y) = 2xy$. Para esta función, las familias de las curvas de nivel $x^2 - y^2 = c_1$ y $2xy = c_2$ son dos familias de hipérbolas. Puesto que $f$ es analítica para toda $z$, estas familias son ortogonales. En un punto específico, por ejemplo, $z_0 = 2 + i$ encontramos $2^2 - 1^2 = 3 = c_1$ y $2(2)(1) = 4 = c_2$, y dos curvas ortogonales correspondientes $x^2 - y^2 = 3$ y $xy = 2$. Examinando a la figura 3.4.2(a) se encuentra que $x^2 - y^2 = 3$ en color y $xy = 2$ en negro: las curvas son ortogonales en $z_0 = 2 + i$ (y en $-2 - i$, por simetría de las curvas). En la figura 3.4.2(b) las dos familias están sobrepuestas en el mismo eje de coordenadas, las curvas de la familia $x^2 - y^2 = c_1$ están dibujadas a color mientras que las curvas de la familia $2xy = c_2$ están en negro. ❑

## Vector gradiente

En cálculo vectorial, si $f(x, y)$ es una función escalar derivable, entonces el **gradiente** de $f$, ya sea escrito como **grad** $f$ o $\nabla f$ (el símbolo $\nabla$ se llama *nabla* o *del*), se define como el vector bidimensional

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}. \tag{5}$$

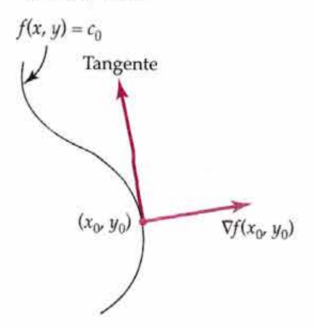



**Figura 3.4.3** El gradiente es perpendicular a la curva de nivel en $(x_0, y_0)$

Como se muestra a color en la figura 3.4.3, el vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ en un punto $(x_0, y_0)$ es perpendicular a la curva de nivel de $f(x, y)$ que pasa por ese punto, es decir, a la curva de nivel $f(x, y) = c_0$, donde $c_0 = f(x_0, y_0)$. Para ver esto, supongamos que $x = g(t)$, $y = h(t)$, donde $x_0 = g(t_0)$, $y_0 = h(t_0)$ son las ecuaciones paramétricas para la curva $f(x, y) = c_0$. Entonces la derivada de $f(x(t), y(t)) = c_0$ respecto a $t$ es

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0. \tag{6}$$

Este último resultado es el producto punto de (5) con el vector tangente $\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$. Concretamente, en $t = t_0$, (6) muestra que, si $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$, entonces $\nabla f(x_0, y_0) \cdot r'(t_0) = 0$. Esto significa que $\nabla f$ es perpendicular a la curva de nivel en $(x_0, y_0)$.

**Campos gradiente** Como se analizó en la sección 2.7, en el análisis complejo los campos vectoriales bidimensionales $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ definidos en un dominio $D$ del plano, son de interés ya que $\mathbf{F}$ se puede representar de manera equivalente como una función compleja $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$. De particular importancia en ciencia son los campos vectoriales que se pueden escribir como el gradiente de alguna función escalar $\phi$ con segundas derivadas parciales continuas. En otras palabras, donde el campo $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ es igual a

$$\mathbf{F}(x, y) = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j}, \tag{7}$$

por lo que $P(x, y) = \partial\phi/\partial x$ y $Q(x, y) = \partial\phi/\partial y$. Tal campo vectorial $\mathbf{F}$ se llama **campo gradiente** y $\phi$ se llama **función de potencial** o simplemente **potencial** de $\mathbf{F}$. Los campos gradiente se presentan en forma natural en el estudio de la electricidad y el magnetismo, de flujo de fluidos, en gravitación, y en las temperaturas de estado estable. En un campo gradiente de fuerza, tal como un campo gravitacional, el trabajo realizado por la fuerza sobre una partícula que se mueve de la posición $A$ a la posición $B$ es igual en todas las trayectorias entre estos puntos. Además, el trabajo realizado por la fuerza a lo largo de una trayectoria cerrada es cero, en otras palabras, la ley de la conservación de la energía mecánica es: *energía cinética + energía potencial = constante.* Por esta razón, los campos gradiente también se conocen como **campos conservativos.**

En el estudio de la electrostática la intensidad del campo eléctrico $\mathbf{F}$ debido a un conjunto de cargas estacionarias en una región del plano está dada por $\mathbf{F}(x, y) = -\nabla\phi$, donde la función de valor real $\phi(x, y)$ se denomina **potencial electrostático.** La ley de Gauss establece que la divergencia del campo $\mathbf{F}$, es decir, $\nabla \cdot \mathbf{F} = P_x + Q_y$ es proporcional a la densidad de carga $\rho$, donde $\rho$ es una función escalar. Si la región del plano está libre de cargas, entonces, la divergencia de $\mathbf{F}$ es cero.* Puesto que $\mathbf{F} = -\nabla\phi$, si $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, entonces

*Nota* ➡

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot \left(-\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j}\right) = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0,$$

o $\nabla^2\phi = 0$. En otras palabras: La ecuación de la función de potencial $\phi$ satisface la ecuación de Laplace y es, por tanto, armónica en un algún dominio $D$.

* El potencial electrostático es entonces debido a las cargas que están ya sea fuera de la región de carga libre o en la frontera de la región.

**Potencial complejo** En general, si una función de potencial $\phi(x, y)$ satisface la ecuación de Laplace en un dominio $D$, es armónica, y sabemos de la sección 3.3 que existe una función armónica conjugada $\psi(x, y)$, definida en $D$ tal que la función compleja

$$\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \tag{8}$$

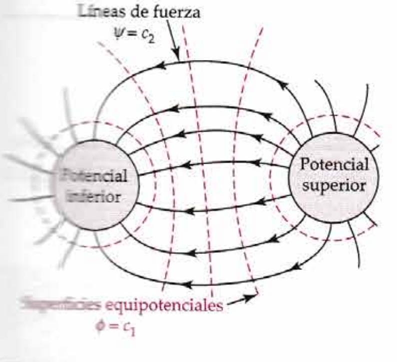
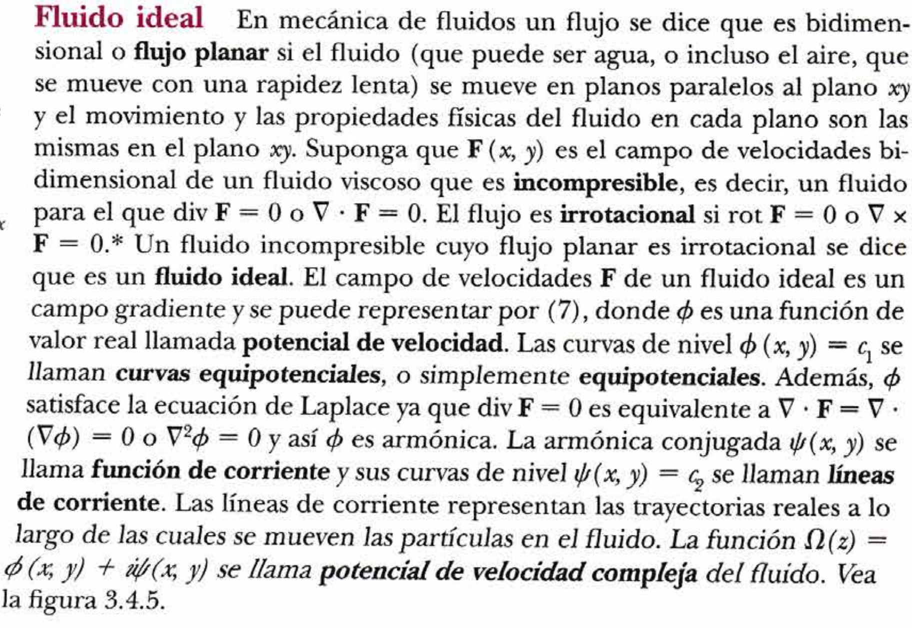


Figura 3.4.4 Campo eléctrico

es analítica en $D$. La función $\Omega(z)$ en (8) se llama **potencial complejo** correspondiente al potencial real $\phi$. Como hemos visto en la discusión inicial de esta sección, las curvas de nivel $\phi$ y $\psi$ son familias ortogonales. Las curvas de nivel de $\phi$, $\phi(x, y) = c_1$, se llaman **curvas equipotenciales**, es decir, curvas a lo largo de las cuales el potencial es constante. En el caso en que $\phi$ representa un potencial electrostático, la intensidad de campo eléctrico **F** se debe dirigir a lo largo de la familia de curvas ortogonales a las curvas equipotenciales porque la fuerza del campo es el gradiente del potencial $\phi$, $\mathbf{F}(x, y) = -\nabla\phi$, y como se demostró en (6), el vector gradiente en un punto $(x_0, y_0)$ es perpendicular a una curva de nivel de $\phi$ en $(x_0, y_0)$. Por esta razón, las curvas de nivel $\psi(x, y) = c_2$, que son curvas ortogonales a la familia $\phi(x, y) = c_1$, se llaman **líneas de fuerza** y son las trayectorias a lo largo de las que una partícula cargada se mueve en el campo electrostático. Vea la figura 3.4.4.



**Fluido ideal** En mecánica de fluidos un flujo se dice que es bidimensional o **flujo planar** si el fluido (que puede ser agua, o incluso el aire, que se mueve con una rapidez lenta) se mueve en planos paralelos al plano $xy$ y el movimiento y las propiedades físicas del fluido en cada plano son las mismas en el plano $xy$. Suponga que $\mathbf{F}(x, y)$ es el campo de velocidades bidimensional de un fluido viscoso que es **incompresible**, es decir, un fluido para el que div $\mathbf{F} = 0$ o $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. El flujo es **irrotacional** si rot $\mathbf{F} = 0$ o $\nabla \times \mathbf{F} = 0$.* Un fluido incompresible cuyo flujo planar es irrotacional se dice que es un **fluido ideal**. El campo de velocidades **F** de un fluido ideal es un campo gradiente y se puede representar por (7), donde $\phi$ es una función de valor real llamada **potencial de velocidad**. Las curvas de nivel $\phi(x, y) = c_1$ se llaman **curvas equipotenciales**, o *simplemente* **equipotenciales**. Además, $\phi$ satisface la ecuación de Laplace ya que div $\mathbf{F} = 0$ es equivalente a $\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla\phi) = 0$ o $\nabla^2\phi = 0$ y así $\phi$ es armónica. La armónica conjugada $\psi(x, y)$ se llama **función de corriente** y sus curvas de nivel $\psi(x, y) = c_2$ se llaman **líneas de corriente**. Las líneas de corriente representan las trayectorias reales a lo largo de las cuales se mueven las partículas en el fluido. La función $\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ se llama **potencial de velocidad compleja** del fluido. Vea la figura 3.4.5.

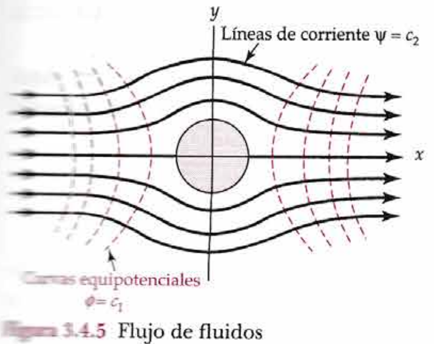


Figura 3.4.5 Flujo de fluidos

**Flujo de calor** Por último, si $\phi(x, y)$ representa la temperatura independiente del tiempo o de estado estable que satisface la ecuación de Laplace, entonces las curvas de nivel $\phi(x, y) = c_1$ son curvas a lo largo de las cuales la temperatura es constante y se llaman **isotermas**. Las curvas de nivel $\psi(x, y) = c_2$ de la función armónica conjugada de $\phi$ son las curvas a lo largo de las que fluye el calor y se llaman **líneas de flujo**. Vea la figura 3.4.6.

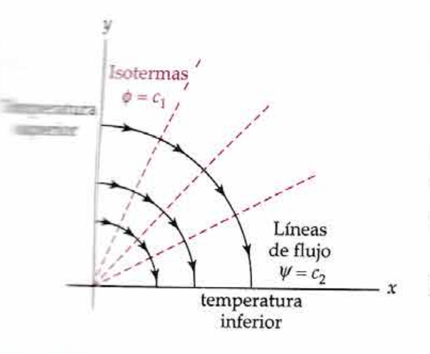


Figura 3.4.6 Flujo de calor

La tabla 3.4.1 resume algunas de las aplicaciones de la función compleja potencial $\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ y los nombres dados a las curvas de nivel

$$\phi(x, y) = c_1 \quad \text{y} \quad \psi(x, y) = c_2.$$

*Analizaremos el flujo de fluidos con mayor detalle en la sección 5.6.

| Aplicación | Curvas de nivel $\phi(x, y) = c_1$ | Curvas de nivel $\psi(x, y) = c_2$ |
|---|---|---|
| electrostática | curvas equipotenciales | líneas de fuerza |
| flujo de fluidos | curvas equipotenciales | líneas de corriente de flujo |
| gravitación | curvas equipotenciales | líneas de fuerza |
| flujo de calor | isotermas | líneas de flujo de calor |

**Tabla 3.4.1** Función potencial complejo $\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$

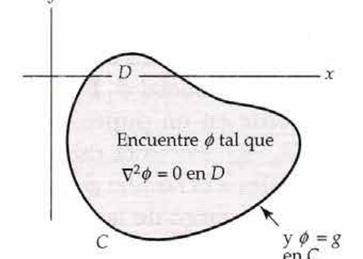



**Figura 3.4.7** Problema de Dirichlet

**Problemas de Dirichlet** Un problema clásico e importante en matemáticas aplicadas que implica a la ecuación de Laplace se ilustra en la figura 3.4.7 y se enuncia como se muestra a continuación.

### *Problema de Dirichlet*

*Supongamos que D es un dominio en el plano y que g es una función definida en la frontera C de D. El problema de encontrar una función $\phi(x, y)$, la cual satisface la ecuación de Laplace en D y que es igual a g en la frontera C de D se llama* ***problema de Dirichlet.***

Tales problemas surgen con frecuencia en el modelado bidimensional de la electrostática, flujo de fluidos, gravitación y flujo de calor.

En el siguiente ejemplo resolveremos un problema de Dirichlet. Aunque el problema es bastante simple, su solución nos ayudará en la solución de problemas más complicados en la sección 4.5.

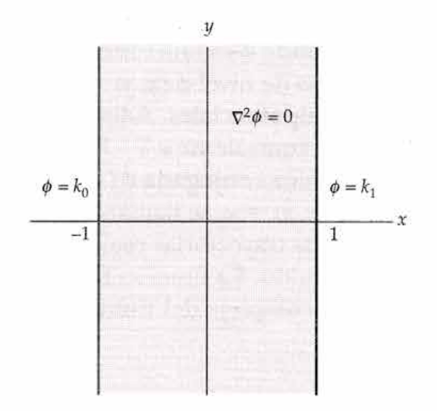



**Figura 3.4.8** Figura para el ejemplo 2

**EJEMPLO 2 Un simple problema de Dirichlet**

Resuelva el problema de Dirichlet que se ilustra en la figura 3.4.8. El dominio $D$ es una franja vertical infinita definida por $-1 < x < 1$, $-\infty < y < \infty$; los límites de $D$ son las rectas verticales $x = -1$ y $x = 1$.

**Solución** El problema de Dirichlet en la figura 3.4.8 es:

$$\textit{Resuelva}: \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0, \qquad -1 < x < 1, \qquad -\infty < y < \infty. \tag{9}$$

$$\textit{Sujeto a}: \phi(-1, y) = k_0, \qquad \phi(1, y) = k_1, \qquad -\infty < y < \infty, \tag{10}$$

donde $k_0$ y $k_1$ son constantes.

La forma de $D$, junto con el hecho de que las dos condiciones de frontera son constantes, sugieren que la función $\phi$ es independiente de $y$, es decir, es razonable tratar de buscar una solución de (9) de la forma $\phi(x)$. Con esta última suposición, la ecuación diferencial parcial de Laplace (9) se convierte en la ecuación diferencial ordinaria $d^2\phi/dx^2 = 0$. Integrando dos veces se obtiene la solución general $\phi(x) = ax + b$. Las condiciones de frontera nos permiten determinar los coeficientes $a$ y $b$. En particular, de $\phi(-1) = k_0$ y $\phi(1) = k_1$ debemos tener $a(-1) + b = k_0$ y $a(1) + b = k_1$, respectivamente. Sumando dos ecuaciones simultáneas se obtiene $2b = k_0 + k_1$, mientras que restando la primera ecuación de la segunda se obtiene $2a = k_1 - k_0$. Estos dos resultados nos dan $a$ y $b$:

$$b = \frac{k_1 + k_0}{2} \quad \text{y} \quad a = \frac{k_1 - k_0}{2}.$$

Por lo tanto, tenemos la siguiente solución del problema de Dirichlet dado

$$\phi(x) = \frac{k_1 - k_0}{2}x + \frac{k_1 + k_0}{2}. \tag{11}$$

□

En la sección 4.5, para propósitos que ahí utilizaremos, la solución (11) se denotará por $\phi(x, y)$ ➡

El problema del ejemplo 2 se puede interpretar como la determinación del potencial electrostático $\phi$ entre dos placas conductoras paralelas infinitamente largas que se mantienen a potenciales constantes. Dado que satisface la ecuación de Laplace en $D$, $\phi$ es una función armónica. Por tanto, una armónica conjugada $\psi$ se puede encontrar de la siguiente manera. Ya que $\phi$ y $\psi$ deben satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann, tenemos:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{k_1 - k_0}{2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 .$$

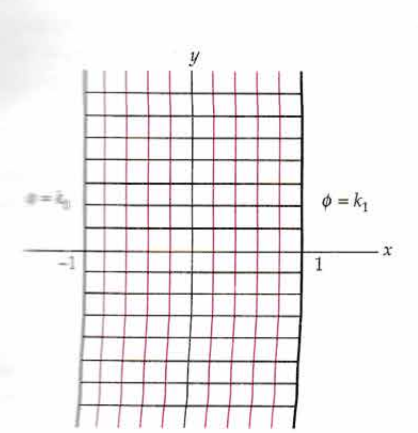



Figura 3.4.9 Las curvas equipotenciales y las líneas de fuerza del ejemplo 2

La segunda ecuación indica que $\psi$ es una función sólo de $y$, y así, integrando la primera ecuación respecto a $y$, se obtiene:

$$\psi(y) = \frac{k_1 - k_0}{2}y,$$

donde, por conveniencia, hemos tomado la constante de integración como 0. De (8), una función de potencial compleja para el problema de Dirichlet del ejemplo 2 es entonces $\Omega(z) = \phi(x) + i\psi(y)$, o

$$\Omega(z) = \frac{k_1 - k_0}{2}x + \frac{k_1 + k_0}{2} + i\frac{k_1 - k_0}{2}y = \frac{k_1 - k_0}{2}z + \frac{k_1 + k_0}{2}.$$

Las curvas de nivel de $\phi$ o curvas equipotenciales* son las rectas verticales $x = c_1$ que se muestran a color en la figura 3.4.9, y las curvas de nivel de $\psi$ o las líneas de fuerza son los segmentos de rectas horizontales $y = c_2$ que se muestran en negro. La figura muestra claramente que las dos familias de curvas de nivel son ortogonales.

## Observaciones

En la sección 4.5 y en el capítulo 7 vamos a introducir un método que nos permite resolver los problemas de Dirichlet con mapeos analíticos.

## EJERCICIOS 3.4

*Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-11.*

En los problemas 1 a 4 identifique las dos familias de curvas de nivel definidas por la función analítica $f$ dada. A mano, dibuje dos curvas de cada familia en los mismos ejes coordenados,

**1.** $f(z) = 2iz - 3 + i$

**2.** $f(z) = (z - 1)^2$

**3.** $f(z) = \dfrac{1}{z}$

**4.** $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$

En los problemas 5 a 8 la función analítica dada $f(z) = u + iv$ define dos familias de curvas de nivel de $u(x, y) = c_1$ y $v(x, y) = c_2$. Primero use derivación implícita para calcular $dy/dx$ para cada familia y compruebe que las familias son ortogonales.

*Las curvas de nivel de $\phi$ son $\phi(x) = C_1$ o $\frac{1}{2}(k_1 - k_0)x + \frac{1}{2}(k_1 + k_0) = C_1$. Despejando $x$ se obtiene $x = \left(C_1 - \frac{1}{2}k_1 - k_0\right)/\frac{1}{2}(k_1 - k_0)$. Establezca la constante en el lado derecho de la última ecuación igual al $c_1$.

5. $f(z) = x - 2x^2 + 2y^2 + i(y - 4xy)$

6. $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

7. $f(z) = e^{-x} \cos y - ie^{-x} \operatorname{sen} y$

8. $f(z) = x + \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\left(y - \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)$

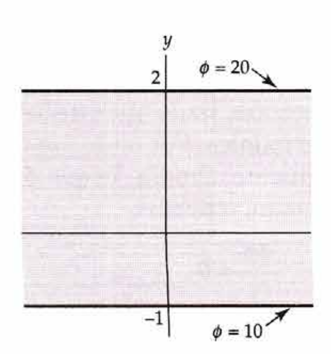


**Figura 3.4.10** Figura del problema 12

En los problemas 9 y 10, la función dada de valor real $\phi$ es el potencial de velocidad para el flujo plano de un fluido incompresible e irrotacional. Encuentre el campo de velocidades **F** del flujo. Suponga un dominio adecuado $D$ del plano.

9. $\phi(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ 10. $\phi(x, y) = \frac{1}{2} A \log_e \left(x^2 + (y+1)^2\right),\ A > 0$

11. (**a**) Determine el potencial $\phi$ si el dominio $D$ en la figura 3.4.8 se sustituye por $0 < x < 1$, $-\infty < y < \infty$, y los potenciales en las fronteras son $\phi(0, y) = 50$, $\phi(1, y) = 0$.

(**b**) Determine el potencial complejo $\Omega(z)$.

12. (**a**) Determine el potencial $\phi$ en el dominio $D$ entre las dos placas infinitamente largas paralelas al eje $x$ que se muestra en la figura 3.4.10, si los potenciales en las fronteras son $\phi(x, -1) = 10$ y $\phi(x, 2) = 20$.

(**b**) Determine el potencial complejo $\Omega(z)$.

(**c**) Dibuje las curvas equipotenciales y las líneas de fuerza.

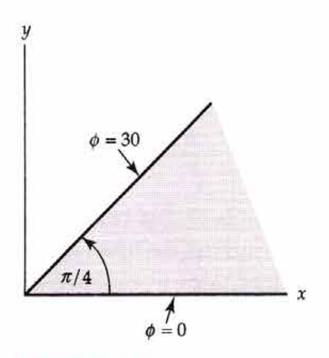


**Figura 3.4.11** Figura del problema 13

13. El potencial $\phi(\theta)$ entre las dos placas de longitud infinita que forman la cuña infinita que se muestra en la figura 3.4.11 satisface la ecuación de Laplace en coordenadas polares en la forma

$$\frac{d^2\phi}{d\theta^2} = 0.$$

(**a**) Resuelva la ecuación diferencial sujeta a las condiciones frontera $\phi(\pi/4) = 30$ y $\phi(0) = 0$.

(**b**) Determine el potencial complejo $\Omega(z)$.

(**c**) Dibuje las curvas equipotenciales y las líneas de fuerza.

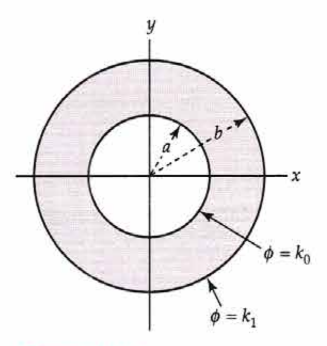


**Figura 3.4.12** Figura del problema 14

14. La temperatura en estado estacionario $\phi(r)$ entre los dos conductores cilíndricos circulares concéntricos que se muestran en la figura 3.4.12 satisfacen la ecuación de Laplace en coordenadas polares en la forma

$$r^2 \frac{d^2\phi}{dr^2} + r\frac{d\phi}{dr} = 0.$$

(**a**) Demuestre que una solución de la ecuación diferencial sujeta a las condiciones de frontera $\phi(a) = k_0$ y $\phi(b) = k_1$, donde $k_0$ y $k_1$ son potenciales constantes, está dada por $\phi(r) = A \log_e r + B$, donde

$$A = \frac{k_0 - k_1}{\log_e(a/b)} \quad \text{y} \quad B = \frac{-k_0 \log_e b + k_1 \log_e a}{\log_e(a/b)}.$$

[*Sugerencia*: La ecuación diferencial se conoce como ecuación de Cauchy-Euler.]

(**b**) Determine el potencial complejo $\Omega(z)$.

(**c**) Dibuje las isotermas y las líneas de flujo de calor.

## Enfocando los conceptos

15. Considere la función $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$. Describa la curva de nivel $v(x, y) = 0$.

16. Las curvas de nivel de $u(x, y) = x^2 - y^2$ y $v(x, y) = 2xy$ analizadas en el ejemplo 1 se intersectan en $z = 0$. Dibuje las curvas de nivel que se intersectan en $z = 0$. Explique por qué estas curvas de nivel no son ortogonales.

17. Vuelva a leer el análisis de las familias ortogonales en la página 149 que incluye la demostración de que las rectas tangentes $L_1$ y $L_2$ son ortogonales. En la demostración que concluye con (4), explique dónde se utilizó la suposición de $f'(z_0) \neq 0$.

18. Supongamos que las dos familias de curvas $u(x, y) = c_1$ y $v(x, y) = c_2$, son trayectorias ortogonales en un dominio $D$. Analice: ¿es la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ necesariamente analítica en $D$?

## Tarea del laboratorio de cómputo

En los problemas 19 y 20, utilice un SAC o software de graficación para trazar algunas curvas representativas de cada una de las familias ortogonales $u(x, y) = c_1$ y $v(x, y) = c_2$ definidas por la función analítica dada primero en diferentes ejes coordenados y después en el mismo conjunto de ejes coordenados.

19. $f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$

20. $f(z) = \sqrt{r}\left(\cos\dfrac{\theta}{2} + i\,\mathrm{sen}\dfrac{\theta}{2}\right),\ r > 0,\ -\pi < \theta < \pi$

21. La función $\Omega(z) = A\left(z + \dfrac{1}{z}\right),\ A > 0$, es un potencial complejo de un flujo bidimensional de fluidos.

(a) Suponga que $A = 1$. Determine la función potencial $\phi(x, y)$ y la función líneas de corriente $\psi(x, y)$ del flujo.

(b) Exprese la función potencial $\phi$ y la función corriente $\psi$ en términos de coordenadas polares.

(c) Utilice un SAC o software de graficación para trazar curvas representativas de cada una de las familias ortogonales $\phi(r, \theta) = c_1$ y $\psi(r, \theta) = c_2$ en el mismo eje de coordenadas.

22. La función $\Omega(z) = \log_e\left|\dfrac{z+1}{z-1}\right| + i\mathrm{Arg}\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)$ es un potencial complejo de un campo electrostático de dos dimensiones.

(a) Demuestre que las curvas equipotenciales $\phi(x, y) = c_1$ y que las líneas de fuerza de $\psi(x, y) = c_2$ son, respectivamente

$$(x - \coth c_1)^2 + y^2 = \mathrm{csch}^2 c_1 \quad \text{y} \quad x^2 + (y + \cot c_2)^2 = \csc^2 c_2.$$

Observe que las curvas equipotenciales y las líneas de fuerza son familias de circunferencias.

(b) Los centros de las curvas equipotenciales en el inciso (a) son $(\coth c_1, 0)$. Aproximadamente, ¿dónde están los centros ubicados cuando $c_1 \to \infty$? ¿Cuando $c_1 \to -\infty$? ¿Dónde están los centros ubicados cuando $c_1 \to 0^+$? ¿Cuando $c_1 \to 0^-$?

(c) Compruebe que cada línea circular de la fuerza pasa a través de $z = 1$ y a través de $z = -1$.

(d) Utilice un SAC o software de graficación para trazar circunferencias representativas de cada familia en los mismos ejes coordenados. Si utiliza un SAC no utilice la aplicación gráfica de contorno.

## CAPÍTULO 3 PREGUNTAS DE REPASO

*Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-12.*

En los problemas 1 al 12, responda verdadero o falso. Si el enunciado es falso, justifique su respuesta explicando ya sea por qué es falsa o dando un contraejemplo, si

el enunciado es verdadero, justifique su respuesta, ya sea demostrando el enunciado o citando un resultado apropiado en este capítulo.

1. Si una función compleja $f$ es derivable en el punto $z$, entonces $f$ es analítica en $z$.
2. La función $f(z) = \dfrac{y}{x^2 + y^2} + i\dfrac{x}{x^2 + y^2}$ es derivable para toda $z \neq 0$.
3. La función $f(z) = z^2 + \bar{z}$ no es analítica en ningún punto.
4. La función $f(z) = \cos y - i \operatorname{sen} y$ no es derivable en ningún punto.
5. No existe una función analítica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ para la que $u(x, y) = y^3 + 5x$.
6. La función $u(x, y) = e^{4x}\cos 2y$ es la parte real de una función analítica.
7. Si $f(z) = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y$, entonces $f'(z) = f(z)$.
8. Si $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son funciones armónicas en un dominio $D$. entonces la función $f(z) = \left(\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) + i\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right)$ es analítica en $D$.
9. Si $g$ es una función entera, entonces $f(z) = (iz^2 + z)g(z)$ es necesariamente una función entera.
10. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann son condiciones necesarias para la derivabilidad.
11. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann pueden ser satisfechas en un punto $z$, pero la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ puede no ser derivable en $z$.
12. Si la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en un punto $z$, entonces necesariamente la función $g(z) = v(x, y) - iu(x, y)$ es analítica en $z$.

En los problemas 13 al 22 intente llenar los espacios en blanco, sin consultar el libro.

13. Si $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 5iz - 4}$, entonces $f'(z) =$ ________.
14. La función $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 5iz - 4}$ no es analítica en ________.
15. La función $f(z) = (2 - x)^3 + i(y - 1)^3$ es derivable en $z =$ ________.
16. Para $f(z) = 2x^3 + 3iy^2$, $f'(x + ix^2) =$ ____________.
17. La función $f(z) = \dfrac{x - 1}{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} - i\dfrac{y - 1}{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}$ es analítica en un dominio $D$ que no contiene al punto $z = 1 + i$. En $D$, $f'(z) =$ ________.
18. Encuentre una función analítica $f(z) = \log_e \sqrt{x^2 + y^2} + i$ ________ en un dominio $D$ que no contenga al origen.
19. La función $f(z)$ es analítica en un dominio $D$ y $f(z) = c + iv(x, y)$, donde $c$ es una constante real. Entonces $f$ es una ________ en $D$.
20. $\displaystyle\lim_{z \to 2i} \frac{z^5 - 4iz^4 - 4z^3 + z^2 - 4iz + 4}{5z^4 - 20iz^3 - 21z^2 - 4iz + 4} =$ ________.
21. $u(x, y) = c_1$ donde $u(x, y) = e^{-x}(x \operatorname{sen} y - y \cos y)$ y $v(x, y) = c_2$ donde $v(x, y) =$ ________ son familias ortogonales.
22. El enunciado *"Existe una función f que es analítica para* $\operatorname{Re}(z) \geq 1$ *y es no analítica en otro sitio"* es falso, ya que ____________.

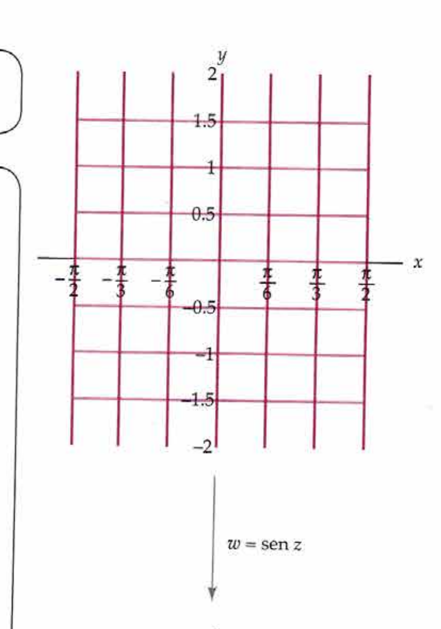
CAPÍTULO

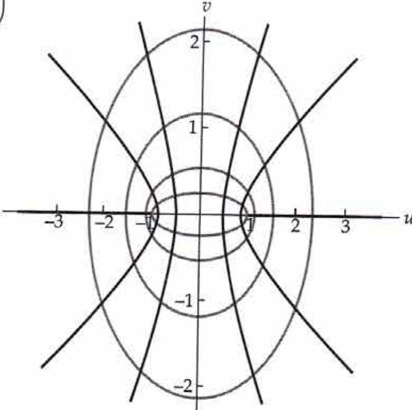
4

# Funciones elementales

## Contenido del capítulo






El mapeo $w = \text{sen}\, z$. Vea la página 187.

**Introducción** En el capítulo anterior hemos definido una clase de funciones que son las más interesantes en el análisis complejo, las funciones analíticas. En este capítulo se definen y estudian una serie de funciones complejas elementales analíticas. En particular, investigaremos las funciones exponenciales complejas, logarítmicas, de potencia, trigonométricas, hiperbólicas, trigonométricas inversas e hiperbólicas inversas. Se mostrará que todas estas funciones son analíticas en un dominio adecuado y se encuentra que sus derivadas concuerdan con sus contrapartes reales. También vamos a examinar cómo estas funciones representan mapeos del plano complejo. El conjunto de funciones elementales serán una fuente útil de ejemplos que se utilizará en lo que resta del libro.

# 4.1 Funciones exponencial y logarítmica

Las funciones exponencial y logarítmica reales juegan un importante papel en el estudio del análisis real y de las ecuaciones diferenciales. En esta sección se define y se estudian los análogos complejos de estas funciones. En la primera parte de esta sección, se estudia la función exponencial compleja $e^z$, que ya se ha introducido en las secciones 1.6 y 2.1. Un concepto que no se ha analizado anteriormente, pero que se trata en esta sección es el mapeo exponencial $w = e^z$. En la segunda mitad de esta sección, se introduce el logaritmo complejo ln $z$ para resolver ecuaciones exponenciales de la forma $e^w = z$. Si $x$ es un número *real* positivo fijo, entonces no hay una *única* solución a la ecuación $e^y = x$, a saber, el valor $y = \log_e x$. Sin embargo, veremos que cuando $z$ es un número *complejo* fijo distinto de cero hay un número *infinito* de soluciones a la ecuación $e^w = z$. Por tanto, el logaritmo complejo ln $z$ es una "función multivaluada" con la interpretación de este término dada en la sección 2.4. El valor principal del logaritmo complejo se define como una función (de un solo valor) que asigna a la variable compleja $z$ uno de los múltiples valores de ln $z$. Esta función valor principal se demostrará que es una función inversa de la función exponencial $e^z$ definida en un dominio adecuadamente restringido del plano complejo. Concluimos la sección con un análisis de la analiticidad de las ramas del logaritmo.

## 4.1.1 Función exponencial compleja

**Función exponencial y su derivada** Empezamos repitiendo la definición de la función exponencial compleja dada en la sección 2.1.

**Definición 4.1.1 Función exponencial compleja**

La función $e^z$ definida por

$$e^z = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y \tag{1}$$

se llama la **función exponencial compleja**.

Una de las razones por las que es natural llamar a esta función, la función *exponencial* se indicó en la sección 2.1. A saber, la función definida por (1) concuerda con la función exponencial real cuando $z$ es real. Es decir, si $z$ es real, entonces $z = x + 0i$, y con la definición 4.1.1 se obtiene:

$$e^{x+0i} = e^x (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = e^x (1 + i \cdot 0) = e^x. \tag{2}$$

La función exponencial compleja también comparte importantes propiedades con la derivada de la función exponencial real. Recordemos que dos propiedades importantes de la función exponencial real son que $e^x$ es derivable en todo punto y que $\frac{d}{dx} e^x = e^x$ para toda $x$. La función exponencial compleja $e^z$ tiene propiedades similares.

**Teorema 4.1.1 Analiticidad de $e^z$**

La función exponencial $e^z$ es entera y su derivada está dada por:

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z. \tag{3}$$

**Demostración** Para demostrar que $e^z$ es entera, utilizamos el criterio de analiticidad dado en el teorema 3.2.2. Primero considere que las partes reales e imaginarias, $u(x, y) = e^x \cos y$ y $v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$, de $e^z$ son funciones reales continuas y tienen derivadas parciales de primer orden continuas para toda $(x, y)$. Además, las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $u$ y $v$ son fáciles de comprobar:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen} y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Por tanto, la función exponencial $e^z$ es entera por el teorema 3.2.2. Por (9) de la sección 3.2, la derivada de $e^z$ es:

$$\frac{d}{dz}e^z = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y = e^z.$$ ❑

Usando el hecho de que las partes real e imaginaria de una función analítica son armónicas conjugadas, también podemos demostrar que *sólo* la función entera $f$ que coincide con la función exponencial real $e^x$ de variable real y que satisface la ecuación diferencial de $f'(z) = f(z)$ es la función exponencial compleja $e^z$ definida por (1). Vea el problema 50 de los ejercicios 4.1.

**EJEMPLO 1 Derivadas de funciones exponenciales**

Encuentre la derivada de cada una de las siguientes funciones:

(**a**) $iz^4\left(z^2 - e^z\right)$ y (**b**) $e^{z^2-(1+i)z+3}$.

**Solución** (**a**) Utilizando (3) y la regla del producto (4) de la sección 3.1:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left[iz^4\left(z^2 - e^z\right)\right] &= iz^4\left(2z - e^z\right) + 4iz^3\left(z^2 - e^z\right)\\ &= 6iz^5 - iz^4e^z - 4iz^3e^z.\end{aligned}$$

(**b**) Utilizando (3) y la regla de la cadena (6) de la sección 3.1:

$$\frac{d}{dz}\left[e^{z^2-(1+i)z+3}\right] = e^{z^2-(1+i)z+3}\cdot(2z - 1 - i).$$

❑

## Módulo, argumento y conjugado

El módulo, el argumento y el conjugado de la función exponencial son fáciles de determinar de (1). Si expresamos el número complejo $w = e^z$ en la forma polar:

$$w = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y = r\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta),$$

entonces vemos que $r = e^x$ y $\theta = y + 2n\pi$, para $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Debido a que $r$ es el módulo y $\theta$ es un argumento de $w$, tenemos:

$$\left|e^z\right| = e^x \tag{4}$$

y

$$\arg(e^z) = y + 2n\pi,\ n = 0,\ \pm1, \pm2, \ldots \tag{5}$$

Sabemos del cálculo que $e^x > 0$ para todos los reales $x$, y así se deduce de (4) que $|e^z| < 0$. Esto implica que $e^z \neq 0$ para todos los complejos $z$. Dicho de otra manera, el punto $w = 0$ no está en el rango de la función compleja $w = e^z$. Sin embargo, la ecuación (4) no descarta la posibilidad de que $e^z$ sea un número real negativo. De hecho, usted debe comprobar que si, por ejemplo, $z = \pi i$, entonces $e^{\pi i}$ es real y $e^{\pi i} < 0$.

Una fórmula para el conjugado de la exponencial compleja $e^z$ se encuentra utilizando las propiedades de las funciones reales coseno y seno. Dado que la función coseno real es par, tenemos $\cos y = \cos(-y)$ para todo $y$, y puesto que la función real seno es impar, tenemos $-\text{sen}\, y = \text{sen}\,(-y)$ para todo $y$, por lo que:

$$\overline{e^z} = e^x \cos y - ie^x \operatorname{sen} y = e^x \cos(-y) + ie^x \operatorname{sen}(-y) = e^{x-iy} = e^{\bar{z}}.$$

Por tanto, para todos los complejos $z$, hemos demostrado:

$$\overline{e^z} = e^{\bar{z}}. \tag{6}$$

**Propiedades algebraicas** En el teorema 4.1.1 hemos demostrado que la derivada de la función exponencial compleja es, en esencia, la misma que la derivada de la función exponencial real. Estas dos funciones también comparten las siguientes propiedades algebraicas.

**Teorema 4.1.2 Propiedades algebraicas de $e^z$**

Si $z_1$ y $z_2$ son números complejos, entonces

(*i*) $e^0 = 1$

(*ii*) $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$

(*iii*) $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$

(*iv*) $(e^{z_1})^n = e^{nz_1}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**Demostración de (*i*) y (*ii*)** La demostración de la propiedad (*i*) se deduce de la observación de que la función exponencial compleja concuerda con la función exponencial real para la variable real. Es decir, por (2), tenemos $e^{0+0i} = e^0$, y sabemos que, para la función exponencial real, $e^0 = 1$.

(*ii*) Sea $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$. Por definición 4.1.1, tenemos:

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= (e^{x_1} \cos y_1 + ie^{x_1} \operatorname{sen} y_1)(e^{x_2} \cos y_2 + ie^{x_2} \operatorname{sen} y_2) \\ &= e^{x_1+x_2} (\cos y_1 \cos y_2 - \operatorname{sen} y_1 \operatorname{sen} y_2) \\ &\quad + ie^{x_1+x_2} (\operatorname{sen} y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \operatorname{sen} y_2). \end{aligned}$$

Usando las fórmulas de suma para las funciones reales coseno y seno dadas en la página 17 de la sección 1.3, podemos escribir la expresión anterior como:

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{x_1+x_2} \cos(y_1 + y_2) + ie^{x_1+x_2} \operatorname{sen}(y_1 + y_2). \tag{7}$$

De (1), el lado derecho de (7) es $e^{z_1+z_2}$. Por tanto, hemos demostrado que $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$. ☐

Las demostraciones del teorema 4.1.2(*iii*) y 4.1.2(*iv*) se deducen de una manera similar. Vea los problemas 47 y 48 de los ejercicios 4.1.

**Periodicidad** La diferencia más notable entre las funciones exponenciales reales y complejas es la periodicidad de $e^z$. Decimos que una función compleja $f$ es **periódica** con periodo $T$ si $f(z + T) = f(z)$ para todo complejo $z$. La función exponencial real no es periódica, pero la función exponencial compleja si ya que se define utilizando las funciones reales coseno y seno, que son periódicas. En particular, por (1) y el teorema 4.1.2(*ii*) tenemos que $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi)$. Ya que $\cos 2\pi = 1$ y $\operatorname{sen} 2\pi = 0$, esto simplifica a:

$$e^{z+2\pi i} = e^z. \tag{8}$$

En resumen, hemos demostrado que:

*La función exponencial compleja $e^z$ es periódica con un periodo imaginario puro $2\pi i$.*

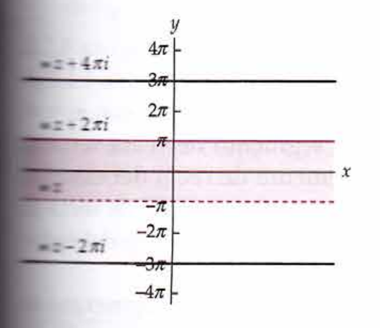


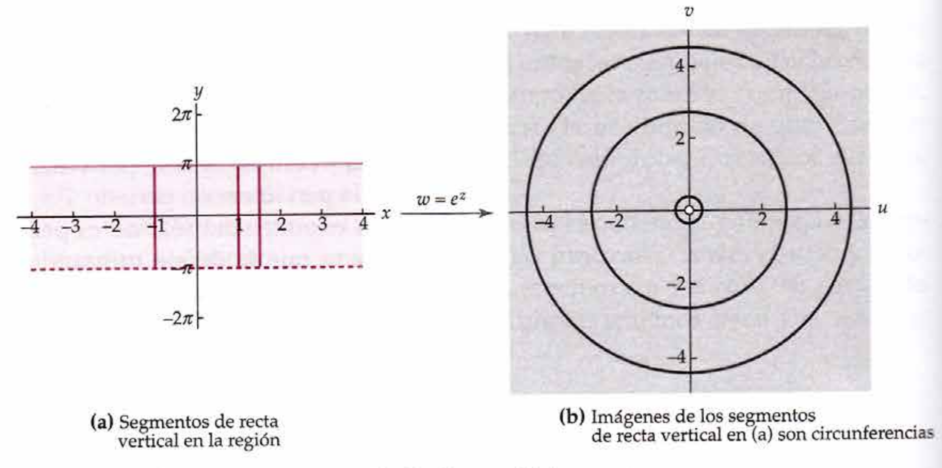
Figura 4.1.1 La región fundamental de $e^z$

Cuando vemos que (8) se cumple para todos los valores de $z$ también tenemos $e^{(z+2\pi i)+2\pi i} = e^{z+2\pi i}$. Este hecho combinado con (8) implica que $e^{z+4\pi i} = e^z$. Ahora, repitiendo este proceso nos encontramos con que $e^{z+2n\pi i} = e^z$ para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Por tanto, la función exponencial compleja no es unívoca, y se supone que todos los valores de $e^z$ son tomados de cualquier franja horizontal infinita de ancho $2\pi$ en el plano $z$. Por ejemplo, se supone que todos los valores de la función $e^z$ se toman del conjunto $-\infty < x < \infty$, $y_0 < y \leq y_0 + 2\pi$, donde $y_0$ es una constante real. En la figura 4.1.1 se divide el plano complejo en franjas horizontales obtenidas al hacer que $y_0$ es igual a cualquier múltiplo impar de $\pi$. Si el punto $z$ se encuentra en la franja horizontal infinita $-\infty < x < \infty$, $-\pi < y \leq \pi$, que se muestra a color en la figura 4.1.1, entonces los valores de $f(z) = e^z$, $f(z + 2\pi i) = e^{z+2\pi i}$, $f(z - 2\pi i) = e^{z-2\pi i}$ y así sucesivamente son iguales. La franja horizontal infinita definida por:

$$-\infty < x < \infty, \quad -\pi < y \leq \pi, \tag{9}$$

se llama la **región fundamental** de la función exponencial compleja.

**El mapeo exponencial** Dado que se supone que todos los valores de la función exponencial compleja $e^z$ se toman de la región fundamental definida por (9), la imagen de esta región bajo el mapeo $w = e^z$ es la misma que la imagen del plano complejo. Con el fin de determinar la imagen de la región fundamental bajo $w = e^z$, observamos que esta región se compone del conjunto de segmentos de recta vertical $z(t) = a + it$, $-\pi < t \leq \pi$, donde $a$ es cualquier número real. Por (11) de la sección 2.2, vemos que la imagen del segmento de recta $z(t) = a + it$, $-\pi < t \leq \pi$, bajo el mapeo exponencial está parametrizada por $w(t) = e^{z(t)} = e^{a+it} = e^a e^{it}$, $-\pi < t \leq \pi$, y de (10) de la sección 2.2, vemos que $w(t)$ define una circunferencia centrada en el origen con radio $e^a$. Debido a que $a$ puede ser cualquier número real, el radio $e^a$ de esta circunferencia puede ser cualquier número real positivo distinto de cero. Así, la imagen de la región fundamental bajo el mapeo exponencial consiste del conjunto de todas las circunferencias con centro en el origen y con radio distinto de cero. En otras palabras, la imagen de la región fundamental $-\infty < x < \infty$,



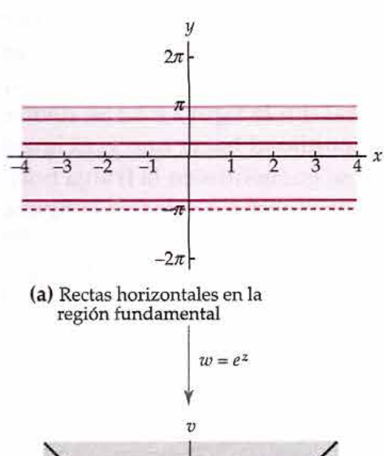

(a) Segmentos de recta vertical en la región

(b) Imágenes de los segmentos de recta vertical en (a) son circunferencias

**Figura 4.1.2** La imagen de la región fundamental bajo $w = e^z$

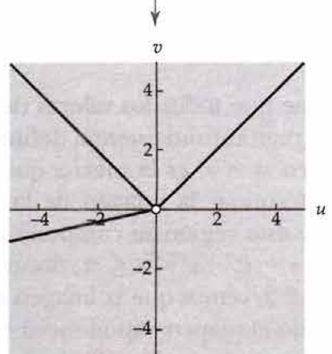
$-\pi < y \leq \pi$, bajo $w = e^z$ es el conjunto de todos los complejos $w$ con $w \neq 0$, o, equivalentemente, el conjunto $|w| < 0$ .* Esto concuerda con nuestra observación de las páginas 159-160 que el punto $w = 0$ no está en el rango de la función exponencial compleja.

El mapeo $w = e^z$ de la región fundamental se muestra en la figura 4.1.2. Cada segmento de recta vertical que se muestra en color en la figura 4.1.2(a) se proyecta sobre una circunferencia en negro en la figura 4.1.2(b) con $w = e^z$. A medida que aumenta la intersección $x$ de un segmento de recta vertical, aumenta el radio de su imagen. Por tanto, el segmento de recta del extremo izquierdo se mapea en la circunferencia más interna, el segmento de recta de en medio se mapea en la circunferencia intermedia, y el segmento del extremo derecho se mapea en la circunferencia exterior.




(a) Rectas horizontales en la región fundamental

$w = e^z$




(b) Imágenes de las rectas en (a)

**Figura 4.1.3** El mapeo $w = e^z$

No hay nada particularmente especial acerca del uso de segmentos de recta vertical para determinar la imagen de la región fundamental bajo $w = e^z$. La imagen también se puede encontrar en la misma forma utilizando, por ejemplo, las rectas horizontales en la región fundamental. Para ver que esto es así, considere la recta horizontal $y = b$. Esta recta puede parametrizarse con $z(t) = t + ib$, $-\infty < t < \infty$, y así su imagen bajo $w = e^z$ estará dada por $w(t) = e^{z(t)} = e^{t+ib} = e^t e^{ib}$, $-\infty < t < \infty$. Definir un nuevo parámetro por $s = e^t$, y observar que $0 < s < \infty$ ya que $-\infty < t < \infty$. Utilizando el parámetro $s$, la imagen está dada por $W(s) = e^{ib}s$, $0 < s < \infty$, el cual, por (8) de la sección 2.2, es el conjunto formado por todos los puntos $w \neq 0$ en el rayo que sale del origen y que contiene al punto $e^{ib} = \cos b + i \operatorname{sen} b$. La imagen también se puede describir con la ecuación $\arg(w) = b$. Representamos esta propiedad del mapeo exponencial complejo en la figura 4.1.3. Cada una de las rectas horizontales que se muestran a color en la figura 4.1.3(a) se mapea sobre un rayo negro en la figura 4.1.3(b). Conforme aumenta la intersección $y$ de una recta horizontal, aumenta el ángulo que hace la imagen del rayo con el eje positivo $u$. Por tanto, la recta que está más al fondo se mapea en el rayo en el tercer cuadrante, la recta de en medio se mapea en el rayo del primer cuadrante, y la superior se mapea en el rayo del segundo cuadrante.

Ahora resumimos estas propiedades del mapeo exponencial.

*Este conjunto a veces se llama plano complejo perforado.

***Propiedades del mapeo exponencial***

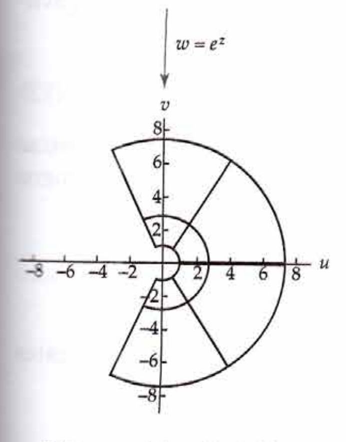
(*i*) *$w = e^z$ mapea la región fundamental $-\infty < x < \infty$, $-\pi < y \leq \pi$* sobre *el conjunto $|w| < 0$.*

(*ii*) *$w = e^z$ mapea el segmento de recta vertical $x = a$, $-\pi < y \leq \pi$ sobre la circunferencia $|w| = e^a$.*

(*iii*) *$w = e^z$ mapea la recta horizontal $y = b$, $-\infty < x < \infty$, sobre el rayo $\arg(w) = b$.*




(a) Figura del ejemplo 2




(b) Imagen de la malla de (a)

Figura 4.1.4 El mapeo $w = e^z$

**EJEMPLO 2 Mapeo exponencial de una malla**

Encuentre la imagen de la malla que se muestra en la figura 4.1.4(a) bajo $w = e^z$.

**Solución** La malla en la figura 4.1.4(a) consiste de los segmentos de recta vertical $x = 0$, 1 y 2, $-2 \leq y \leq 2$, y los segmentos de recta horizontal $y = -2$, $-1$, 0, 1 y 2, $0 \leq x \leq 2$. Usando la propiedad (*ii*) del mapeo exponencial, tenemos que la imagen del segmento de recta vertical $x = 0$, $-2 \leq y \leq 2$, es el arco de circunferencia $|w| = e^0 = 1$, $-2 \leq \arg(w) \leq 2$. De manera similar, los segmentos $x = 1$ y $x = 2$, $-2 \leq y \leq 2$, se mapean sobre los arcos $|w| = e$ y $|w| = e^2$, $-2 \leq \arg(w) \leq 2$, respectivamente. Por la propiedad (*iii*) del mapeo exponencial, el segmento de recta horizontal $y = 0$, $0 \leq x \leq 2$, se mapea sobre la parte del rayo que sale del origen definido por $\arg(w) = 0$, $1 \leq |w| \leq e^2$. Esta imagen es el segmento de recta que va de 1 a $e^2$ en el eje $u$. Los segmentos horizontales restantes $y = -2, -1$, 1 y 2 se mapean de la misma manera sobre los segmentos definidos por $\arg(w) = -2$, $\arg(w) = -1$, $\arg(w) = 1$, y $\arg(w) = 2$, $1 \leq |w| \leq e^2$, respectivamente. Por tanto, los segmentos de recta verticales que se muestran a color en la figura 4.1.4(a) se mapean sobre los arcos de circunferencia que aparecen en negro en la figura 4.1.4(b) con el segmento de recta $x = a$ mapeado sobre el arco de radio $e^a$. Además, los segmentos de recta horizontales que se muestran en color en la figura 4.1.4(a) se mapean sobre los segmentos de recta negros de la figura 4.1.4(b) con el segmento de recta $y = b$ mapeándose sobre el segmento de recta que forma un ángulo de $b$ radianes con el lado positivo del eje $u$. ❑

## 4.1.2 Función logarítmica compleja

Nota: $\log_e x$ se usará para denotar el logaritmo real.

En el análisis real, la función logaritmo natural $\ln x$ se define a menudo como la función inversa de la función exponencial real $e^x$. A partir de ahora, vamos a utilizar la notación alternativa $\log_e x$ para representar la función exponencial real. Ya que la función exponencial real es unívoca en su dominio **R**, no hay ambigüedad implicada en la definición de esta función inversa. La situación es muy diferente en el análisis complejo ya que la función exponencial compleja $e^z$ no es una función unívoca en su dominio **C**. De hecho, dado un número complejo $z$ fijo distinto de cero, la ecuación $e^w = z$ tiene un número infinito de soluciones. Para ver que esto es así, supongamos que $w = u + iv$. Si $e^w = z$, entonces $|e^w| = |z|$ y $\arg(e^w) = \arg(z)$. De (4)

y (5), se deduce que $e^u = |z|$ y $v = \arg(z)$, o, equivalentemente, $u = \log_e |z|$ y $v = \arg(z)$. Por tanto, dado un número complejo $z$ distinto de cero, hemos demostrado que:

$$\text{Si } e^w = z, \text{ entonces } w = \log_e |z| + i \arg(z). \tag{10}$$

Debido a que hay un número infinito de argumentos de $z$, (10) da infinitas soluciones $w$ para la ecuación $e^w = z$. El conjunto de valores dados por (10) define una función multivaluada $w = G(z)$, tal como se describe en la sección 2.4, que se llama el logaritmo complejo de $z$ y se denota por $\ln z$. La siguiente definición resume este análisis.

**Definición 4.1.2 Logaritmo complejo**

La función multivaluada $\ln z$ que se define por:

$$\ln z = \log_e |z| + i \arg(z) \tag{11}$$

se llama el **logaritmo complejo**.

*Nota:* $\ln z$ se utilizará para denotar el logaritmo complejo.

A partir de ahora, la notación $\ln z$ se usará siempre para denotar el logaritmo *complejo* multivaluado. Al cambiar a la notación exponencial $z = re^{i\theta}$ en (11), obtenemos la siguiente descripción alternativa del logaritmo complejo:

$$\ln z = \log_e r + i(\theta + 2n\pi), \quad n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots \tag{12}$$

De (10) vemos que el logaritmo complejo se puede utilizar para encontrar todas las soluciones a la ecuación exponencial $e^w = z$ cuando $z$ es un número complejo distinto de cero.

## EJEMPLO 3 Solución de ecuaciones exponenciales

Encuentre todas las soluciones complejas para cada una de las siguientes ecuaciones.

**(a)** $e^w = i$ **(b)** $e^w = 1 + i$ **(c)** $e^w = -2$

**Solución** Para cada ecuación $e^w = z$, el conjunto de soluciones está dado por $w = \ln z$ donde $\ln z$ se encuentra usando la definición 4.1.2.

**(a)** Para $z = i$, tenemos que $|z| = 1$ y $\arg(z) = \pi/2 + 2n\pi$. Por tanto, de (11) se obtiene:

$$w = \ln i = \log_e 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right).$$

Ya que $\log_e 1 = 0$, esto se simplifica a:

$$w = \frac{(4n+1)\pi}{2} i, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

Por tanto, cada uno de los valores:

$$w = \ldots, -\frac{7\pi}{2} i, -\frac{3\pi}{2} i, \frac{\pi}{2} i, \frac{5\pi}{2} i, \ldots$$

satisface la ecuación $e^w = i$.

**(b)** Para $z = 1 + i$, tenemos $|z| = \sqrt{2}$ y $\arg(z) = \pi/4 + 2n\pi$. Por tanto, de (11) se obtiene:

$$w = \ln(1+i) = \log_e \sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right).$$

Debido a que $\log_e \sqrt{2} = \frac{1}{2}\log_e 2$, ésta se puede reescribir como:

$$w = \frac{1}{2}\log_e 2 + \frac{(8n+1)\pi}{4}i, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Cada valor de $w$ es una solución a $e^w = 1 + i$.

**(c)** Una vez más utilizamos (11). Puesto que $z = -2$, tenemos que $|z| = 2$ y que $\arg(z) = \pi + 2n\pi$, y así:

$$w = \ln(-2) = \log_e 2 + i(\pi + 2n\pi).$$

Es decir,

$$w = \log_e 2 + (2n+1)\pi i, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Cada valor de $w$ satisface la ecuación $e^w = -2$.

❑

**Identidades logarítmicas** La definición 4.1.2 se puede usar para demostrar que el logaritmo complejo satisface las siguientes identidades, que son análogas a las identidades del logaritmo real.

**Teorema 4.1.3 Propiedades algebraicas de ln $z$**

Si $z_1$, $z_2$ son números complejos distintos de cero y $n$ es un entero, entonces

(*i*) $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$

(*ii*) $\ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln z_1 - \ln z_2$

(*iii*) $\ln z_1^n = n \ln z_1$.

**Demostración de (*i*)** Por definición 4.1.2,

$$\begin{aligned}\ln z_1 + \ln z_2 &= \log_e |z_1| + i\arg(z_1) + \log_e |z_2| + i\arg(z_2)\\ &= \log_e |z_1| + \log_e |z_2| + i(\arg(z_1) + \arg(z_2)).\end{aligned} \tag{13}$$

Debido a que el logaritmo real tiene la propiedad $\log_e a + \log_e b = \log_e(ab)$, para $a > 0$ y $b > 0$, podemos escribir $\log_e|z_1, z_2| = \log_e|z_1| + \log_e|z_2|$. Por otra parte, de (8) de la sección 1.3, tenemos $\arg(z_1) + \arg(z_2) = \arg(z_1 z_2)$. Por tanto (13) se puede reescribir como:

$$\ln z_1 + \ln z_2 = \log_e |z_1 z_2| + i\arg(z_1 z_2) = \ln(z_1 z_2).$$ ❑

Las demostraciones de los teoremas 4.1.3(*ii*) y 4.1.3(*iii*) son similares. Vea los problemas 53 y 54 de los ejercicios 4.1.

**Valor principal de un logaritmo complejo** Es interesante observar que el logaritmo *complejo* de un número real positivo tiene un número infinito de valores. Por ejemplo, el logaritmo *complejo* ln 5 es el conjunto de valores de $1.6094 + 2n\pi i$, donde $n$ es cualquier número entero, mientras que el logaritmo *real* $\log_e 5$ tiene un valor único: $\log_e 5 \approx 1.6094$. El único valor de ln 5 que corresponde a $n = 0$ es igual al valor del logaritmo real $\log_e 5$. En general, este valor del logaritmo complejo se llama el **valor principal del logaritmo complejo** ya que se encuentra utilizando el argumento principal $\text{Arg}(z)$ en lugar del argumento $\arg(z)$ en (11). Denotamos el valor principal del logaritmo con el símbolo Ln $z$. Por tanto, la expresión $f(z) = \text{Ln}\, z$ define una función, mientras que, $F(z) = \ln z$ define una función multivaluada. Resumimos este análisis en la siguiente definición.

Notación usada en el libro ➡

**Definición 4.1.3 Valor principal del logaritmo complejo**

La función compleja Ln $z$ se define por:

$$\text{Ln}\, z = \log_e |z| + i\text{Arg}(z) \tag{14}$$

se llama **valor principal del logaritmo complejo**.

Usaremos los términos *función logarítmica* y *logaritmo* para referirnos tanto a la función multivaluada ln $z$ y a la función Ln $z$. En su contexto, sin embargo, debe quedar claro a cuál de éstas nos estamos refiriendo. De (14), vemos que el valor principal del logaritmo complejo también se puede obtener por:

$$\text{Ln}\, z = \log_e r + i\theta, \ -\pi < \theta \leq \pi. \tag{15}$$

**EJEMPLO 4 Valor principal del logaritmo complejo**

Calcule el valor principal del logaritmo complejo Ln $z$ para

(a) $z = i$ (b) $z = 1 + i$ (c) $z = -2$

**Solución** En cada inciso se aplica (14) de la definición 4.1.3.

(a) Para $z = i$, tenemos $|z| = 1$ y $\text{Arg}(z) = \pi/2$, y por tanto:

$$\text{Ln}\, i = \log_e 1 + \frac{\pi}{2}i.$$

Sin embargo, puesto $\log_e 1 = 0$, esto se simplifica a:

$$\text{Ln}\, i = \frac{\pi}{2}i.$$

(b) Para $z = 1 + i$, tenemos $|z| = \sqrt{2}$ y $\text{Arg}(z) = \pi/4$, y así:

$$\text{Ln}(1 + i) = \log_e \sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i.$$

Debido a que $\log_e \sqrt{2} = \frac{1}{2}\log_e 2$, esto también se puede escribir como:

$$\text{Ln}(1 + i) = \frac{1}{2}\log_e 2 + \frac{\pi}{4}i \approx 0.3466 + 0.7854i.$$

(c) Para $z = -2$, tenemos que $|z| = 2$ y $\text{Arg}(z) = \pi$, y así:

$$\text{Ln}(-2) = \log_e 2 + \pi i \approx 0.6931 + 3.1416i.$$

Observe que cada uno de los valores encontrados de los incisos (a) al (c) podrían también encontrarse al hacer $n = 0$ en las expresiones para ln $z$ del ejemplo 3. ❑

*Nota:* ➡ Es importante indicar que las identidades del logaritmo complejo del teorema 4.1.3 *no* son necesariamente satisfechas con el valor principal del logaritmo complejo. Por ejemplo, *no* es cierto que $\text{Ln}(z_1z_2) = \text{Ln}\ z_1 + \text{Ln}\ z_2$ para todos los números complejos $z_1$ y $z_2$ (aunque puede ser cierto para *algunos* números complejos). Vea el problema 55 de los ejercicios 4.1.

**Ln $z$ como una función inversa** Ya que Ln $z$ es *uno* de los valores de la función logaritmo complejo ln $z$, se deduce de (10) que:

$$e^{\text{Ln}\,z} = z \text{ para todo } z \neq 0. \tag{16}$$

Esto sugiere que la función logarítmica Ln $z$ es una función inversa de la función exponencial $e^z$. Dado que la función exponencial compleja no es unívoca en su dominio, este enunciado no es del todo correcto. Más bien, la relación entre estas funciones es similar a la relación entre la función potencia cuadrada $z^2$ y la función raíz cuadrada principal $z^{1/2} = \sqrt{|z|}\,e^{i\text{Arg}(z)/2}$ definida por (7) en la sección 2.4. La función exponencial primero debe limitarse a un dominio en el que sea unívoca con el fin de tener una función inversa bien definida. En el problema 52 de los ejercicios 4.1, se le pedirá demostrar que $e^z$ es una función unívoca en la región fundamental $-\infty < x < \infty$, $-\pi < y \leq \pi$, que se muestra en la figura 4.1.1.

Ahora demostramos que si el dominio de $e^z$ se limita a la región fundamental, entonces el valor principal del logaritmo complejo Ln $z$ es su función inversa. Para justificar este enunciado, considere un punto $z = x + iy$ en la región fundamental $-\infty < x < \infty$, $-\pi < y \leq \pi$. De (4) y (5), tenemos que $|e^z| = e^x$ y $\arg(e^z) = y + 2n\pi$, $n$ un entero. Por tanto, $y$ es un argumento de $e^z$. Puesto que $z$ está en la región fundamental, también tenemos que $-\pi < y \leq \pi$, y de esto se tiene que $y$ es el argumento principal de $e^z$. Es decir, $\text{Arg}(e^z) = y$. Además, para el logaritmo real tenemos que $\log_e e^x = x$, y así, con la definición 4.1.3 se obtiene:

$$\begin{aligned}\text{Ln}\, e^z &= \log_e |e^z| + i\text{Arg}\,(e^z)\\ &= \log_e e^x + iy\\ &= x + iy.\end{aligned}$$

Por tanto, hemos demostrado que:

$$\text{Ln}\, e^z = z \text{ si } -\infty < x < \infty \quad \text{y} \quad -\pi < y \leq \pi. \tag{17}$$

De (16) y (17), se concluye que Ln $z$ es la función inversa de $e^z$ definida en la región fundamental. A continuación se resumen las relaciones entre estas funciones.

**Ln $z$ *como una función inversa de* $e^z$**

*Si la función exponencial compleja $f(z) = e^z$ se define en la región fundamental $-\infty < x < \infty$, $-\pi < y \leq \pi$, entonces $f$ es uno a uno y la función inversa de $f$ es el valor principal del logaritmo complejo $f^{-1}(z) = Ln\ z$.*

Tome en cuenta que (16) vale para todo número complejo $z$ distinto de cero, pero (17) sólo vale si $z$ está en la región fundamental. Por ejemplo, para el punto $z = 1 + \frac{3}{2}\pi i$ que no está en la región fundamental, tenemos:

$$\text{Ln}\, e^{1+3\pi i/2} = 1 - \frac{1}{2}\pi i \neq 1 + \frac{3}{2}\pi i.$$

**Analiticidad** El valor principal del logaritmo complejo Ln $z$ es discontinuo en el punto $z = 0$ ya que esta función no está definida ahí. Esta función también, a su vez, será discontinua en cada punto del eje real negativo. Esto es intuitivamente obvio ya que el valor de Ln $z$ en un punto $z$ cerca del eje negativo $x$ en el segundo cuadrante tiene una parte imaginaria cerca de $\pi$, mientras que el valor de un punto cercano en el tercer cuadrante tiene parte imaginaria cercano a $-\pi$. Vea la figura 4.1.4. Sin embargo, la función Ln $z$ es, continua sobre el conjunto que consiste del plano complejo excluyendo el eje real no positivo. Para ver esto apelamos el teorema 2.6.3 que establece que una función compleja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es continuo en un punto $z = x + iy$ si y sólo si tanto $u$ como $v$ son funciones reales continuas en $(x, y)$. Por (14), las partes real e imaginaria de Ln $z$ son $u(x, y) = \log_e |z| = \log_e \sqrt{x^2 + y^2}$ y $v(x, y) = \text{Arg}(z)$, respectivamente. Del cálculo de varias variables tenemos que la función $u(x, y) = \log_e \sqrt{x^2 + y^2}$ es continua en todos los puntos del plano excepto en $(0, 0)$ y del problema 55 de los ejercicios 2.6 tenemos que la función $v(x, y) = \text{Arg}(z)$ es continua en el dominio $|z| < 0$, $-\pi < \arg(z) < \pi$. Por tanto, del teorema 2.6.3, se deduce que Ln $z$ es una función continua en el dominio

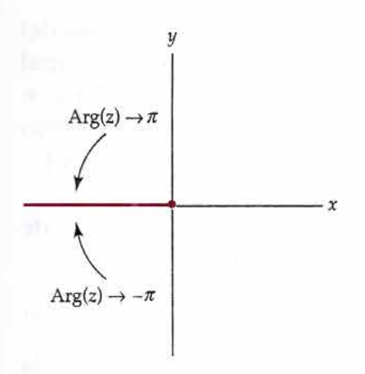


**Figura 4.1.4** Ln $z$ es discontinua en $z = 0$ y en el eje real negativo

$$|z| > 0, \quad -\pi < \arg(z) < \pi, \tag{18}$$

que se muestra en gris en la figura 4.1.5. Puesto de otra forma, la función $f_1$ definida por:

$$f_1(z) = \log_e r + i\theta \tag{19}$$

es continua en el dominio en (18) donde $r = |z|$ y $\theta = \arg(z)$.

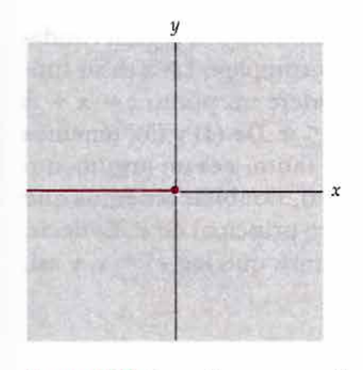
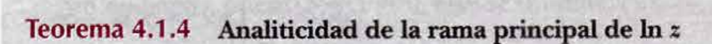


**Figura 4.1.5** Corte de rama para $f_1$

Ya que la función $f_1$ concuerda con el valor principal del logaritmo complejo Ln $z$ donde ambos están definidos, se deduce que $f_1$ asigna a la variable $z$ uno de los valores de función multivaluada $F(z) = \ln z$. Utilizando la terminología de la sección 2.6, hemos demostrado que la función $f_1$ definida con (19) es una rama de la función multivaluada $F(z) = \ln z$. (Recuerde que las ramas de la función multivaluada $F$ se denotan por $f_1$, $f_2$, y así sucesivamente.) Esta rama se llama la **rama principal del logaritmo complejo**. El eje real no positivo que se muestra a color en la figura 4.1.5 es un **corte de rama** para $f_1$ y el punto $z = 0$ es un **punto rama**. El teorema siguiente demuestra, que la rama $f_1$ es una función analítica en su dominio.


**Teorema 4.1.4 Analiticidad de la rama principal de ln $z$**

La rama principal $f_1$ del logaritmo complejo que se define con (19) es una función analítica y su derivada está dada por:

$$f_1'(z) = \frac{1}{z}. \tag{20}$$

**Demostración** Probamos que $f_1$ es analítica usando coordenadas polares en forma similar que con el teorema 3.2.2 de la sección 3.2. Ya que $f_1$ está definida en el dominio dado en (18), si $z$ es un punto en este dominio, entonces podemos

escribir $z = re^{i\theta}$ con $-\pi < \theta < \pi$. Dado que las partes real e imaginaria de $f_1$ son $u(r, \theta) = \log_e r$ y $v(r, \theta) = \theta$, respectivamente, encontramos que:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}, \qquad \frac{\partial v}{\partial \theta} = 1,$$
$$\frac{\partial v}{\partial r} = 0, \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0.$$

Por tanto, $u$ y $v$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares (10) de la sección 3.2:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Debido a que $u$, $v$, y las primeras derivadas parciales de $u$ y de $v$ son continuas en todos los puntos del dominio dados en (18), se tiene del teorema 3.2.2 que $f_1$ es analítica en este dominio. Además, de (11) de la sección 3.2, la derivada de $f_1$ está dada por:

$$f_1'(z) = e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z}. \qquad \square$$

Debido a que $f_1(z) = \operatorname{Ln} z$ para todo punto $z$ del dominio dado en (18), se tiene del teorema 4.1.4 que Ln $z$ es derivable en este dominio, y que su derivada está dada por $f_1'$. Es decir, si $|z| < 0$ y $-\pi < \arg(z) < \pi$ entonces:

$$\frac{d}{dz}\operatorname{Ln} z = \frac{1}{z}. \tag{21}$$

**EJEMPLO 5 Derivadas de funciones logarítmicas**

Determine las derivadas de las siguientes funciones en un dominio adecuado:

(**a**) $z\operatorname{Ln} z$ y (**b**) $\operatorname{Ln}(z + 1)$.

**Solución** (**a**) De las reglas de derivación de la sección 3.1 tenemos que la función $z\operatorname{Ln} z$ es derivable en todos los puntos en las dos funciones $z$ y $z\operatorname{Ln} z$ son derivables. Como $z$ es entera y Ln $z$ es derivable en el dominio dado en (18), se deduce que $z\operatorname{Ln} z$ es derivable en el dominio definido por $|z| > 0$, $-\pi < \arg(z) < \pi$. En este dominio, la derivada viene dada por la regla del producto (4) de la sección 3.1 y por (21):

$$\frac{d}{dz}[z\operatorname{Ln} z] = z \cdot \frac{1}{z} + 1 \cdot \operatorname{Ln} z = 1 + \operatorname{Ln} z.$$

(**b**) La función $\operatorname{Ln}(z + 1)$ es una composición de las funciones Ln $z$ y $z + 1$. Debido a que la función $z + 1$ es entera, se deduce de la regla de la cadena que $\operatorname{Ln}(z + 1)$ es derivable en todos los puntos $w = z + 1$ tal que $|w| > 0$ y $-\pi < \arg(z) < \pi$. En otras palabras, esta función es derivable en el punto $w$ siempre que $w$ no se encuentre en el eje real no positivo. Para determinar los valores correspondientes de $z$ para los que $\operatorname{Ln}(z + 1)$ no es derivable, lo primero a resolver es $z$ en términos de $w$ para obtener $z = w - 1$. La ecuación $z = w - 1$ define un mapeo lineal del plano $w$ sobre el plano $z$ dado por la traslación por $-1$. Bajo este mapeo el eje real no positivo se mapea en el rayo que sale de $z = -1$ y que contiene el punto $z = -2$ se muestra a color

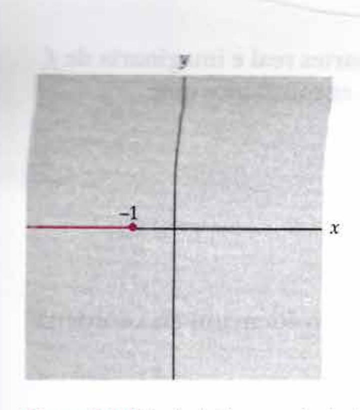



Figura 4.1.6 Ln$(z + 1)$ no es derivable en el rayo que se muestra a color

en la figura 4.1.6. Así, si el punto que $w = z + 1$ está en el eje real no positivo, entonces el punto $z$ está en el rayo se muestra en la figura 4.1.6. Esto implica que Ln$(z + 1)$ es derivable en todos los puntos $z$ que no están en este rayo. Para estos puntos, con la regla de la cadena se obtiene:

$$\frac{d}{dz}\text{Ln}(z+1) = \frac{1}{z+1}\cdot 1 = \frac{1}{z+1}.$$

❑

**Mapeo logarítmico** El mapeo logarítmico complejo $w = \text{Ln } z$ se puede entender en términos del mapeo exponencial $w = e^z$ ya que estas funciones son inversas entre sí. Por ejemplo, como $w = e^z$ mapea la región fundamental $-\infty < x < \infty$, $-\pi < y \leq \pi$ , en el plano $z$ sobre el conjunto $|w| > 0$ en el plano $w$, se tiene que el mapeo inverso $w = \text{Ln } z$ mapea el conjunto $|z| > 0$ en el plano $z$ sobre la región $-\infty < u < \infty$, $-\pi < v \leq \pi$, en el plano $w$. Otras propiedades del mapeo exponencial pueden ser similarmente establecidas como propiedades del mapeo logarítmico. A continuación se resumen algunas de estas propiedades.

***Propiedades del mapeo logarítmico***

(*i*) *$w = Ln\ z$ mapea el conjunto $|z| > 0$ sobre la región $-\infty < u < \infty$, $-\pi < v \leq \pi$.*

(*ii*) *$w = Ln\ z$ mapea la circunferencia $|z| = r$ sobre el segmento de recta vertical $u = \log_e r$, $-\pi < v \leq \pi$.*

(*iii*) *$w = Ln\ z$ mapea el rayo $arg(z) = \theta$ sobre la recta horizontal $v = \theta$, $-\infty < u < \infty$.*

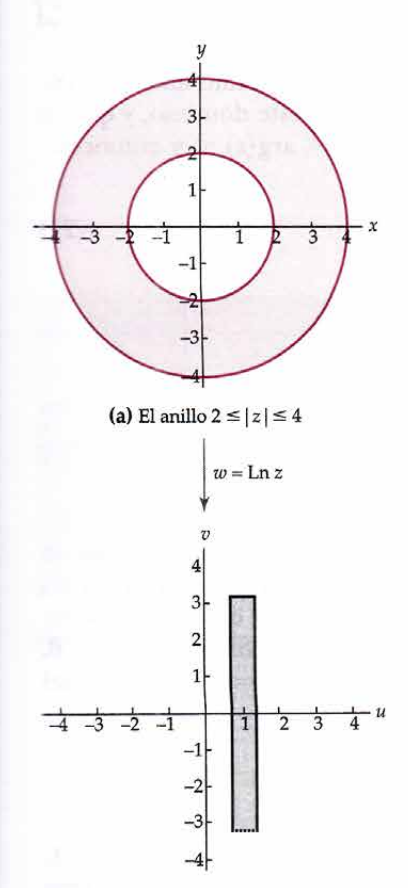



Figura 4.1.7 El mapeo $w = \text{Ln } z$

**EJEMPLO 6 Mapeo logarítmico**

Encuentre la imagen del anillo $2 \leq |z| \leq 4$ bajo el mapeo logarítmico $w = \text{Ln } z$.

**Solución** De la propiedad (*ii*) del mapeo logarítmico, las circunferencias frontera $|z| = 2$ y $|z| = 4$ del anillo se mapean sobre los segmentos de recta vertical $u = \log_e 2$ y $u = \log_e 4$, $-\pi < v \leq \pi$, respectivamente. De manera similar, cada circunferencia $|z| = r$, $2 \leq r \leq 4$, se mapea sobre un segmento de recta vertical $u = \log_e r$, $-\pi < v \leq \pi$. Dado que la función logarítmica real está aumentando en su dominio, se deduce que $u = \log_e r$ toma todos los valores en el intervalo $\log_e 2 \leq u < \log_e 4$ cuando $2 \leq r \leq 4$. Por tanto, la imagen del anillo $2 \leq |z| \leq 4$ que se muestra a color en la figura 4.1.7(a) es la región rectangular $\log_e 2 \leq u \leq \log_e 4, -\pi < v \leq \pi$, que se muestra en gris en la figura 4.1.7(b). ❑

**Otras ramas de ln $z$** La rama principal del logaritmo complejo $f_1$ que se define en (19) es sólo una de las muchas posibles ramas de la función multivaluada $F(z) = \ln z$. Podemos definir otras ramas de $F$ simplemente cambiando el intervalo de definición de $\theta$ en (18) para un intervalo distinto de longitud $2\pi$. Por ejemplo,

$$f_2(z) = \log_e r + i\theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2},$$

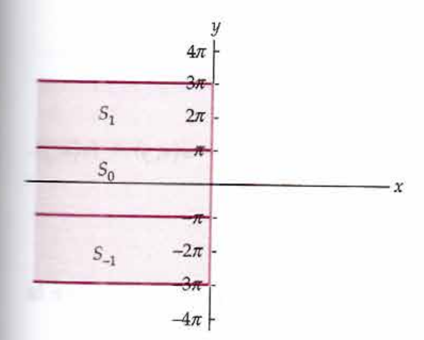
define una rama de $F$ cuyo corte de rama es el eje imaginario no positivo. Debe comprobar que para la rama $f_2$ tenemos $f_2(1) = 0$, $f_2(2i) = \log_e 2 + \frac{1}{2}\pi i$, y $f_2(-1 - i) = \frac{1}{2}\log_e 2 + \frac{5}{4}\pi i$.

De la misma forma en que probamos que la rama principal $f_1$ del logaritmo complejo es analítica, podemos también demostrar que para cualquier rama

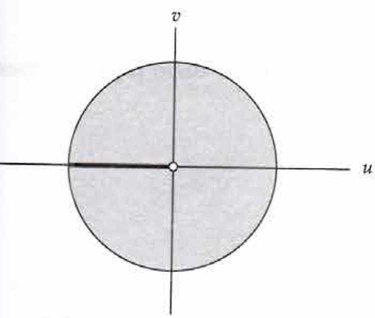
$$f_k(z) = \log_e r + i\theta, \quad \theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi,$$

de $F(z) = \ln z$ es analítica en su dominio, y su derivada está dada por:

$$f_k'(z) = \frac{1}{z}.$$




(a) Conjunto de franjas semi-infinitas $S_n$




(b) La imagen de cada franja $S_n$ es el disco unitario perforado

Figura 4.1.8 El mapeo $w = e^z$

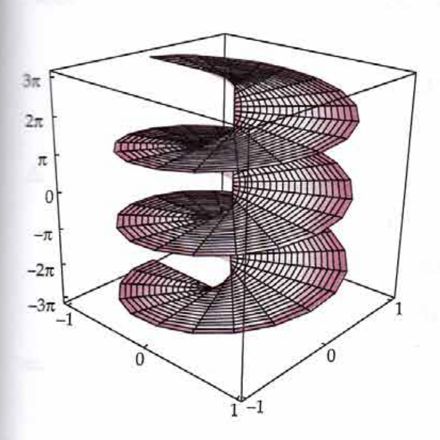



Figura 4.1.9 Una superficie de Riemann para $w = e^z$

## Observaciones *Comparación con el análisis real*

(*i*) A pesar de que las funciones complejas exponenciales y logarítmicas son similares a las funciones exponenciales y logarítmicas reales de muchas maneras, es importante considerar sus diferencias.

- La función exponencial real es unívoca, pero la exponencial compleja no lo es.
- $\log_e x$ es una función de un valor único, pero $\ln z$ es multivaluada.
- Muchas propiedades de los logaritmos reales son aplicables a los logaritmos complejos, tales como $\ln(z_1z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$, pero estas propiedades no siempre son válidas para el valor principal Ln $z$.

(*ii*) Dado que la función exponencial compleja no es unívoca, podemos utilizar una superficie de Riemann, como se describe en las observaciones del final de la sección 2.4, para ayudar a visualizar el mapeo $w = e^z$. La superficie de Riemann que construimos también nos ayudará a visualizar la función multivaluada $w = \ln z$. Considere el mapeo $w = e^z$ en el semiplano $x \leq 0$. Cada franja semi-infinita $S_n$, definida por $(2n - 1)\pi < y \leq (2n + 1)\pi$, $x \leq 0$, para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ se mapea sobre el disco unitario perforado $0 < |w| \leq 1$ que se muestra en la figura 4.1.8(b) con las semirrectas horizontales mostradas a color en la figura 4.1.8(a) mapeadas sobre el segmento $-1 \leq u < 0$ que se muestra en negro en la figura 4.1.8(b). Por tanto, $w = e^z$ describe una cubierta infinita a uno del disco unitario perforado. Para visualizar esta cubierta, nos imaginamos que existe una imagen de disco diferente $B_n$ por cada franja semi-infinita $S_n$. Ahora se corta cada disco $B_n$ abriendo a lo largo del segmento $-1 \leq u < 0$. Construimos una superficie de Riemann $w = e^z$, adjuntando, para cada $n$, el disco cortado $B_n$ al disco cortado $B_{n+1}$ a lo largo del extremo que representa la imagen de la recta semi-infinita $y = (2n + 1)\pi$. Colocamos esta superficie en el espacio $xyz$ de modo que para cada $z$ en el semiplano, las imágenes $\ldots z_{-1}, z_0, z_1, \ldots$ de $z$ en $B_{n-1}, B_0, B_1, \ldots$, respectivamente, se encuentran directamente arriba del punto $w = e^z$ en el plano $xy$. Vea la figura 4.1.9. Al proyectar los puntos de la superficie de Riemann verticalmente hacia abajo sobre el plano $xy$ vemos la naturaleza infinito-a-uno del mapeo $w = e^z$. Por el contrario, la función multivaluada $F(z) = \ln z$ se puede visualizar considerando todos los puntos de la superficie de Riemann que se encuentran directamente arriba de un punto en el plano $xy$. Este número infinito de puntos en la superficie de Riemann corresponde con el número infinito de valores de $F(z)$ en el semiplano $u \leq 0$.

**EJERCICIOS 4.1** *Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-12.*

## 4.1.1 Función exponencial compleja

En los problemas 1 a 4 encuentre la derivada $f'$ de la función dada $f$.

**1.** $f(z) = z^2 e^{z+i}$

**2.** $f(z) = \dfrac{3e^{2z} - ie^{-z}}{z^3 - 1 + i}$

**3.** $f(z) = e^{iz} - e^{-iz}$

**4.** $f(z) = ie^{1/z}$

En los problemas 5 a 8 escriba la expresión dada en términos de $x$ y $y$.

**5.** $\left|e^{z^2 - z}\right|$

**6.** $\arg\left(e^{z - i/z}\right)$

**7.** $\arg\left(e^{i(z+\bar{z})}\right)$

**8.** $\overline{ie^z + 1}$

En los problemas 9 a 12 exprese la función dada $f$ en la forma $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

**9.** $f(z) = e^{-iz}$

**10.** $f(z) = e^{2\bar{z}+i}$

**11.** $f(z) = e^{z^2}$

**12.** $f(z) = e^{1/z}$

**13.** Use las condiciones de suficiencia para la derivabilidad de la página 140 de la sección 3.2 para determinar dónde es derivable la función $f(z) = e^{2\bar{z}+i}$.

**14.** Use las condiciones de suficiencia para la derivabilidad de la página 140 de la sección 3.2 para determinar dónde es derivable la función $f(z) = e^{z^2}$.

En los problemas 15 a 20 determine la imagen del conjunto dado bajo el mapeo exponencial.

**15.** La recta $y = -2$.

**16.** La recta $x = 3$.

**17.** La franja infinita $1 < x \leq 2$.

**18.** El cuadrado con vértices en $0, 1, 1 + i$ e $i$.

**19.** El rectángulo $0 \leq x \leq \log_e 2, -\pi/4 \leq y \leq \pi/2$.

**20.** La franja semi-infinita $-\infty < x \leq 0, 0 \leq y \leq \pi$.

## 4.1.2 Función logarítmica compleja

En los problemas 21 a 26 determine todos los valores complejos del logaritmo dado.

**21.** $\ln(-5)$

**22.** $\ln(-ei)$

**23.** $\ln(-2 + 2i)$

**24.** $\ln(1 + i)$

**25.** $\ln\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}i\right)$

**26.** $\ln\left(-\sqrt{3} + i\right)$

En los problemas 27 a 32 escriba el valor principal del logaritmo en la forma $a + ib$.

**27.** $\text{Ln}(6 - 6i)$

**28.** $\text{Ln}\left(-e^2\right)$

**29.** $\text{Ln}(-12 + 5i)$

**30.** $\text{Ln}(3 - 4i)$

**31.** $\text{Ln}\left[\left(1 + \sqrt{3}i\right)^5\right]$

**32.** $\text{Ln}\left[(1 + i)^4\right]$

En los problemas 33 a 36 encuentre todos los valores complejos de $z$ que satisfagan la ecuación dada.

**33.** $e^z = 4i$

**34.** $e^{1/z} = -1$

**35.** $e^{z-1} = -ie^3$

**36.** $e^{2z} + e^z + 1 = 0$

En los problemas 37 a 40 determine un dominio en el que la función dada $f$ sea derivable; después encuentre la derivada $f'$.

**37.** $f(z) = 3z^2 - e^{2iz} + i\text{Ln}\, z$

**38.** $f(z) = (z + 1)\text{Ln}\, z$

**39.** $f(z) = \dfrac{\text{Ln}(2z - i)}{z^2 + 1}$

**40.** $f(z) = \text{Ln}(z^2 + 1)$

En los problemas 41 a 46 determine la imagen del conjunto dado bajo el mapeo $w = \text{Ln}\, z$.

**41.** El rayo $\arg(z) = \pi/6$.

**42.** El eje $y$ positivo.

**43.** La circunferencia $|z| = 4$.

**44.** La región en el primer cuadrante acotada por la circunferencia $|z| = 1$ y $|z| = e$.

**45.** El anillo $3 \leq |z| \leq 5$.

**46.** La región fuera de la circunferencia unitaria $|z| = 1$ y entre los rayos $\arg(z) = \pi/4$ y $\arg(z) = 3\pi/4$.

## Enfocando los conceptos

**47.** Use (1) para demostrar que $e^{z_1}/e^{z_2} = e^{z_1 - z_2}$.

**48.** Use (1) y la fórmula de De Moivre para demostrar que $(e^{z_1})^n = e^{nz_1}$, $n$ un entero.

**49.** Determine dónde la función compleja $e^{\bar{z}}$ es analítica.

**50.** En este problema, demostraremos que la función exponencial compleja definida por (1) es la única función compleja entera $f$ que concuerda con la función exponencial real $e^x$ cuando $z$ es real y que tiene la propiedad $f'(z) = f(z)$ para toda $z$.

**(a)** Suponga que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es una función compleja entera para la que $f'(z) = f(z)$. Explique por qué $u$ y $v$ satisfacen las ecuaciones diferenciales:

$$u_x(x, y) = u(x, y) \quad \text{y} \quad v_x(x, y) = v(x, y).$$

**(b)** Demuestre que $u(x, y) = a(y)e^x$ y $v(x, y) = b(y)e^x$ son soluciones de la ecuaciones diferenciales de (a).

**(c)** Explique por qué la suposición de que $f(z)$ coincide con la función exponencial real para $z$ real implica que $a(0) = 1$ y $b(0) = 0$.

**(d)** Explique por qué las funciones $a(y)$ y $b(y)$ satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$a(y) - b'(y) = 0$$
$$a'(y) + b(y) = 0.$$

**(e)** Resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales en (d) sujeto a las condiciones iniciales $a(0) = 1$ y $b(0) = 0$.

**(f)** Use los incisos (a) al (e) para demostrar que la función exponencial compleja definida por (1) es la única función compleja entera $f(z)$ que coincide con la función exponencial real cuando $z$ es real y que tiene la propiedad $f'(z) = f(z)$ para todo $z$.

**51.** Describa la imagen de la recta $y = x$ bajo la función exponencial. [*Sugerencia:* Determine una expresión polar $r(\theta)$ de la imagen].

**52.** Demuestre que $e^z$ es una función unívoca en la región fundamental $-\infty < x < \infty$, $-\pi < y \leq \pi$.

**53.** Demuestre que $\ln\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \ln z_1 - \ln z_2$ para todos los números complejos $z_1$ y $z_2$ distintos de cero.

**54.** Demuestre que $\ln z_1^n = n\ln z_1$ para todos los números complejos $z_1$ distintos de cero y todos los enteros $n$.

**55.** (a) Determine dos números complejos $z_1$ y $z_2$ tales que $\text{Ln}(z_1z_2) \neq \text{Ln}\, z_1 + \text{Ln}\, z_2$.

(b) Determine dos números complejos $z_1$ y $z_2$ tales que $\text{Ln}(z_1z_2) = \text{Ln}\, z_1 + \text{Ln}\, z_2$.

(c) ¿Que se puede decir acerca de $z_1$ y $z_2$ si $\text{Ln}(z_1z_2) = \text{Ln}\, z_1 + \text{Ln}\, z_2$?

**56.** ¿Es $\text{Ln}\, z_1^n = n\text{Ln}\, z_1$ para todo entero $n$ y número complejo $z_1$? Defienda su respuesta con una demostración breve o con un contraejemplo.

## Tarea del laboratorio de cómputo

La mayoría de los SAC tienen una función incorporada para evaluar Ln $z$. Por ejemplo, en *Mathematica,* la sintaxis **Log[a + b I]** determina el valor principal del logaritmo complejo de $a + bi$. Para encontrar una aproximación numérica de este valor tecle la expresión **N[Log[a + b I]]**. Por ejemplo, *Mathematica* indica que **N[Log[2 + 3 I]]** es aproximadamente $1.28247 + 0.982794i$.

En los problemas 57 a 62 use un SAC para calcular Ln $z$.

**57.** $z = -1 - i$

**58.** $z = 2 - 3i$

**59.** $z = 3 + \pi i$

**60.** $z = 13 + \sqrt{2}i$

**61.** $z = 4 + 10i$

**62.** $z = \dfrac{12 - i}{2 + 3i}$

En los problemas 63 a 66 use un SAC para determinar una solución de la ecuación.

**63.** $e^{5z - i} = 12i$

**64.** $e^{iz} = 2 - 5i$

**65.** $3e^{(2+i)z} = 5 - i$

**66.** $ie^{z-2} = \pi$

## 4.2 Potencias complejas

***Para el profesor:*** En esta sección, estudiamos las potencias complejas $z^\alpha$ donde $\alpha$ es una constante compleja. Esta sección puede omitirse sin afectar significativamente el desarrollo de temas de los capítulos posteriores.

En la sección 2.4 analizamos las funciones potencias especiales de la forma $z^n$ y $z^{1/n}$ para $n$ un entero y $n \geq 2$. Estas funciones generalizan las funciones comunes del cálculo elemental: potencia cuadrada, potencia cúbica, raíz cuadrada, raíz cúbica, y así sucesivamente. En esta sección se analiza el problema de elevar un número complejo a una potencia arbitraria real o compleja. Para potencias simples enteras es fácil de entender este proceso *en términos de la multiplicación compleja. Por ejemplo,* $(1 + i)^3 = (1 + i)(1 + i)(1 + i) = -2 + 2i$. *Sin embargo, no existe una descripción similar de una potencia compleja, como* $(1 + i)^i$. Para definir estas expresiones, utilizaremos las funciones complejas exponenciales y logarítmicas de la sección 4.1.

**Potencias complejas** Las potencias complejas, tales como $(1 + i)^i$ que se mencionaron en la introducción, se definen en términos de las funciones *exponenciales y logarítmicas complejas. Recuerde de (10) en la sección 4.1 que* $z = e^{\ln z}$ *para todo número complejo* $z$ *distinto de cero. Por tanto, cuando* $n$ *es un entero se tiene del teorema 4.1.2(iv) que* $z^n$ *se puede escribir como* $z^n = (e^{\ln z})^n = e^{n \ln z}$. Esta fórmula, que se cumple para exponentes enteros $n$, sugiere la siguiente fórmula utilizada para definir la potencia compleja $z^\alpha$ para cualquier exponente complejo $\alpha$.

**Definición 4.2.1 Potencias complejas**

Si $\alpha$ es un número complejo y $z \neq 0$, entonces la **potencia compleja** $z^\alpha$ se define como:

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z}. \tag{1}$$

En general, (1) da un conjunto infinito de valores debido a que el logaritmo complejo ln $z$ es multivaluado. Sin embargo, cuando $n$ es un entero, la expresión en (1) es univaluada (lo que concuerda con el hecho de que $z^n$ es una función cuando $n$ es un entero). Para ver que esto es así, usamos el teorema 4.1.2($ii$) para obtener:

$$z^n = e^{n \ln z} = e^{n[\log_e |z| + i \arg(z)]} = e^{n \log_e |z|} e^{n \arg(z) i}. \tag{2}$$

Si $\theta = \text{Arg}(z)$, entonces $\arg(z) = \theta + 2k\pi$ donde $k$ es un entero y así

$$e^{n \arg(z) i} = e^{n(\theta + 2k\pi)i} = e^{n\theta i} e^{2nk\pi i}.$$

De la definición 4.1.1 se tiene que $e^{2nk\pi i} = \cos(2nk\pi) + i\,\text{sen}(2nk\pi)$. Puesto que $n$ y $k$ son enteros, se tiene que $2nk\pi$ es un múltiplo par de $\pi$, por lo que $\cos(2nk\pi) = 1$ y $\text{sen}(2nk\pi) = 0$. En consecuencia, $e^{2nk\pi i} = 1$ y (2) se puede reescribir como:

$$z^n = e^{n \log_e |z|} e^{n \text{Arg}(z) i}, \tag{3}$$

que es univaluada.

Aunque el análisis anterior muestra que (1) puede definir una función de valor único, debemos considerar que, en general,

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z} \tag{4}$$

define una función multivaluada. Llamamos a la función multivaluada dada por (4) una **función de potencia compleja.**

**EJEMPLO 1 Potencias complejas**

Encuentre los valores de la potencia compleja dada: **(a)** $i^{2i}$ **(b)** $(1 + i)^i$.

**Solución** En cada inciso, los valores de $z^\alpha$ se encuentran utilizando (1).
**(a)** En el inciso (a) del ejemplo 3 de la sección 4.1 vimos que:

$$\ln i = \frac{(4n+1)\pi}{2} i.$$

Así, identificando $z = i$ y $\alpha = 2i$ en (1) se obtiene:

*Nota*: Todos los valores de $i^{2i}$ son reales. ➡

$$i^{2i} = e^{2i \ln i} = e^{2i[(4n+1)\pi i/2]} = e^{-(4n+1)\pi}$$

para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Los valores de $i^{2i}$ correspondientes a, por ejemplo, $n = -1, 0$ y $1$ son $12391.6$, $0.0432$, y $1.507 \times 10^{-7}$, respectivamente.

**(b)** En el inciso (b) del ejemplo 3 de la sección 4.1 vimos que:

$$\ln(1+i) = \frac{1}{2} \log_e 2 + \frac{(8n+1)\pi}{4} i$$

para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Así, identificando $z = 1 + i$ y $\alpha = i$ en (1), obtenemos:

$$(1+i)^i = e^{i\ln(1+i)} = e^{i[(\log_e 2)/2+(8n+1)\pi i/4]},$$

o

$$(1+i)^i = e^{-(8n+1)\pi/4+i(\log_e 2)/2},$$

para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ❏

Las potencias complejas definidas por (1) satisfacen las siguientes propiedades que son análogas a las propiedades de las potencias reales:

$$z^{\alpha_1} z^{\alpha_2} = z^{\alpha_1+\alpha_2}, \quad \frac{z^{\alpha_1}}{z^{\alpha_2}} = z^{\alpha_1-\alpha_2}, \tag{5}$$

y

$$(z^{\alpha})^n = z^{n\alpha} \text{ para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Cada una de estas propiedades se puede deducir de la definición 4.2.1 y del Teorema 4.1.2. Por ejemplo, por la definición 4.2.1, tenemos que $z^{\alpha_1} z^{\alpha_2} = z^{\alpha_1 \ln z} e^{\alpha_2 \ln z}$. Esta se puede reescribir como $z^{\alpha_1} z^{\alpha_2} = e^{\alpha_1 \ln z+\alpha_2 \ln z} = e^{(\alpha_1+\alpha_2)\ln z}$, usando el teorema 4.1.2$(ii)$. Ya que $e^{(\alpha_1+\alpha_2)\ln z} = z^{\alpha_1+\alpha_2}$ de (1), hemos demostrado que $z^{\alpha_1} z^{\alpha_2} = z^{\alpha_1+\alpha_2}$

No todas las propiedades de los exponentes reales tienen propiedades similares para exponentes complejos. Vea las Observaciones al final de esta sección para un ejemplo.

## Valor principal de una potencia compleja

Como se ha indicado, la potencia compleja $z^{\alpha}$ dada en (1) es, en general, multivaluada, ya que se define utilizando el logaritmo complejo multivaluado ln $z$. Se puede asignar un valor único a $z^{\alpha}$ utilizando el valor principal del logaritmo complejo Ln $z$ en lugar de ln $z$. Este valor particular de la potencia compleja se llama **valor principal** de $z^{\alpha}$. Por ejemplo, ya que Ln $i = \pi i/2$, el valor principal de $i^{2i}$ es el valor de $i^{2i}$ correspondiente a $n = 0$ en el inciso (a) del ejemplo 1. Es decir, el valor principal de $i^{2i}$ es $e^{-\pi} \approx 0.0432$. Resumimos este análisis en la definición siguiente

**Definición 4.2.2 Valor principal de una potencia compleja**

Si $\alpha$ es un número complejo y $z \neq 0$, entonces la función definida por:

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \operatorname{Ln} z} \tag{6}$$

se llama el **valor principal de la potencia compleja** $z^{\alpha}$.

Nota ➡ La notación $z^{\alpha}$ se utiliza para denotar tanto a una función potencia multivaluada $F(z) = z^{\alpha}$ de (4) como al **valor principal de la función potencia** dado por (6). En el contexto será claro a cuál de los dos nos estaremos refiriendo.

### EJEMPLO 2 Valor principal de una potencia compleja

Encuentre el valor principal de cada potencia compleja: **(a)** $(-3)^{i/\pi}$ **(b)** $(2i)^{1-i}$.

**Solución** En cada inciso, utilice (6) para encontrar el valor principal de $z^{\alpha}$.

(**a**) Para $z = -3$, tenemos $|z| = 3$ y $\text{Arg}(-3) = \pi$, por lo que $\text{Ln}(-3) = \log_e 3 + i\pi$ por (14) de la sección 4.1. Así, identificando a $z = -3$ y $\alpha = \frac{i}{\pi}$ en (6), obtenemos:

$$(-3)^{i/\pi} = e^{(i/\pi)\text{Ln}(-3)} = e^{(i/\pi)(\log_e 3 + i\pi)},$$

o

$$(-3)^{i/\pi} = e^{-1+i(\log_e 3)/\pi}.$$

La definición 4.1.1 en la sección 4.1 da

$$e^{-1+i(\log_e 3)/\pi} = e^{-1}\left(\cos\frac{\log_e 3}{\pi} + i\,\text{sen}\,\frac{\log_e 3}{\pi}\right),$$

y así,

$$(-3)^{i/\pi} \approx 0.3456 + 0.1260i.$$

(**b**) Para $z = 2i$, tenemos $|z| = 2$ y $\text{Arg}(z) = \pi/2$, y así $\text{Ln}\,2i = \log_e 2 + i\pi/2$ por (14) de la sección 4.1. Identificando $z = 2i$ y $\alpha = 1 - i$ en (6) se obtiene:

$$(2i)^{1-i} = e^{(1-i)\text{Ln}2i} = e^{(1-i)(\log_e 2 + i\pi/2)},$$

o

$$(2i)^{1-i} = e^{\log_e 2 + \pi/2 - i(\log_e 2 - \pi/2)}.$$

Aproximando este valor utilizando la definición 4.1.1 de la sección 4.1:

$$\begin{aligned}(2i)^{1-i} &= e^{\log_e 2+\pi/2}\left[\cos\left(\log_e 2 - \frac{\pi}{2}\right) - i\,\text{sen}\left(\log_e 2 - \frac{\pi}{2}\right)\right]\\ &\approx 6.1474 + 7.4008i.\end{aligned}$$

❑

**Analiticidad** En general, el valor principal de una potencia $z^\alpha$, definido por (6) no es una función continua en el plano complejo porque la función $\text{Ln}\,z$ no es continua en éste. Sin embargo, ya que la función $e^{\alpha z}$ es continua en el plano complejo, y puesto que la función $\text{Ln}\,z$ es continua en el dominio $|z| > 0$, $-\pi < \arg(z) < \pi$, se tiene que $z^\alpha$ es continua en el dominio $|z| > 0$, $-\pi < \arg(z) < \pi$. Usando coordenadas polares $r = |z|$ y $\theta = \arg(z)$ hemos encontrado que la función definida por:

*Recuerde*: Las ramas de una función multivaluada $F$ se denotan por $f_1$, $f_2$, y así sucesivamente.

$$f_1(z) = e^{\alpha(\log_e r + i\theta)}, \quad -\pi < \theta < \pi \tag{7}$$

es una rama de la función multivaluada $F(z) = z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$. Esta rama particular se llama la **rama principal** de la potencia compleja $z^\alpha$, su corte de rama es el eje real no positivo, y $z = 0$ es un punto rama.

La rama $f_1$ definida por (7) coincide con el valor principal $z^\alpha$ definido por (6) en el dominio $|z| > 0, -\pi < \arg(z) < \pi$. En consecuencia, la derivada de $f_1$ se puede encontrar utilizando la regla de la cadena (6) de la sección 3.1:

$$f_1'(z) = \frac{d}{dz}e^{\alpha\text{Ln}z} = e^{\alpha\text{Ln}z}\frac{d}{dz}[\alpha\text{Ln}z] = e^{\alpha\text{Ln}z}\frac{\alpha}{z}. \tag{8}$$

Usando el valor principal $z^\alpha = e^{\alpha\text{Ln}z}$ encontramos que (8) se simplifica a $f_1'(z) = \alpha z^\alpha/z = \alpha z^{\alpha-1}$, es decir, en el dominio $|z| > 0$, $-\pi < \arg(z) < \pi$, el valor principal de la potencia compleja $z^\alpha$ es derivable y

$$\frac{d}{dz}z^\alpha = \alpha z^{\alpha-1}. \tag{9}$$

Esto demuestra que la regla de la potencia (7) de la sección 3.1 se cumple para el valor principal de una potencia compleja en el dominio indicado.

Otras ramas de la función multivaluada $F(z) = z^\alpha$ se pueden definir mediante la fórmula (7) con un intervalo distinto de longitud $2\pi$ definido con $\theta$. Por ejemplo, $f_2(z) = e^{\alpha(\log_e r + i\theta)}$, $-\pi/4 < \theta < 7\pi/4$, define una rama de $F$ cuya corte de rama es el rayo $\arg(z) = -\pi/4$ junto con el punto rama $z = 0$.

**EJEMPLO 3 Derivada de una función potencia**

Determine la derivada del valor principal $z^i$ en el punto $z = 1 + i$.

**Solución** Debido a que el punto $z = 1 + i$ está en el dominio $|z| < 0$, $-\pi < \arg(z) < \pi$, se tiene de (9) que:

$$\frac{d}{dz}z^i = iz^{i-1},$$

y así,

$$\left.\frac{d}{dz}z^i\right|_{z=1+i} = \left.iz^{i-1}\right|_{z=1+i} = i(1+i)^{i-1}.$$

Podemos utilizar (5) para reescribir este valor como:

$$i(1+i)^{i-1} = i(1+i)^i(1+i)^{-1} = i(1+i)^i\frac{1}{1+i} = \frac{1+i}{2}(1+i)^i.$$

Además, del inciso (b) del ejemplo 1 con $n = 0$, el valor principal de $(1 + i)^i$ es:

$$(1+i)^i = e^{-\pi/4 + i(\log_e 2)/2},$$

y así

$$\left.\frac{d}{dz}z^i\right|_{z=1+i} = \frac{1+i}{2}e^{-\pi/4+i(\log_e 2)/2} \approx 0.1370 + 0.2919i.$$ ❑

## Observaciones *Comparación con el análisis real*

(*i*) Como se mencionó en la página 176, existen algunas propiedades de las potencias reales que no las satisfacen las potencias complejas. Un ejemplo de esto es que para las potencias complejas $(z^{\alpha_1})^{\alpha_2} \neq z^{\alpha_1\alpha_2}$ a menos que $\alpha_2$ sea un entero. Vea el problema 14 en los ejercicios 4.2.

(*ii*) Como con los logaritmos complejos, algunas propiedades que se tienen para potencias complejas, no se tienen para valores principales de potencias complejas. Por ejemplo, usando la definición 4.2.1 y el teorema 4.1.2, podemos probar que $(z_1z_2)^\alpha = z_1^\alpha z_2^\alpha$ para números complejos cualesquiera diferentes de cero $z_1$ y $z_2$. Sin embargo, esta propiedad no se conserva para los valores principales de las potencias complejas. En particular, si $z_1 = -1$, $z_2 = i$, y $\alpha = i$, entonces de (6) tenemos que el valor principal de $(-1 \cdot i)^i$ es $e^{i\text{Ln}(-i)} = e^{\pi/2}$. Por otra parte, el producto de los valores principales de $(-1)^i$ y $i^i$ es $e^{i\text{Ln}(-1)}e^{i\text{Ln}\,i} = e^{-\pi}e^{-\pi/2} = e^{-3\pi/2}$.

## EJERCICIOS 4.2 *Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-12.*

En los problemas 1 a 6 determine todos los valores de la potencia compleja dada.

**1.** $(-1)^{3i}$
**2.** $3^{2i/\pi}$
**3.** $(1+i)^{1-i}$
**4.** $(1+\sqrt{3}i)^{i}$
**5.** $(-i)^{i}$
**6.** $(ei)^{\sqrt{2}}$

En los problemas 7 a 12 determine el valor principal de la potencia compleja dada.

**7.** $(-1)^{3i}$
**8.** $3^{2i/\pi}$
**9.** $2^{4i}$
**10.** $i^{i/\pi}$
**11.** $(1+\sqrt{3}i)^{3i}$
**12.** $(1+i)^{2-i}$

**13.** Compruebe que $\dfrac{z^{\alpha_1}}{z^{\alpha_2}} = z^{\alpha_1-\alpha_2}$ para $z \neq 0$.

**14.** **(a)** Compruebe que $(z^{\alpha})^n = z^{n\alpha}$ para $z \neq 0$ y $n$ un entero.

**(b)** Determine un ejemplo que muestre que para $z \neq 0$ se puede tener $(z^{\alpha_1})^{\alpha_2} \neq z^{\alpha_1\alpha_2}$.

En los problemas 15 a 18 determine la derivada de la función dada en el punto dado. Sea $z^{\alpha}$ el valor principal de la potencia compleja definida en el dominio $|z| > 0$, $-\pi < \arg(z) < \pi$.

**15.** $z^{3/2}$; $z = 1+i$
**16.** $z^{2i}$; $z = i$
**17.** $z^{1+i}$; $z = 1+\sqrt{3}i$
**18.** $z^{\sqrt{2}}$; $z = -i$

### Enfocando los conceptos

**19.** Para cualquier número complejo $z \neq 0$, evalúe $z^0$.

**20.** Si $\alpha = x + iy$ donde $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, entonces ¿qué podemos decir acerca de $1^{\alpha}$?

**21.** Muestre que si $\alpha = 1/n$ donde $n$ es un entero positivo, entonces el valor principal de $z^{\alpha}$ es igual que el de la $n$-ésima raíz principal de $z$.

**22.** **(a)** Demuestre que si $\alpha$ es un número racional (es decir, $\alpha = m/n$ donde $m$ y $n$ son enteros sin factor común), entonces $z^{\alpha}$ es valuada en forma finita. Es decir, demuestre que sólo hay muchos valores finitos de $z^{\alpha}$.

**(b)** Demuestre que si $\alpha$ es un número irracional (esto es, no es un número racional) o un número complejo, entonces $z^{\alpha}$ es infinitamente valuado.

**23.** ¿Cuáles de las identidades listadas en (5) se conservan para el valor principal de $z^{\alpha}$?

**24.** Una útil propiedad de los números reales es $x^{\alpha}y^{\alpha} = (xy)^{\alpha}$.

**(a)** ¿La propiedad $z^{\alpha}w^{\alpha} = (zw)^{\alpha}$ es válida para potencias complejas?

**(b)** La propiedad $z^{\alpha}w^{\alpha} = (zw)^{\alpha}$ es válida para el valor principal de una potencia compleja?

### Tarea de laboratorio de cómputo

La mayoría de los SAC tienen incorporada una función para encontrar el valor principal de una potencia compleja. En *Mathematica,* la sintaxis **(a + b I)^(c + d I)** se utiliza para lograr esto. Para determinar una aproximación numérica de este valor en *Mathematica* introduzca la expresión **N[(a + b I)^(c + d I)]**. Por ejemplo, *Mathematica* indica que **N[(1 + 2 I)^(3 + 2 I)]** es aproximadamente $0.2647 - 1.1922i$.

En los problemas 25 a 30 use un SAC para determinar el valor principal de la potencia compleja dada.

**25.** $(1-5i)^{i}$

**26.** $5^{5-2i}$

**27.** $(2-i)^{3+2i}$

**28.** $(1-4i)^{1+3i}$

**29.** $(1+i)^{(1+i)^{1+i}}$

**30.** $(1-3i)^{1/4}$

# 4.3 Funciones trigonométricas e hiperbólicas

En esta sección se definen las funciones complejas trigonométricas e hiperbólicas. Al igual que con las funciones complejas $e^z$ y $Ln\,z$ definidas en la sección anterior, estas funciones concuerdan con sus homólogas reales para variable real. Además, vamos a demostrar que las funciones complejas trigonométricas e hiperbólicas tienen la misma derivada y satisfacen muchas de las identidades como las funciones reales trigonométricas e hiperbólicas.

## 4.3.1 Funciones trigonométricas complejas

Si $x$ es una variable real, entonces se deduce de la definición 4.1.1 que:

$$e^{ix}=\cos x+i\operatorname{sen}x \quad \text{y} \quad e^{-ix}=\cos x-i\operatorname{sen}x. \tag{1}$$

Mediante la adición de estas ecuaciones y simplificando, obtenemos una ecuación que relaciona la función coseno real con la función exponencial compleja:

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}. \tag{2}$$

De manera similar, si restamos las dos ecuaciones en (1), entonces se obtiene una expresión para la función seno real:

$$\operatorname{sen}x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}. \tag{3}$$

Las fórmulas para el coseno *real* y las funciones seno dadas en (2) y (3) se pueden utilizar para definir al seno y al coseno *complejos*. Es decir, definimos las funciones trigonométricas complejas sustituyendo la variable real $x$ por la variable compleja $z$ en (2) y (3).

**Definición 4.3.1 Funciones seno y coseno complejas**

El **seno** y **coseno** complejos se definen por:

$$\operatorname{sen}z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \quad \text{y} \quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}. \tag{4}$$

De esto se deduce de (2) y (3) que el seno y coseno complejos definidos por (4) concuerdan con el seno y coseno reales para la variable real. A continuación definimos la tangente compleja, cotangente, secante, y cosecante, utilizando el seno y coseno complejos:

$$\tan z=\frac{\operatorname{sen}z}{\cos z}, \quad \cot z=\frac{\cos z}{\operatorname{sen}z}, \quad \sec z=\frac{1}{\cos z}, \quad \text{y} \quad \csc z=\frac{1}{\operatorname{sen}z}. \tag{5}$$

Estas funciones también concuerdan con sus contrapartes reales para la variable real.

**EJEMPLO 1 Valores de funciones trigonométricas complejas**

En cada inciso, exprese el valor de la función trigonométrica dada en la forma $a + ib$.

(**a**) $\cos i$ (**b**) $\operatorname{sen}(2+i)$ (**c**) $\tan(\pi - 2i)$

**Solución** Para cada expresión se aplica la fórmula adecuada de (4) o (5) y se simplifica.

(**a**) Por (4),

$$\cos i = \frac{e^{i\cdot i} + e^{-i\cdot i}}{2} = \frac{e^{-1}+e}{2} \approx 1.5431.$$

(**b**) Por (4),

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(2+i) &= \frac{e^{i(2+i)} - e^{-i(2+i)}}{2i}\\ &= \frac{e^{-1+2i} - e^{1-2i}}{2i}\\ &= \frac{e^{-1}(\cos 2 + i\operatorname{sen} 2) - e(\cos(-2) + i\operatorname{sen}(-2))}{2i}\\ &\approx \frac{0.9781 + 2.8062i}{2i}\\ &\approx 1.4031 - 0.4891i.\end{aligned}$$

(**c**) En la primera ecuación de (**5**) junto con (**4**) tenemos:

$$\begin{aligned}\tan(\pi - 2i) &= \frac{\left(e^{i(\pi-2i)} - e^{-i(\pi-2i)}\right)/2i}{\left(e^{i(\pi-2i)} + e^{-i(\pi-2i)}\right)/2} = \frac{e^{i(\pi-2i)} - e^{-i(\pi-2i)}}{\left(e^{i(\pi-2i)} + e^{-i(\pi-2i)}\right)i}\\ &= -\frac{e^2 - e^{-2}}{e^2 + e^{-2}}i \approx -0.9640i.\end{aligned}$$

❑

**Identidades** La mayoría de las identidades conocidas para las funciones trigonométricas reales valen para las funciones trigonométricas complejas. Se deduce de la definición 4.3.1 y de las propiedades de la función exponencial compleja. Ahora se listan algunas de las identidades trigonométricas más útiles. Cada uno de los resultados de (6) a (10) es idéntico al de su análogo real.

$$\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z \qquad \cos(-z) = \cos z \tag{6}$$

$$\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1 \tag{7}$$

$$\operatorname{sen}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \operatorname{sen} z_2 \tag{8}$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2 \tag{9}$$

Observe que las fórmulas de ángulo doble:

$$\operatorname{sen} 2z = 2\operatorname{sen} z\cos z \qquad \cos 2z = \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z \tag{10}$$

son una consecuencia directa de (8) y (9).

Vamos a comprobar sólo la identidad (7). Las otras identidades se deducen de una manera similar. Vea los problemas 13 y 14 de los ejercicios 4.3.

Para comprobar (7), observamos que por (4) y las propiedades de la función exponencial compleja del teorema 4.1.2, tenemos

$$\cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4},$$

y

$$\operatorname{sen}^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 = -\frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{4}.$$

Por tanto,

$$\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz} - e^{2iz} + 2 - e^{-2iz}}{4} = 1.$$

*Nota* ➡ Es importante reconocer que algunas propiedades de las funciones trigonométricas reales *no* son satisfechas por sus contrapartes complejas. Por ejemplo, $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ y $|\cos x| \leq 1$ para todo real $x$, pero, del ejemplo 1 tenemos que $|\cos i| > 1$ y $|\operatorname{sen}(2 + i)| > 1$, ya que $|\cos i| \approx 1.5431$ y $|\operatorname{sen}(2 + i)| \approx 1.4859$, por lo que estas desigualdades, en general, no las satisface una variable compleja.

**Periodicidad** En la sección 4.1 se ha demostrado que la función exponencial compleja es periódica con un periodo imaginario puro de $2\pi i$. Es decir, hemos demostrado que $e^{z+2\pi i} = e^z$ para todo $z$ complejo. Sustituyendo $z$ con $iz$ en esta ecuación obtenemos $e^{iz+2\pi i} = e^{i(z+2\pi)} = e^{iz}$. Por tanto, $e^{iz}$ es una función periódica con periodo real $2\pi$. Del mismo modo, podemos demostrar que $e^{-i(z+2\pi)} = e^{-iz}$ y así $e^{-iz}$ también es una función periódica con un periodo real $2\pi$. Ahora, de la definición 4.3.1 se tiene que:

$$\operatorname{sen}(z + 2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}}{2i} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \operatorname{sen} z.$$

Un enunciado similar también se aplica a la función coseno complejo. En resumen, tenemos:

$$\operatorname{sen}(z + 2\pi) = \operatorname{sen} z \quad \text{y} \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z \tag{11}$$

para todo $z$. Dicho de otra manera, (11) muestra que el seno y el coseno complejos son funciones periódicas con un periodo real $2\pi$. La periodicidad de las funciones secante y cosecante se deducen, de (11) y (5). Las identidades $\operatorname{sen}(z + \pi) = -\operatorname{sen} z$ y $\cos(z + \pi) = -\cos z$ se puede utilizar para demostrar que la tangente y cotangente complejos son periódicas con un periodo real $\pi$. Vea los problemas 51 y 52 de los ejercicios 4.3.

**Ecuaciones trigonométricas** Ahora ponemos nuestra atención a la solución de ecuaciones trigonométricas simples. Debido a que el seno y coseno complejos son periódicos, siempre hay infinitas soluciones a las ecuaciones de la forma $\operatorname{sen} z = w$ o $\cos z = w$. Una estrategia para resolver estas ecuaciones es utilizar la definición 4.3.1 junto con la fórmula cuadrática. Mostramos este método en el siguiente ejemplo.

---

### EJEMPLO 2 Solución de ecuaciones trigonométricas

Encuentre todas las soluciones a la ecuación $\operatorname{sen} z = 5$.

**Solución.** Por la definición 4.3.1, la ecuación $\operatorname{sen} z = 5$ es equivalente a la ecuación

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 5.$$

Multiplicando esta ecuación por $e^{iz}$ y simplificando obtenemos

$$e^{2iz} - 10ie^{iz} - 1 = 0.$$

Esta ecuación es cuadrática en $e^{iz}$. Es decir,

$$e^{2iz} - 10ie^{iz} - 1 = \left(e^{iz}\right)^2 - 10i\left(e^{iz}\right) - 1 = 0.$$

Por tanto, se deduce de la fórmula cuadrática (3) de la sección 1.6 que las soluciones de $e^{2iz} - 10ie^{iz} - 1 = 0$ están dadas por

$$e^{iz} = \frac{10i + (-96)^{1/2}}{2} = 5i \pm 2\sqrt{6}i = \left(5 \pm 2\sqrt{6}\right)i. \tag{12}$$

Con el fin de encontrar los valores de $z$ que satisfagan (12), resolvemos las dos ecuaciones exponenciales en (12) usando el logaritmo complejo. Si $e^{iz} = \left(5 + 2\sqrt{6}\right)i$, entonces, $iz = \ln\left(5i + 2\sqrt{6}i\right)$ o $z = -i\ln\left[\left(5 + 2\sqrt{6}\right)i\right]$. Ya que $\left(5 + 2\sqrt{6}\right)i$ es un número imaginario puro y $5 + 2\sqrt{6} > 0$, tenemos que $\arg\left[\left(5 + 2\sqrt{6}\right)i\right] = \frac{1}{2}\pi + 2n\pi$. Por tanto,

$$z = -i\log\left[\left(5 + 2\sqrt{6}\right)i\right] = -i\left[\log_e\left(5 + 2\sqrt{6}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right]$$

o

$$z = \frac{(4n+1)\pi}{2} - i\log_e\left(5 + 2\sqrt{6}\right) \tag{13}$$

para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ De manera similar, encontramos que si $e^{iz} = \left(5 - 2\sqrt{6}\right)i$, entonces $z = -i\ln\left[\left(5 - 2\sqrt{6}\right)i\right]$. Ya que $\left(5 - 2\sqrt{6}\right)i$ es un número imaginario puro y $5 - 2\sqrt{6} > 0$, se tiene un argumento de $\pi/2$, y así:

$$z = -i\log\left[\left(5 - 2\sqrt{6}\right)i\right] = -i\left[\log_e\left(5 - 2\sqrt{6}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right]$$

o

$$z = \frac{(4n+1)\pi}{2} - i\log_e\left(5 - 2\sqrt{6}\right) \tag{14}$$

para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Por tanto, hemos demostrado que si sen $z = 5$, entonces $z$ es uno de los valores dados en (13) o (14). ☐

**Módulo** El módulo de una función trigonométrica compleja también puede ser útil en la solución de ecuaciones trigonométricas. Para encontrar una fórmula en términos de $x$ y $y$ para el módulo de las funciones seno y coseno, primero expresamos estas funciones en términos de sus partes real e imaginaria. Si se sustituye el símbolo $z$ con el símbolo $x + iy$ en la expresión de sen $z$ en (4), entonces obtenemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= \frac{e^{-y+ix} - e^{y-ix}}{2i} = \frac{e^{-y}(\cos x + i\operatorname{sen} x) - e^{y}(\cos x - i\operatorname{sen} x)}{2i} \\ &= \operatorname{sen} x\left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right) + i\cos x\left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right). \end{aligned} \tag{15}$$

Ya que el seno y coseno hiperbólicos reales se definen con $\operatorname{senh} y = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}$ y $\cosh y = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}$ podemos volver a escribir a (15) como

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x\cosh y + i\cos x\operatorname{senh} y. \tag{16}$$

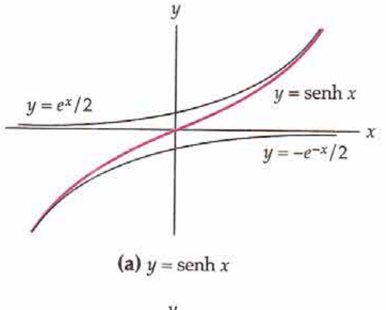
Un cálculo similar nos permite expresar la función coseno complejo en términos de sus partes real e imaginaria como:

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y. \qquad (17)$$

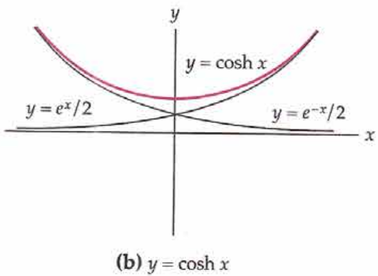
Ahora usamos (16) y (17) para obtener fórmulas para el módulo del seno y coseno complejos. De (16) tenemos:

$$|\operatorname{sen} z| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \operatorname{senh}^2 y}.$$

Esta fórmula se puede simplificar utilizando las identidades $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ y $\cosh^2 y = 1 + \operatorname{senh}^2 y$ para funciones trigonométricas e hiperbólicas reales:



(a) $y = \operatorname{senh} x$



(b) $y = \cosh x$

Figura 4.3.1 Funciones hiperbólicas reales

$$|\operatorname{sen} z| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x\,(1 + \operatorname{senh}^2 y) + \cos^2 x \operatorname{senh}^2 y}$$
$$= \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + (\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x) \operatorname{senh}^2 y,}$$

o

$$|\operatorname{sen} z| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y}. \qquad (18)$$

Después de un cálculo similar se obtiene la siguiente expresión para el módulo de la función coseno complejo:

$$|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y}. \qquad (19)$$

Puede recordar del cálculo que la función hiperbólica real senh $x$ no está acotada en la recta real. Vea la figura 4.3.1(a). Como consecuencia de este hecho, las expresiones de (18) y (19) se pueden hacer arbitrariamente grandes y elegir a $y$ arbitrariamente grande. Así, el seno y coseno complejos no están acotados en el plano complejo. Es decir, no existe una constante $M$ real, tal que $|\operatorname{sen} z| < M$ para todo $z$ en $\mathbf{C}$, ni existe una constante real $M$ para la que $|\cos z| < M$ para todo $z$ en $\mathbf{C}$. Esto, por supuesto, es muy diferente de la situación real para el seno y coseno para el cual $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ y $|\cos x| \leq 1$ para todo $x$ real.

**Ceros** Las fórmulas deducidas para el módulo del seno y del coseno complejos son útiles para determinar los ceros o raíces de estas funciones. Recordemos que los ceros de la función seno real se producen en múltiplos enteros de $\pi$, y que las raíces de la función coseno real se producen en múltiplos enteros impares de $\pi/2$. Ya que el seno y coseno complejos coinciden con sus contrapartes reales para variable real, se deduce que estos ceros de las funciones seno y coseno reales son también ceros de las funciones seno y coseno complejos. Es una cuestión natural preguntarse si el seno y coseno complejos tienen ceros adicionales en el plano complejo. Una forma de responder esta pregunta es mediante la solución de las ecuaciones sen $z = 0$ y $\cos z = 0$ en la forma presentada en el ejemplo 2. Un método diferente que implica el reconocimiento de un número complejo es igual a 0 si y sólo si su módulo es 0. Por tanto, resolver la ecuación sen $z = 0$ es equivalente a resolver la ecuación $|\operatorname{sen} z| = 0$. Utilizando (18) vemos que si $|\operatorname{sen} z| = 0$, entonces $\sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y} = 0$, que es equivalente a:

$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y = 0.$$

Ya que $\operatorname{sen}^2 x$ y $\operatorname{senh}^2 y$ son ambos números reales no negativos, esta última ecuación se cumple si y sólo si sen $x = 0$ y senh $y = 0$. Como acabamos de

indicar, sen $x = 0$ cuando $x = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, y el examen de la figura 4.3.1(a) indica que senh $y = 0$ sólo cuando $y = 0$. Por tanto, las únicas soluciones de la ecuación sen $z = 0$ en el plano complejo son los números reales $z = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Es decir, los ceros de la función seno complejo son las mismas que los ceros de las funciones seno real; no hay ceros adicionales del seno en el plano complejo. Esta no es la misma situación de las funciones polinomiales, donde con frecuencia hay ceros adicionales en el plano complejo.

En esencia, de la misma manera podemos demostrar que los únicos ceros de la función coseno complejo son los números reales $z = (2n + 1)\pi/2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ Vea el problema 41 de los ejercicios 4.3. En resumen tenemos que:

Todos los ceros de sen $z$ y de cos $z$ son reales

$$\operatorname{sen} z = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad z = n\pi, \tag{20}$$

y

$$\cos z = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad z = \frac{(2n+1)\pi}{2} \tag{21}$$

para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

## Analiticidad

Las derivadas del seno y coseno complejo se encuentran utilizando la regla de la cadena (6) de la sección 3.1. Para la función seno complejo tenemos:

$$\frac{d}{dz} \operatorname{sen} z = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

o

$$\frac{d}{dz} \operatorname{sen} z = \cos z.$$

Ya que esta derivada se define para todos los complejos $z$, sen $z$ es una función entera. De manera similar, encontramos

$$\frac{d}{dz} \cos z = -\operatorname{sen} z.$$

Las derivadas del sen $z$ y cos $z$, entonces se pueden utilizar para demostrar que las derivadas de todas las funciones trigonométricas complejas son iguales a las de las funciones trigonométricas reales. Las derivadas de las seis funciones trigonométricas complejas se sintetizan en el siguiente resumen.

***Derivadas de funciones trigonométricas complejas.***

$$\frac{d}{dz} \operatorname{sen} z = \cos z \qquad \frac{d}{dz} \cos z = -\operatorname{sen} z$$

$$\frac{d}{dz} \tan z = \sec^2 z \qquad \frac{d}{dz} \cot z = -\csc^2 z$$

$$\frac{d}{dz} \sec z = \sec z \tan z \qquad \frac{d}{dz} \csc z = -\csc z \cot z$$

Las funciones seno y coseno son enteras, pero las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante son sólo analíticas en los puntos donde el denominador es distinto de cero. De (20) y (21), se deduce que las funciones tangente y secante tienen singularidades en $z = (2n + 1)\pi/2$ para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ , mientras que las funciones cotangente y cosecante tienen singularidades en $z = n\pi$ para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**Mapeo trigonométrico** Ahora vamos a analizar el mapeo complejo $w = \text{sen } z$ del plano $z$ sobre el plano $w$. Ya que sen $z$ es periódica con un periodo real de $2\pi$, esta función toma todos los valores en cualquier franja vertical infinita $x_0 < x \leq x_0 + 2\pi$, $-\infty < y < \infty$. En forma similar a la utilizada para estudiar la exponencial $w = e^z$, esto nos permite estudiar el mapeo $w = \text{sen } z$ en el plano complejo mediante el análisis de cualquiera de estas franjas. Considere, por ejemplo, la franja $-\pi < x \leq \pi$, $-\infty < y < \infty$. Antes de examinar el mapeo complejo $w = \text{sen } z$ en esta franja, observe que sen $z$ no es unívoca en esta región. Por ejemplo, $z_1 = 0$ y $z_2 = \pi$ se encuentran en esta región y sen 0 = sen $\pi$ = 0. De la identidad $\text{sen}(-z + \pi) = \text{sen } z$ se deduce que la imagen de la franja $-\pi < x \leq -\pi/2$, $-\infty < y < \infty$, es igual a la imagen de la franja de $\pi/2 < \theta \leq \pi$, $-\infty < y < \infty$, bajo $w = \text{sen } z$. Por tanto, sólo necesitamos considerar el mapeo $w = \text{sen } z$ en la región $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2, -\infty < y < \infty$, para obtener una comprensión de este mapeo en todo el plano $z$. En el problema 45 de los ejercicios 4.3 se le pedirá demostrar que la función seno complejo es unívoca en el dominio $-\pi/2 < x < \pi/2$, $-\infty < y < \infty$.

---

**EJEMPLO 3 El mapeo $w = \text{sen } z$**

Describa la imagen de la región $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, $-\infty < y < \infty$, bajo el mapeo complejo $w = \text{sen } z$.

**Solución** Similar al análisis de las páginas 161 y 162 de la sección 4.1, una aproximación a este problema consiste en determinar la imagen de las rectas verticales $x = a$ con $-\pi/2 \leq a \leq \pi/2$ y bajo $w = \text{sen } z$. Supongamos por el momento que $a \neq -\pi/2, 0$, o $\pi/2$. De (16) la imagen de la recta vertical $x = a$ bajo $w = \text{sen } z$ está dada por:

$$u = \text{sen}\, a \cosh y, \quad v = \cos a \,\text{senh}\, y, \quad -\infty < y < \infty. \tag{22}$$

Vamos a eliminar la variable $y$ en (22) para obtener una sola ecuación cartesiana sobre $u$ y $v$. Como $-\pi/2 < a < \pi/2$ y $a \neq 0$, se deduce que sen $a \neq 0$ y cos a $\neq 0$ por lo que de (22) obtenemos $\cosh y = \dfrac{u}{\text{sen}\, a}$ y $\text{senh}\, y = \dfrac{v}{\cos a}$. La identidad $\cosh^2 y - \text{senh}^2 y = 1$ entonces para funciones hiperbólicas reales se obtiene la siguiente ecuación:

$$\left(\frac{u}{\text{sen}\, a}\right)^2 - \left(\frac{v}{\cos a}\right)^2 = 1. \tag{23}$$

La ecuación cartesiana en (23) es una hipérbola con vértices en ($\pm$sen $a$, 0) y asíntotas oblicuas $v = \pm\left(\dfrac{\cos a}{\text{sen}\, a}\right) u$. Debido a que el punto $(a, 0)$ está en la recta $x = a$, el punto (sen $a$, 0) debe estar en la imagen de la recta. Por lo tanto, la imagen de la recta vertical $x = a$ con $-\pi/2 < a < \pi/2$ y $a \neq 0$ bajo $w = \text{sen } z$ es la rama* de la hipérbola (23) que contiene al punto (sen $a$, 0). Ya que $\text{sen}(-z) = -\text{sen } z$ para todo $z$, se tiene también que la imagen de la recta $x = -a$ es una rama de la hipérbola (23) que contiene al punto ($-$sen $a$, 0). Se ilustra esta propiedad del mapeo $w = \text{sen } z$ en la figura 4.3.2, donde las rectas verticales que se muestran a color a en la figura 4.3.2(a) se mapean sobre las hipérbolas que aparecen en negro en la figura 4.3.2(b). La recta $x = \pi/3$ se mapea sobre la rama de la hipérbola que contiene al punto $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0\right)$ y la recta $x = \pi/6$ se mapea en la rama que contiene al punto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

---

*No confunda este término con la "rama de una función multivaluada".

**(a)** La región $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

**(b)** Imagen de la región en (a)

**Figura 4.3.2** El mapeo $w = \text{sen}\, z$

Del mismo modo, la recta $x = -\pi/3$ se mapea sobre la rama que contiene al punto $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3},\ 0\right)$ y la recta $x = -\pi/6$ se mapea sobre la rama que contiene el punto $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$.

Las imágenes de las rectas $x = -\pi/2$, $x = \pi/2$ y $x = 0$ no se pueden encontrar de (23). Sin embargo, de (22) vemos que la imagen de la recta $x = -\pi/2$ es el conjunto de puntos $u \leq -1$ en el eje real negativo, que la imagen de la recta $x = \pi/2$ es el conjunto de puntos $u \geq 1$ en el eje real positivo, y que la imagen de la recta $x = 0$ es el eje imaginario $u = 0$. Vea la figura 4.3.2. En resumen, hemos demostrado que la imagen de la franja vertical infinita $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, $-\infty < y < \infty$, bajo $w = \text{sen}\, z$, es todo el plano $w$. ❑

En el ejemplo 3, la imagen también se puede encontrar utilizando los segmentos de recta horizontales $y = b$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, en lugar de rectas verticales. En este caso, las imágenes están dadas por:

$$u = \text{sen}\, x \cosh b, \quad v = \cos x \,\text{senh}\, b, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Cuando $b \neq 0$, este conjunto también está dado por la ecuación cartesiana:

$$\left(\frac{u}{\cosh b}\right)^2 + \left(\frac{v}{\text{senh}\, b}\right)^2 = 1, \tag{24}$$

que es una elipse con intersección $u$ en $(\pm\cosh b,\ 0)$ e intersección $v$ en $(0,\ \pm\text{senh}\, b)$. Si $b > 0$, entonces la imagen del segmento de recta $y = b$ es la mitad superior de la elipse definida por (24) y la imagen del segmento de recta $y = -b$ es la mitad inferior de la elipse. Así, los segmentos de recta horizontales que se muestran a color en la figura 4.3.2(a) se mapean sobre las elipses que se muestran en gris en la figura.4.3.2(b). El par de segmentos de rectas horizontales más interno se mapean sobre la elipse más interna, el par de segmentos de recta de en medio se mapean sobre la elipse de en medio, y el par exterior de segmentos de rectas se mapean sobre la elipse más exterior. Como punto final, observe que si $b = 0$, entonces la imagen del segmento de recta $y = 0$, $-\pi/2 < x < \pi/2$, es el segmento de recta $-1 \leq u \leq 1$, $v = 0$ en el eje real.

El mapeo $w = \cos z$ se puede analizar de una manera similar, o, ya que $\cos z = \text{sen}(z + \pi/2)$ de (9), podemos ver al mapeo $w = \cos z$ como una

PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

composición de la traslación $w = z + \pi/2$ y del mapeo $w = \text{sen } z$. Vea el problema 46 de los ejercicios 4.3.

## 4.3.2 Funciones hiperbólicas complejas

Las funciones seno y coseno hiperbólicos *reales* se definen usando la función exponencial *real* como se muestra a continuación:

$$\text{senh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{y} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Las funciones seno y coseno hiperbólicos *complejos* se definen de manera similar utilizando la función exponencial *compleja.*

**Definición 4.3.2 Seno y coseno hiperbólicos complejos**

Las funciones complejas **seno hiperbólico** y **coseno hiperbólico** se definen por:

$$\text{senh}\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \text{y} \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}. \tag{25}$$

Ya que la función exponencial compleja concuerda con la función exponencial real con variable real, se deduce de (25) que las funciones hiperbólicas complejas concuerdan con las funciones hiperbólicas reales con variable real. Sin embargo, a diferencia de las funciones hiperbólicas reales cuyas gráficas se muestran en la figura 4.3.1, las funciones hiperbólicas complejas son periódicas y tienen una infinidad de ceros. Vea el problema 50 de los ejercicios 4.3.

Todos los ceros de senh $z$ y de cosh $z$ son imaginarias puras.

La tangente, secante, cotangente, y cosecante hiperbólicas complejas, se definen en términos de senh $z$ y cosh $z$:

$$\tanh z = \frac{\text{senh} z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\text{senh}\, z}, \quad \text{sech}\, z = \frac{1}{\cosh z}, \quad \text{y}\, \text{csch}\, z = \frac{1}{\text{senh}\, z}. \tag{26}$$

Observe que el seno y el coseno hiperbólicos son funciones enteras ya que las funciones $e^z$ y $e^{-z}$ son enteras. Además, con la regla de la cadena (6) de la sección 3.1, tenemos:

$$\frac{d}{dz}\,\text{senh} z = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

o

$$\frac{d}{dz}\,\text{senh}\, z = \cosh z.$$

Un cálculo similar para cosh $z$ produce

$$\frac{d}{dz}\cosh z = \text{senh}\, z.$$

Derivadas de las otras cuatro funciones restantes hiperbólicas se pueden encontrar usando (26) y la regla del cociente (5) de la sección 3.1.

***Derivadas de las funciones hiperbólicas complejas***

$$\frac{d}{dz}\operatorname{senh} z = \cosh z \qquad \frac{d}{dz}\cosh z = \operatorname{senh} z$$
$$\frac{d}{dz}\tanh z = \operatorname{sech}^2 z \qquad \frac{d}{dz}\coth z = -\operatorname{csch}^2 z$$
$$\frac{d}{dz}\operatorname{sech} z = -\operatorname{sech} z \tanh z \qquad \frac{d}{dz}\operatorname{csch} z = -\operatorname{csch} z \coth z$$

**Relación del seno y el coseno** Las funciones trigonométricas reales y las funciones hiperbólicas reales comparten muchas propiedades similares. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x.$$

Aparte del aparente parecido en la notación y de las similitudes de sus respectivas series de Taylor, no hay forma sencilla de relacionar a las funciones trigonométricas reales con las funciones hiperbólicas reales. Sin embargo, cuando se trata con las funciones trigonométricas e hiperbólicas *complejas*, existe una conexión simple y hermosa entre las dos. Deducimos esta relación sustituyendo $z$ con $iz$ en la definición de senh $z$ y luego comparamos el resultado con (4):

$$\operatorname{senh}(iz) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) = i \operatorname{sen} z,$$

o

$$-i \operatorname{senh}(iz) = \operatorname{sen} z.$$

De manera similar, si sustituimos $iz$ por $z$ en la expresión para sen $z$ y comparamos con (25), entonces encontramos que senh $z = -i$ sen $(iz)$. Después de repetir este proceso para cos $z$, y cosh $z$ obtenemos las siguientes relaciones importantes entre las funciones trigonométricas e hiperbólicas complejas:

$$\operatorname{sen} z = -i \operatorname{senh}(iz) \quad \text{y} \quad \cos z = \cosh(iz) \tag{27}$$
$$\operatorname{senh} z = -i \operatorname{sen}(iz) \quad \text{y} \quad \cosh z = \cos(iz). \tag{28}$$

Las relaciones entre las otras funciones trigonométricas y las hiperbólicas se pueden deducir ahora de (27) y (28). Por ejemplo,

$$\tan(iz) = \frac{\operatorname{sen}(iz)}{\cos(iz)} = \frac{i \operatorname{senh} z}{\cosh z} = i \tanh z.$$

También podemos utilizar (27) y (28) para obtener las identidades hiperbólicas de las identidades trigonométricas. A continuación listamos algunas de las identidades hiperbólicas más comunes. Cada uno de los resultados (29) a (32) es idéntico a su análogo real.

$$\operatorname{senh}(-z) = -\operatorname{senh} z \quad \cosh(-z) = \cosh z \tag{29}$$
$$\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1 \tag{30}$$
$$\operatorname{senh}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{senh} z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \operatorname{senh} z_2 \tag{31}$$
$$\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \operatorname{senh} z_1 \operatorname{senh} z_2 \tag{32}$$

En el siguiente ejemplo se comprueba la fórmula de la suma dada en (32). Las otras identidades se pueden comprobar en forma similar. Vea los problemas 29 y 30 de los ejercicios 4.3.

**EJEMPLO 4 Una identidad hiperbólica**

Compruebe que $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \operatorname{senh} z_1 \operatorname{senh} z_2$ para todos los complejos $z_1$ y $z_2$.

**Solución** Por (28), $\cosh(z_1 + z_2) = \cos(iz_1 + iz_2)$, y así con la identidad trigonométrica (9) y las aplicaciones adicionales de (27) y (28), obtenemos:

$$\begin{aligned}\cosh(z_1 + z_2) &= \cos(iz_1 + iz_2)\\ &= \cos iz_1 \cos iz_2 - \operatorname{sen} iz_1 \operatorname{sen} iz_2\\ &= \cos iz_1 \cos iz_2 + (-i \operatorname{sen} iz_1)(-i \operatorname{sen} iz_2)\\ &= \cosh z_1 \cosh z_2 + \operatorname{senh} z_1 \operatorname{senh} z_2.\end{aligned}$$

❑

Las relaciones entre las funciones trigonométricas e hiperbólicas complejas dadas en (27) y (28) también nos permiten determinar la acción de las funciones hiperbólicas como mapeos complejos. Por ejemplo, ya que $\operatorname{senh} z = -i \operatorname{sen}(iz)$, el mapeo complejo $w = \operatorname{senh} z$ se puede considerar como la composición de los tres mapeos complejos $w = iz$, $w = \operatorname{sen} z$, y $w = -iz$. Vea el problema 47 de los ejercicios 4.3.

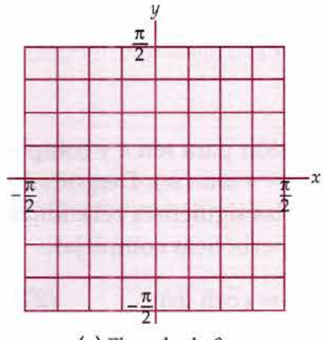
## Observaciones *Comparación con el análisis real*

(*i*) En análisis real, la función exponencial es una de las funciones elementales importantes. Sin embargo, en análisis complejo, la función exponencial compleja tiene mucho más importancia. Todas las funciones elementales complejas se pueden definir en términos de las funciones exponencial y logarítmica complejas. Un tema recurrente dentro del estudio del análisis complejo implica usar a las funciones exponencial y logarítmica para evaluar, derivar, integrar y mapear funciones elementales.

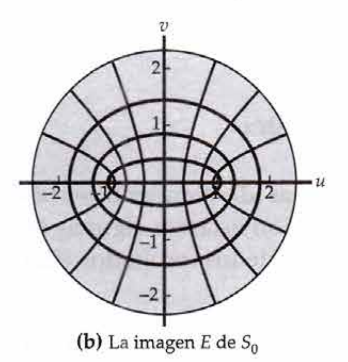
(*ii*) Las funciones de una variable real $x$, *senh x* y *cosh x* no son periódicas. Por el contrario, las funciones complejas *senh z* y *cosh z* son periódicas, vea el problema 49 de los ejercicios 4.3. Además *cosh x* no tiene ceros y senh $x$ tiene un solo cero en $x = 0$. Vea la figura 4.3.1. Por otra parte, las dos funciones complejas senh $z$ y cosh $z$, tienen un número infinito de ceros. Vea el problema 50 de los ejercicios 4.3.

(*iii*) Ya que la función compleja seno es periódica, el mapeo $w = \operatorname{sen} z$ no es unívoca en el plano complejo. Construir una superficie de Riemann, para esta función, como se describe en las observaciones del final de la sección 2.4 y de la sección 4.1, nos ayudará a visualizar el mapeo complejo $w = \operatorname{sen} z$. Para construir una superficie de Riemann considere el mapeo del cuadrado $S_0$ definido por $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. Del ejemplo 3, encontramos que el cuadrado $S_0$ que se muestra a color en la figura 4.3.3(a) se mapea sobre la región elíptica $E$ que se muestra en gris en la figura 4.3.3(b). Similarmente, el cuadrado adyacente $S_1$ definido por $\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2$, $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, también se mapea sobre $E$.

Una superficie de Riemann se construye con dos copias de $E$, $E_0$ y $E_1$, representando las imágenes de $S_0$ y $S_1$, respectivamente. Entonces recortamos a $E_0$ y $E_1$, abriendo a lo largo de los segmentos de recta



**(a)** El cuadrado $S_0$



**(b)** La imagen $E$ de $S_0$

**Figura 4.3.3** El mapeo $w = \operatorname{sen} z$

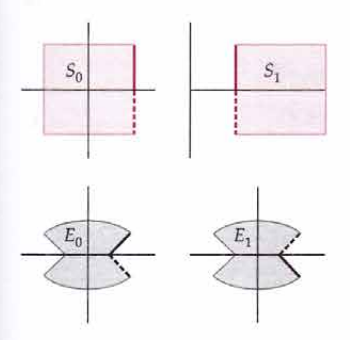



**Figura 4.3.4** Las regiones $E_0$ y $E_1$ cortadas elípticamente

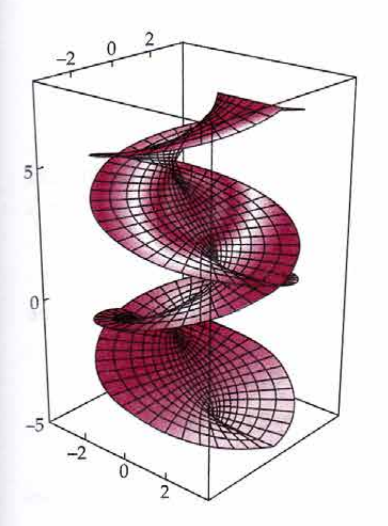



**Figura 4.3.5** Una superficie de Riemann para $w = \text{sen}\, z$

en el eje real de 1 a $\cosh(\pi/2)$ y de $-1$ a $-\cosh(\pi/2)$. Como se muestra en la figura 4.3.4, el segmento que se muestra a color en la frontera de $S_0$ se mapea sobre el segmento que se muestra en negro en la frontera de $E_0$, mientras que el segmento punteado que se muestra a color en la frontera de $S_0$ se mapea sobre el segmento punteado que se muestra en negro en la frontera de $E_0$. De forma similar, los segmentos que se muestran a color en la frontera de $S_1$ se mapean sobre los segmentos que se muestran en negro en la frontera de $E_1$. Parte de la superficie de Riemann consiste de las dos regiones elípticas $E_0$ y $E_1$ con los segmentos que se muestran en negro unidos y los segmentos punteados unidos. Para completar la superficie de Riemann, tomamos para cada entero $n$ una región elíptica $E_n$ que representa la imagen del cuadrado $S_n$ definida por $(2n - 1)\pi/2 \leq x \leq (2n + 1)\pi/2$, $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. Cada región $E_n$ está cortada y abierta, como se cortó a $E_0$ y a $E_1$, $E_n$ se pega a $E_{n+1}$ a lo largo de sus fronteras de una forma similar a la que se usó para $E_0$ y $E_1$. Esta superficie de Riemann, puesta en el espacio $xyz$, se muestra en la figura 4.3.5.

## EJERCICIOS 4.3

*Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-13.*

### 4.3.1 Funciones trigonométricas complejas

En los problemas 1 a 8 exprese el valor de la función trigonométrica dada en la forma $a + ib$.

**1.** $\text{sen}(4i)$
**2.** $\cos(-3i)$
**3.** $\cos(2 - 4i)$
**4.** $\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + i\right)$
**5.** $\tan(2i)$
**6.** $\cot(\pi + 2i)$
**7.** $\sec\left(\frac{\pi}{2} - i\right)$
**8.** $\csc(1 + i)$

En los problemas 9 a 12 determine todos los valores complejos $z$ que satisfacen la ecuación dada.

**9.** $\text{sen}\, z = i$
**10.** $\cos z = 4$
**11.** $\text{sen}\, z = \cos z$
**12.** $\cos z = i\, \text{sen}\, z$

En los problemas 13 a 16 compruebe la identidad trigonométrica dada.

**13.** $\text{sen}(-z) = -\text{sen}\, z$
**14.** $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \text{sen}\, z_1\, \text{sen}\, z_2$
**15.** $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$
**16.** $\text{sen}\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos z$

En los problemas 17 a 20 determine la derivada de la función dada.

**17.** $\text{sen}(z^2)$
**18.** $\cos(ie^z)$
**19.** $z \tan \frac{1}{z}$
**20.** $\sec(z^2 + (1 - i)z + i)$

### 4.3.2 Funciones hiperbólicas complejas

En los problemas 21 a 24 exprese el valor de la función hiperbólica dada en la forma $a + ib$.

**21.** $\cosh(\pi i)$
**22.** $\text{senh}\left(\frac{\pi}{2} i\right)$
**23.** $\cosh\left(1 + \frac{\pi}{6} i\right)$
**24.** $\tanh(2 + 3i)$

En los problemas 25 a 28 encuentre todos los valores complejos $z$ que satisfacen la ecuación dada.

**25.** $\cosh z = i$

**26.** $\operatorname{senh} z = -1$

**27.** $\operatorname{senh} z = \cosh z$

**28.** $\operatorname{senh} z = e^z$

En los problemas 29 a 32 compruebe la identidad hiperbólica dada.

**29.** $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$

**30.** $\operatorname{senh}(z_1 + z_2) = \operatorname{senh} z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \operatorname{senh} z_2$

**31.** $|\operatorname{senh} z|^2 = \operatorname{senh}^2 x + \operatorname{sen}^2 y$

**32.** $\operatorname{Im}(\cosh z) = \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y$

En los problemas 33 a 36 encuentre la derivada de la función dada.

**33.** $\operatorname{sen} z \operatorname{senh} z$

**34.** $\tanh z$

**35.** $\tanh(iz - 2)$

**36.** $\cosh\left(iz + e^{iz}\right)$

## Enfocando los conceptos

**37.** Recordemos que la fórmula de Euler establece que $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ para cualquier número real $\theta$. Demuestre que, de hecho, $e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$ para cualquier número complejo $z$.

**38.** Resuelva la ecuación $\operatorname{sen} z = \cosh 2$ igualando las partes reales e imaginarias.

**39.** Si $\operatorname{sen} z = a$ con $-1 \leq a < 1$, entonces, ¿qué puede decir acerca de $z$? Justifique su respuesta.

**40.** Si $|\operatorname{sen} z| \leq 1$, entonces, ¿qué puede decir acerca de $z$? Justifique su respuesta.

**41.** Demuestre que todas los ceros de $\cos z$ son $z = (2n + 1)\pi/2$ para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**42.** Determine todos los $z$ tales que $|\tan z| = 1$.

**43.** Encuentre las partes real e imaginaria de la función $\operatorname{sen}\bar{z}$ y utilícelas para demostrar que esta función no es analítica en ningún punto.

**44.** Sin calcular derivadas parciales, explique por qué $\operatorname{sen} x \cosh y$ y $\cos x \operatorname{senh} y$ son funciones armónicas en **C**.

**45.** Demuestre que $\operatorname{sen} z$ es una función unívoca en el dominio $-\pi/2 < x < \pi/2$, $-\infty < y < \infty$.

**46.** Use la identidad $\cos z = \operatorname{sen}\left(z + \frac{1}{2}\pi\right)$ para encontrar la imagen de la región $-\pi \leq x \leq 0$ bajo el mapeo $w = \cos z$. Describa las imágenes de las rectas verticales y horizontales en la región.

**47.** Utilice la identidad $\operatorname{senh} z = -i \operatorname{sen}(iz)$ para encontrar la imagen de la región $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, $-\infty < x < \infty$, bajo el mapeo $w = \operatorname{senh} z$. Describa las imágenes de las rectas verticales y horizontales en la región. [*Sugerencia*: La identidad implica que $w = \operatorname{senh} z$ es una composición de mapeos lineales y del mapeo complejo $w = \operatorname{sen} z$].

**48.** Encuentre la imagen de la región definida por $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, $y \geq 0$, bajo el mapeo $w = (\operatorname{sen} z)^{1/4}$, donde $z^{1/4}$ representa la función raíz cuarta principal.

**49.** Determine el periodo de cada una de las siguientes funciones complejas.

(**a**) $\cosh z$ (**b**) $\operatorname{senh} z$ (**c**) $\tanh z$

**50.** Determine todos los ceros de cada una de las siguientes funciones.

(**a**) $\cosh z$ (**b**) $\operatorname{senh} z$

**51.** Compruebe las siguientes identidades.

(**a**) $\operatorname{sen}(z + \pi) = -\operatorname{sen} z$ (**b**) $\cos(z + \pi) = -\cos z$

**52.** Utilice las identidades en el problema 51 para demostrar que $\tan z$ es una función periódica con un periodo real de $\pi$.

## 4.4 Funciones inversas trigonométricas e hiperbólicas

***Para el profesor***: En esta sección, introducimos las funciones inversas trigonométricas complejas e hiperbólicas. Este material se puede saltar sin afectar el desarrollo de los temas en los capítulos siguientes.

La función logarítmica compleja ln $z$ se definió en la sección 4.1 para resolver ecuaciones de la forma $e^w = z$. Ya que la función exponencial compleja es periódica, hay infinitas soluciones a estas ecuaciones, y en consecuencia, ln $z$ es necesariamente una función multivaluada. En esta sección repetimos este proceso para ecuaciones que involucren funciones trigonométricas e hiperbólicas complejas. Ya que las funciones trigonométricas e hiperbólicas complejas son periódicas, sus funciones inversas son multivaluadas. Además, ya que las funciones trigonométricas e hiperbólicas complejas están definidas en términos de la función exponencial compleja, sus inversas involucran al logaritmo complejo.

**Seno inverso** En (11) de la sección 4.3 vimos que la función seno compleja es periódica con un periodo real de $2\pi$. También se encontró que la función seno mapea al plano complejo en el plano complejo, es decir, Rango(sen $z$) = **C**. Vea la figura 4.3.2. Estas dos propiedades implican que para todo número complejo $z$ existe un número infinito de soluciones $w$ de la ecuación sen $w = z$. Una fórmula explícita para $w$ se encuentra siguiendo el procedimiento utilizado en el ejemplo 2 de la sección 4.3. Comenzamos usando la definición 4.3.1 para reescribir la ecuación sen $w = z$ como:

$$\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z \quad \text{o} \quad e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0.$$

Debido a $e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$ es una ecuación cuadrática en $e^{iw}$ podemos entonces usar la fórmula cuadrática (3) de la sección 1.6 para despejar a $e^{iw}$:

$$e^{iw} = iz + \left(1 - z^2\right)^{1/2}. \tag{1}$$

Ya que estamos usando la fórmula cuadrática, debemos tener en cuenta que la expresión $(1 - z^2)^{1/2}$ en (1) representa las *dos* raíces cuadradas de $1 - z^2$. Por último, resolvemos a $w$ usando el logaritmo complejo:

$$iw = \ln\left[iz + \left(1 - z^2\right)^{1/2}\right] \quad \text{o} \quad w = -i\ln\left[iz + \left(1 - z^2\right)^{1/2}\right]. \tag{2}$$

Cada valor de $w$ obtenido de la segunda ecuación en (2) satisface la ecuación sen $w = z$. Por tanto, llamamos a la función multivaluada definida por la segunda ecuación de (2) el **seno inverso**. Resumimos este análisis en la siguiente definición.

**Definición 4.4.1 Seno inverso**

La función multivaluada $\text{sen}^{-1} z$ se define por:

$$\text{sen}^{-1} z = -i\ln\left[iz + \left(1 - z^2\right)^{1/2}\right] \tag{3}$$

se llama el **seno inverso**.

A veces, también se conoce al seno inverso como el **arcoseno** y se denota por arcsen $z$. Es claro de (3) que el seno inverso es multivaluado ya que

se define en términos del logaritmo complejo ln $z$. También vale la pena repetir que la expresión $(1 - z^2)^{1/2}$ en (3) representa las dos raíces cuadradas de $1 - z^2$.

**EJEMPLO 1 Valores del seno inverso**

Encuentre todos los valores de $\text{sen}^{-1}\sqrt{5}$.

**Solución** Haciendo $z = \sqrt{5}$ en (3) se obtiene:

$$\begin{aligned}\text{sen}^{-1}\sqrt{5} &= -i\ln\left[i\sqrt{5} + \left(1 - \left(\sqrt{5}\right)^2\right)^{1/2}\right]\\ &= -i\ln\left[i\sqrt{5} + (-4)^{1/2}\right].\end{aligned}$$

Las dos raíces cuadradas $(-4)^{1/2}$ de $-4$ se encuentra que son $\pm\, 2i$ usando (4) de la sección 1.4, y así:

$$\text{sen}^{-1}\sqrt{5} = -i\ln\left[i\sqrt{5} \pm 2i\right] = -i\ln\left[\left(\sqrt{5} \pm 2\right)i\right].$$

Debido a que $\left(\sqrt{5} \pm 2\right)i$ es un número imaginario puro con parte imaginaria positiva (tanto $\sqrt{5} + 2$ como $\sqrt{5} - 2$ son positivos), se tiene que $\left|\left(\sqrt{5} \pm 2\right)i\right| = \sqrt{5} \pm 2$ y $\arg\left[\left(\sqrt{5} \pm 2\right)i\right] = \pi/2$. Por tanto, de (11) de la sección 4.1 tenemos

$$\ln\left[\left(\sqrt{5} \pm 2\right)i\right] = \log_e\left(\sqrt{5} \pm 2\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$$

para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Esta expresión se puede simplificar observando que

$$\log_e\left(\sqrt{5} - 2\right) = \log_e\frac{1}{\sqrt{5} + 2} = \log_e 1 - \log_e\left(\sqrt{5} + 2\right) = 0 - \log_e\left(\sqrt{5} + 2\right),$$

y así $\log_e\left(\sqrt{5} \pm 2\right) = \pm\log_e\left(\sqrt{5} + 2\right)$. Por tanto,

$$\begin{aligned}-i\ln\left[\left(\sqrt{5} \pm 2\right)i\right] &= -i\left[\log_e\left(\sqrt{5} \pm 2\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right]\\ &= -i\left[\pm\log_e\left(\sqrt{5} + 2\right) + i\frac{(4n + 1)\pi}{2}\right],\end{aligned}$$

y así

$$\text{sen}^{-1}\sqrt{5} = \frac{(4n + 1)\pi}{2} \pm i\log_e\left(\sqrt{5} + 2\right)$$

para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ❑

## Coseno inverso y tangente inversa

Es fácil modificar el procedimiento que se utilizó en la página 193 para resolver las ecuaciones $\cos w = z$ y $\tan w = z$. Esto nos conduce a las definiciones del coseno inverso y de la tangente inversa, que ahora establecemos.

**Definición 4.4.2 Coseno inverso y tangente inversa**

La función multivaluada $\cos^{-1} z$ se define por:

$$\cos^{-1} z = -i \ln \left[ z + i \left(1 - z^2\right)^{1/2} \right] \tag{4}$$

se llama el **coseno inverso**. La función multivaluada $\tan^{-1} z$ se define por:

$$\tan^{-1} z = \frac{i}{2} \ln \left( \frac{i + z}{i - z} \right) \tag{5}$$

se llama la **tangente inversa**.

Tanto el coseno inverso como la tangente inversa son funciones multivaluadas ya que están definidas en términos del logaritmo complejo ln $z$. Como en el caso del seno inverso, la expresión $(1 - z^2)^{1/2}$ en (4) representa las dos raíces cuadradas del número complejo $1 - z^2$. Cada valor de $w = \cos^{-1} z$ satisface la ecuación $\cos w = z$, y, similarmente, todo valor de $w = \tan^{-1} z$ satisface la ecuación $\tan w = z$.

## Ramas y analiticidad

El seno inverso y el coseno inverso son funciones multivaluadas que se pueden hacer univaluadas especificando un único valor de la raíz cuadrada a utilizar en la expresión $(1 - z^2)^{1/2}$ y usando un único valor del logaritmo complejo en (3) o en (4). En cambio, la tangente inversa, se puede hacer univaluada con sólo especificar para su uso un único valor de ln $z$. Por ejemplo, podemos definir una función $f_1$ que le dé un valor al seno inverso usando la raíz cuadrada principal y el valor principal del logaritmo complejo en (3). Si, por ejemplo, $z = \sqrt{5}$ entonces la raíz cuadrada principal de $1 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = -4$ es $2i$, y

$$\text{Ln}\left(i\sqrt{5} + 2i\right) = \log_e \left(\sqrt{5} + 2\right) + \pi i/2.$$

identificando estos valores en (3) se obtiene:

$$f_1\left(\sqrt{5}\right) = \frac{\pi}{2} - i \log_e \left(\sqrt{5} + 2\right) \approx 1.5708 - 1.4436i.$$

Así, vemos que el valor de la función $f_1$ en $z = \sqrt{5}$ es el valor de $\text{sen}^{-1} \sqrt{5}$ asociada a $n = 0$ y la raíz cuadrada $2i$ del ejemplo 1.

Una rama de una función trigonométrica inversa multivaluada se puede obtener al elegir una rama de la función raíz cuadrada, y una rama del logaritmo complejo. Determinar el dominio de una rama definida de esta manera puede ser bastante engorroso. Debido a que este es un libro elemental, no vamos a analizar este tema más a fondo. Por otra parte, las derivadas de las ramas de las funciones trigonométricas inversas multivaluadas se encuentran fácilmente utilizando la derivación implícita. Para ver que esto sea así, supongamos que $f_1$ es una rama de la función multivaluada $F(z) = \text{sen}^{-1} z$. Si $w = f_1(z)$, entonces sabemos que $z = \text{sen}\, w$. Derivando ambos lados de esta última ecuación con respecto a $z$ y aplicando la regla de la cadena (6) de la sección 3.1, se obtiene:

$$1 = \cos w \cdot \frac{dw}{dz} \quad \text{o} \quad \frac{dw}{dz} = \frac{1}{\cos w}. \tag{6}$$

Ahora, de la identidad trigonométrica $\cos^2 w + \operatorname{sen}^2 w = 1$, tenemos que $\cos w = (1 - \operatorname{sen}^2 w)^{1/2}$, y ya que $z = \operatorname{sen} w$, se puede escribir como $\cos w = (1 - z^2)^{1/2}$. Por tanto, después de sustituir esta expresión de $\cos w$ en (6) obtenemos el siguiente resultado:

$$f_1'(z) = \frac{dw}{dz} = \frac{1}{(1-z^2)^{1/2}}.$$

Si hacemos que $\operatorname{sen}^{-1} z$ denote la rama $f_1$, entonces, esta fórmula se puede replantear de una manera menos engorrosa como:

$$\frac{d}{dz}\operatorname{sen}^{-1} z = \frac{1}{(1-z^2)^{1/2}}.$$

Sin embargo, debemos tener cuidado, al utilizar la misma rama de la función raíz cuadrada que define a $\operatorname{sen}^{-1} z$ cuando determinemos los valores de sus derivadas.

De manera similar, se puede encontrar las derivadas de las ramas del coseno inverso y de la tangente inversa. En las siguientes fórmulas, los símbolos $\operatorname{sen}^{-1} z$, $\cos^{-1} z$, y $\tan^{-1} z$ representan las ramas de las funciones multivaluadas correspondientes. Estas fórmulas para las derivadas valen sólo en los dominios de estas ramas.

***Derivadas de las ramas* $\operatorname{sen}^{-1} z$, $\cos^{-1} z$, y $\tan^{-1} z$**

$$\frac{d}{dz}\operatorname{sen}^{-1} z = \frac{1}{(1-z^2)^{1/2}} \tag{7}$$

$$\frac{d}{dz}\cos^{-1} z = \frac{-1}{(1-z^2)^{1/2}} \tag{8}$$

$$\frac{d}{dz}\tan^{-1} z = \frac{1}{1+z^2} \tag{9}$$

Cuando se encuentra el valor de una derivada con (7) o (8), debemos usar la misma raíz cuadrada que se utilizó para definir la rama. Estas fórmulas son similares a las de las derivadas de las funciones trigonométricas inversas reales. La diferencia entre las fórmulas reales y las complejas es la elección específica de una rama de la función raíz cuadrada necesaria para (7) y (8).

**EJEMPLO 2 Derivada de una rama del seno inverso**

Sea $\operatorname{sen}^{-1} z$ una rama del seno inverso obtenida al usar las ramas principales de la raíz cuadrada y del logaritmo definido por (7) de la sección 4.2 y por (19) de la sección 4.1, respectivamente. Determine la derivada de esta rama en $z = i$.

**Solución** Observamos de paso que esta rama es derivable en $z = i$, ya que $1 - i^2 = 2$ no está en la rama cortada de la rama principal de la función raíz

cuadrada, y ya que $i(i) + (1 - i^2)^{1/2} = -1 + \sqrt{2}$ no está en el corte de rama de la rama principal del logaritmo complejo. Por tanto, por (7) tenemos:

$$\frac{d}{dz}\operatorname{sen}^{-1} z\Big|_{z=i} = \frac{1}{(1-z^2)^{1/2}}\Big|_{z=i} = \frac{1}{(1-i^2)^{1/2}} = \frac{1}{2^{1/2}}.$$

Usando la rama principal de la raíz cuadrada, obtenemos $2^{1/2} = \sqrt{2}$. Por tanto, la derivada es $1/\sqrt{2}$ o $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. ❑

Observe que la rama del seno inverso que se utilizó en el ejemplo 2 no está definida en, por ejemplo, $z = \sqrt{5}$ ya que el punto $1 - (\sqrt{5})^2 = -4$ está en el corte de rama de la rama principal de la raíz cuadrada. Podemos definir una rama diferente del seno inverso que esté definida en este punto. Por ejemplo, considere la rama $f_2(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$, $0 < \theta < 2\pi$, de la función raíz cuadrada. Ya que $-4 = 4e^{i\pi}$, tenemos que $f_2(-4) = 2i$. Debe comprobar que si definimos $\operatorname{sen}^{-1} z$ como la rama del seno inverso obtenida usando la rama $f_2$ de la raíz cuadrada y la rama principal del logaritmo, entonces:

$$\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{5} = \frac{1}{2}\pi - i\log_e\left(\sqrt{5}+2\right) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dz}\operatorname{sen}^{-1} z\Big|_{z=\sqrt{5}} = -\frac{i}{2}.$$

**Funciones hiperbólicas inversas** El análisis anterior de las funciones trigonométricas inversas se puede repetir para las funciones hiperbólicas. Esto nos conduce a la definición de las funciones hiperbólicas inversas que se establecen a continuación. Una vez más, estas inversas se definen en términos del logaritmo complejo ya que las funciones hiperbólicas se definen en términos de la exponencial compleja.

**Definición 4.4.3 Seno, coseno y tangente hiperbólicos inversos**

Las funciones multivaluadas $\operatorname{senh}^{-1} z$, $\cosh^{-1} z$, y $\tanh^{-1} z$, se definen como:

$$\operatorname{senh}^{-1} z = \ln\left[z + (z^2+1)^{1/2}\right], \tag{10}$$

$$\cosh^{-1} z = \ln\left[z + (z^2-1)^{1/2}\right], \tag{11}$$

y

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \tag{12}$$

se llaman el **seno hiperbólico inverso**, el **coseno hiperbólico inverso**, y la **tangente hiperbólica inversa**, respectivamente.

Las expresiones (10) a la (12) de la definición 4.4.3 nos permiten resolver ecuaciones que involucran las funciones hiperbólicas complejas. En particular, si $w = \operatorname{senh}^{-1} z$, entonces $\operatorname{senh} w = z$, si $w = \cosh^{-1} z$, entonces $\cosh w = z$, y si $w = \tanh^{-1} z$, entonces $\tanh w = z$.

Las ramas de las funciones hiperbólicas inversas se definen eligiendo ramas de la raíz cuadrada y del logaritmo complejo, o, en el caso de la tangente hiperbólica inversa, con sólo elegir una rama del logaritmo complejo. La derivada de una rama se puede encontrar utilizando la derivación implícita. El resultado siguiente muestra las fórmulas para las derivadas de las ramas de las funciones hiperbólicas inversas. En estas fórmulas, los símbolos

$\operatorname{senh}^{-1} z$, $\cosh^{-1} z$, $\tanh^{-1} z$ representan las ramas de las correspondientes funciones multivaluadas inversas hiperbólicas.

***Derivadas de las ramas* senh$^{-1}$ *z*, cosh$^{-1}$ *z*, y tanh$^{-1}$ *z***

$$\frac{d}{dz}\operatorname{senh}^{-1} z = \frac{1}{(z^2+1)^{1/2}} \tag{13}$$

$$\frac{d}{dz}\cosh^{-1} z = \frac{1}{(z^2-1)^{1/2}} \tag{14}$$

$$\frac{d}{dz}\tanh^{-1} z = \frac{1}{1-z^2} \tag{15}$$

Al igual que con las funciones trigonométricas inversas, debemos tener cuidado en ser consistentes con el uso de las ramas cuando se evalúen las derivadas. Las fórmulas (13) a la (15) para las derivadas de las ramas de las funciones hiperbólicas inversas *complejas* son iguales a las fórmulas análogas para las derivadas de las funciones hiperbólicas inversas *reales* excepto por la elección de la rama que se necesita en (13) y (14).

## EJEMPLO 3 Coseno hiperbólico inverso

Sea que $\cosh^{-1} z$ represente la rama del coseno hiperbólico inverso obtenido al usar la rama $f_2(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$, $0 < \theta < 2\pi$, de la raíz cuadrada y la rama principal del logaritmo complejo. Determine los siguientes valores.

(**a**) $\cosh^{-1}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (**b**) $\left.\dfrac{d}{dz}\cosh^{-1} z\right|_{z=\sqrt{2}/2}$,

**Solución** (**a**) Para encontrar $\cosh^{-1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ utilizamos (11) con $z = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ y las ramas establecidas para la raíz cuadrada y el logaritmo. Cuando $z = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ tenemos que $z^2 - 1 = -\frac{1}{2}$. Ya que $-\frac{1}{2}$ tiene forma exponencial $\frac{1}{2}e^{i\pi}$, la raíz cuadrada dada por la rama $f_2$ es:

$$f_2\left(\frac{1}{2}e^{i\pi}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}}e^{i\pi/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}i = \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

El valor de nuestra rama del coseno inverso está dado por:

$$\cosh^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} = \ln\left[z + \left(z^2-1\right)^{1/2}\right] = \ln\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right],$$

donde tomamos el valor de la rama principal del logaritmo. Debido a que $\left|\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i\right| = 1$ y $\operatorname{Arg}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i\right) = \frac{1}{4}\pi$, la rama principal del logaritmo es $\log_e 1 + i\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{4}\pi i$. Por tanto,

$$\cosh^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}i.$$

(**b**) De (14) tenemos que:

$$\left.\frac{d}{dz}\cosh^{-1} z\right|_{z=\sqrt{2}/2} = \frac{1}{\left[\left(\sqrt{2}/2\right)^2 - 1\right]^{1/2}} = \frac{1}{(-1/2)^{1/2}}.$$

Figura 4.4.1 Una superficie de Riemann para $w = \text{sen}^{-1} z$

Después de usar $f_2$ para determinar la raíz cuadrada en esta expresión obtenemos:

$$\frac{d}{dz}\cosh^{-1} z\bigg|_{z=\sqrt{2}/2} = \frac{1}{\sqrt{2}i/2} = -\sqrt{2}i.$$

❑

## Observaciones

La función multivaluada $F(z) = \text{sen}^{-1} z$ se puede visualizar usando la superficie de Riemann construida para sen $z$ en las observaciones de la sección 4.3 y que se muestra en la figura 4.4.1. Para ver la imagen de un punto $z_0$ bajo el mapeo multivaluado $w = \text{sen}^{-1} z$, nos imaginamos que $z_0$ se encuentra en el plano $xy$ de la figura 4.4.1. Entonces consideramos todos los puntos de la superficie de Riemann que se encuentran directamente arriba de $z_0$. Cada uno de estos puntos de la superficie corresponde al único punto en uno de los cuadrados $S_n$ descritos en las observaciones de la sección 4.3. Por lo que, este conjunto infinito de puntos en la superficie de Riemann representa el número infinito de imágenes de $z_0$ bajo $w = \text{sen}^{-1} z$.

## EJERCICIOS 4.4

*Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-13.*

En los problemas 1 a 10 encuentre todos los valores de la cantidad dada.

1. $\cos^{-1} i$
2. $\text{sen}^{-1} 1$
3. $\text{sen}^{-1} \sqrt{2}$
4. $\cos^{-1} \frac{5}{3}$
5. $\tan^{-1} 1$
6. $\tan^{-1} 2i$
7. $\text{senh}^{-1} i$
8. $\cosh^{-1} \frac{1}{2}$
9. $\tanh^{-1}(1 + 2i)$
10. $\tanh^{-1} (\sqrt{2}i)$

En los problemas 11 a 16 utilice la rama establecida de la función multivaluada $z^{1/2}$ y la rama principal de ln $z$ para (**a**) determinar el valor de la función trigonométrica inversa o hiperbólica inversa en el punto dado y (**b**) calcular el valor de la derivada de la función en el punto dado.

11. $\text{sen}^{-1} z$, $z = \frac{1}{2}i$; utilice la rama principal de $z^{1/2}$
12. $\cos^{-1} z$, $z = \frac{5}{3}$; utilice la rama $\sqrt{r}e^{i\theta/2}$, $0 < \theta < 2\pi$, de $z^{1/2}$
13. $\tan^{-1} z$, $z = 1 + i$
14. $\text{senh}^{-1} z$, $z = 0$; utilice la rama principal de $z^{1/2}$
15. $\cosh^{-1} z$, $z = -i$; utilice la rama $\sqrt{r}e^{i\theta/2}$, $-2\pi < \theta < 0$, de $z^{1/2}$
16. $\tanh^{-1} z$, $z = 3i$

### Enfocando los conceptos

17. Deduzca la fórmula (4) para $\cos^{-1} z$ modificando el procedimiento utilizado para obtener la fórmula para arcoseno de la página 193.
18. Deduzca la fórmula (10) para $\text{senh}^{-1} z$ modificando el procedimiento utilizado para obtener la fórmula para arcoseno de la página 193.
19. Utilice la derivación implícita para obtener la fórmula (8) para la derivada de una rama del coseno inverso.

**20.** Utilice la derivación implícita para obtener la fórmula (12) para la derivada de una rama de la tangente hiperbólica inversa.

**21.** (a) Demuestre que sen $z$ es unívoca en el dominio definido por las desigualdades $-\pi/2 < x < \pi/2, -\infty < y < \infty$.

(b) ¿Cuál raíz cuadrada y cuál rama del logaritmo se debe utilizar para que el mapeo $w = \text{sen}^{-1} z$ tome el semiplano $\text{Im}(z) > 0$ sobre la región $-\pi/2 < u < \pi/2, v > 0$, es decir, tal que $w = \text{sen}^{-1} z$ es el mapeo inverso del mapeo del inciso (a)?

**22.** Demuestre las siguientes identidades.

(a) $\text{sen}^{-1}\left[(1-z^2)^{1/2}\right] = \cos^{-1}(\pm z)$

(b) $\text{sen}^{-1} z + \cos^{-1} z = \frac{1}{2}(4n+1)\pi,\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

## 4.5 Aplicaciones

En la sección 3.4, vimos el importante papel que las funciones armónicas juegan en los campos de la electrostática, del flujo de fluidos, de la gravitación y del flujo de calor. Con frecuencia ocurre el caso que, para resolver un problema aplicado en uno de estos campos tenemos que encontrar una función de $\phi(x, y)$, que sea armónica en un dominio $D$ y que tome valores especificados en la frontera de $D$. En esta sección veremos que el mapeo de las funciones analíticas con frecuencia puede ayudar a resolver este tipo de problemas.

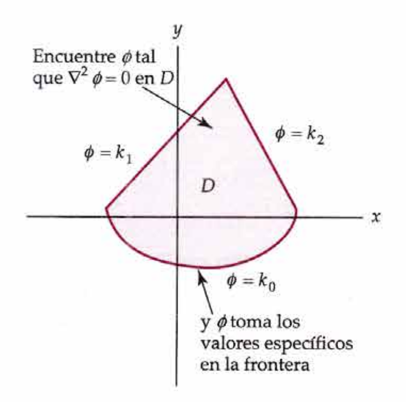



Figura 4.5.1 Problema de Dirichlet

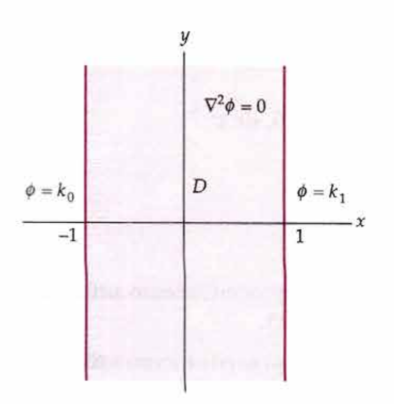



Figura 4.5.2 Problema de Dirichlet del ejemplo 2 de la sección 3.4

**Problemas de Dirichlet** Supongamos que $D$ es un dominio en el plano complejo. Recuerde de la sección 3.3 que una función de valor real $\phi$ de dos variables reales $x$, $y$ se llama armónica en $D$ si $\phi$ tiene primeras y segundas derivadas parciales continuas y si $\phi$ satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2\phi = 0$,

o
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

En la sección 3.4 hemos definido un **problema de Dirichlet** como el problema de encontrar una función $\phi(x, y)$ que es armónica en $D$ y que toma valores especificados en la frontera de $D$. Vea la figura 4.5.1. Las especificaciones de los valores de la función $\phi$ en la frontera de $D$ se llaman **condiciones de frontera**. Por ejemplo, considere el problema:

$$\textit{Resuelva:}\quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0, \quad -1 < x < 1, -\infty < y < \infty$$

$$\textit{Sujeto a:}\quad \phi(-1, y) = k_0, \quad \phi(1, y) = k_1, \quad -\infty < y < \infty,$$

donde $k_0$ y $k_1$ son constantes reales. Este es un problema de Dirichlet en el dominio $D$ acotado por las rectas verticales $x = -1$ y $x = 1$. Vea la figura 4.5.2. En el ejemplo 2 en la sección 3.4 utilizamos las técnicas elementales de las ecuaciones diferenciales para encontrar la solución

$$\phi(x, y) = \frac{k_1 - k_0}{2}x + \frac{k_1 + k_0}{2} \tag{2}$$

de este particular problema de Dirichlet. Debe leer nuevamente este ejemplo de la sección 3.4 para recordar cómo se encontró esta solución.

**Funciones armónicas y mapeos analíticos** En parte, el problema de Dirichlet representado en la figura 4.5.2 es relativamente fácil de resolver debido a la forma simple del dominio $D$. Las técnicas utilizadas para resolver este tipo de problema de Dirichlet en general, no se aplican a los problemas de Dirichlet con un dominio más complicado. Una función $f$ que es analítica en un dominio $D$ y que mapea a $D$ sobre un dominio $D'$ se llama un **mapeo analítico** de $D$ sobre $D'$. A menudo se presenta el caso de que un problema de Dirichlet en un dominio complicado $D$ se puede resolver encontrando un mapeo analítico de $D$ sobre un dominio $D'$ en el que el problema de Dirichlet asociado, o *transformado*, es más fácil de resolver. Esta técnica se presentará brevemente aquí y se hablará con más detalle en el capítulo 7. La clave de este método para resolver los problemas de Dirichlet es el siguiente teorema, que demuestra que la ecuación de Laplace es invariante bajo un mapeo analítico.

**Teorema 4.5.1 Función armónica bajo un mapeo analítico**

Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ un mapeo analítico de un dominio $D$ en el plano $z$ sobre un dominio $D'$ en el plano $w$. Si la función $\Phi(u, v)$ es armónica en $D'$, entonces la función $\phi(x, y) = \Phi(u(x, y), v(x, y))$ es armónica en $D$.

**Demostración** Para demostrar que la función $\phi(x, y)$ es armónica en $D$, tenemos que demostrar que $\phi(x, y)$ satisface la ecuación de Laplace (1) en $D$. Comenzamos por encontrar las derivadas parciales de $\phi(x, y)$ respecto a $x$. Ya que

$$\phi(x, y) = \Phi(u(x, y), v(x, y)),$$

con la regla de la cadena de la derivación parcial se obtiene:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Una segunda aplicación de la regla de la cadena junto con la regla del producto da la segunda derivada parcial con respecto a $x$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.\end{aligned} \tag{3}$$

De manera similar se encuentra la segunda derivada parcial con respecto a $y$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.\end{aligned} \tag{4}$$

Sumando las ecuaciones (3) y (4) se obtiene:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi = &\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}\left(\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right)\\ &+ \frac{\partial \Phi}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\\ &+ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right).\end{aligned} \tag{5}$$

Debido a que $f$ es una función analítica en $D$, sabemos por el teorema 3.2.1, que se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann dadas por $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Además, del teorema 3.3.1 tenemos que $u$ y $v$ son conjugadas armónicas en $D$ y, por tanto, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ y $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$. Por tanto, (5) se convierte en:

$$\begin{aligned} \nabla^2\phi &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}\left(\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) \\ &= \nabla^2\Phi\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Usando (9) de la sección 3.2, vemos que $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(z)|^2$, y por tanto esta ecuación para $\nabla^2\phi$ se simplifica en la siguiente ecuación

$$\nabla^2\phi = \nabla^2\Phi \cdot |f'(z)|^2 \tag{6}$$

Puesto que $\Phi(u, v)$ es armónica en $D'$, $\nabla^2\Phi = 0$, (6) se convierte en

$$\nabla^2\phi = 0 \cdot |f'(z)|^2 = 0. \tag{7}$$

Por último, de (7) se concluye que $\Phi(x, y)$ satisface la ecuación de Laplace en $D$. Por tanto, la función $\phi(x, y)$ es armónica en $D$. ❑

**Un método para resolver problemas de Dirichlet** Ahora presentamos un método para resolver problemas utilizando el teorema de Dirichlet 4.5.1. Sea $D$ un dominio, cuya frontera está formada por las curvas $C_1$, $C_2$, … , $C_n$. Supongamos que deseamos encontrar una función $\phi(x, y)$ que es armónica en $D$ y que toma los valores $k_1, k_2, \ldots, k_n$ en las curvas frontera $C_1, C_2, \ldots, C_n$, respectivamente. Nuestro método para resolver un problema consiste en los siguientes cuatro pasos.

### *Pasos para resolver un problema de Dirichlet*

1. *Encuentre una función analítica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ que mapea el dominio D en el plano z sobre un dominio simple $D'$ en el plano w y que mapea las curvas frontera $C_1, C_2, \ldots, C_n$, sobre las curvas $C'_1, C'_2, \ldots, C'_n$. respectivamente.*
2. *Transforme las condiciones de frontera en $C_1, C_2, \ldots, C_n$, a las condiciones de frontera en $C'_1, C'_2, \ldots, C'_n$.*
3. *Resuelva este nuevo (y más fácil) problema de Dirichlet en $D'$ para obtener una función armónica $\Phi(u, v)$.*
4. *Sustituya las partes real e imaginaria $u(x, y)$ y $v(x, y)$ de f para las variables u y v en $\Phi(u, v)$. Por el teorema 4.5.1, la función $\phi(x, y) = \Phi(u(x,y), v(x,y))$ es una solución para el problema de Dirichlet en D.*

Se ilustra la idea general de estos pasos en la figura 4.5.3.

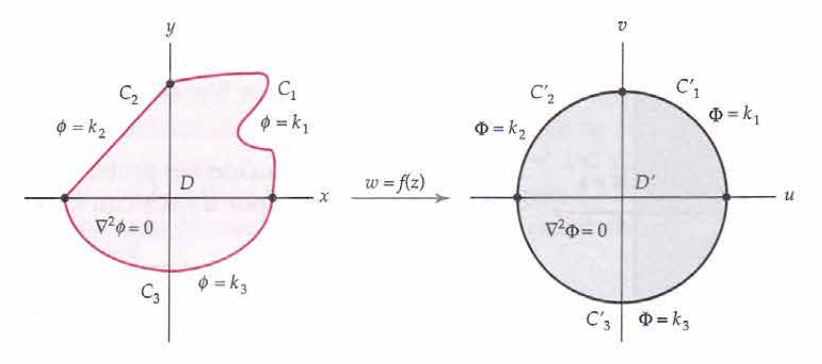



Figura 4.5.3 Transformación de un problema de Dirichlet

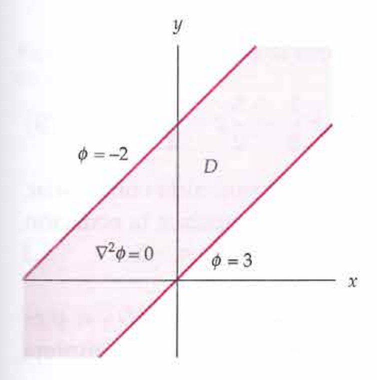



Figura 4.5.4 Figura del ejemplo 1

## EJEMPLO 1 Uso de mapeos para resolver un problema de Dirichlet

Sea $D$ el dominio en el plano $z$ delimitado por las rectas $y = x$ y $y = x + 2$ que se muestran a color en la figura 4.5.4. Determine una función $\phi(x, y)$ que sea armónica en $D$ y que satisfaga las condiciones de frontera $\phi(x, x + 2) = -2$ y $\phi(x, x) = 3$.

**Solución** Este problema se resolverá con los cuatro pasos que se indican en la página 202.

**Paso 1** El examen del dominio $D$ en la figura 4.5.4 sugiere que tomamos $D'$ como un dominio acotado por las rectas $u = -1$ y $u = 1$ en el que se da una solución del problema asociado de Dirichlet dado por (2).

Nuestro primer paso es encontrar un mapeo analítico de $D$ sobre $D'$. Para hacerlo, primero giramos la región $D$ a través de $\pi/4$ radianes en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor del origen. Bajo esta rotación, las rectas frontera $y = x + 2$ y $y = x$ se mapean sobre las rectas verticales $u = -\sqrt{2}$ y $u = 0$, respectivamente. Si después ampliamos este dominio en un factor de $\sqrt{2}$, se obtiene un dominio acotado por las rectas $u = -2$ y $u = 0$. Por último, trasladamos esta imagen por 1 para obtener un dominio acotado por las rectas $u = 1$ y $u = -1$ como se desee. Recuerde de la sección 2.3 que la rotación de $\pi/4$ radianes alrededor del origen está dada por el mapeo $R(z) = e^{i\pi/4}$, la ampliación por $\sqrt{2}$ está dada por $M(z) = \sqrt{2}z$, y la traslación por 1 está dada por el mapeo $T(z) = z + 1$. Por tanto, el dominio $D$ se proyecta sobre el dominio $D'$ por la composición

$$f(z) = T(M(R(z))) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}z + 1 = (1 + i)z + 1.$$

Dado que la función $f$ es una función lineal, es entera, y así hemos completado el paso 1.

**Paso 2** Ahora transformamos las condiciones de frontera en $D$ a las condiciones frontera en $D'$. Para esto, debemos encontrar las imágenes bajo $w = f(z)$ de las rectas frontera $y = x$ y $y = x + 2$ de $D$. Sustituyendo el símbolo $z$ con $x + iy$, podemos expresar el mapeo $w = (1 + i)z + 1$ como:

$$w = (1 + i)(x + iy) + 1 = x - y + 1 + (x + y)i. \tag{8}$$

De (8) encontramos con que la imagen de la recta frontera $y = x + 2$ es el conjunto de puntos:

$$w = u + iv = x - (x + 2) + 1 + (x + (x + 2))i = -1 + 2(x + 1)i$$

que es la recta $u = -1$. De manera similar, también encontramos que la imagen de la recta frontera $y = x$ es el conjunto de puntos:

$$w = u + iv = x - (x) + 1 + (x + (x))i = 1 + 2xi$$

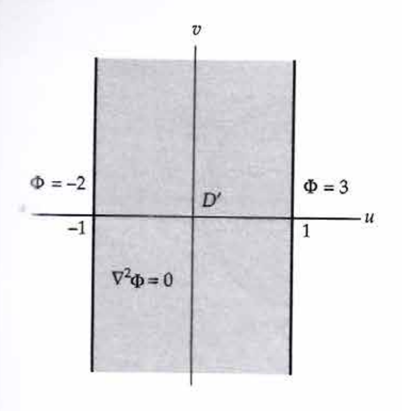



Figura 4.5.5 El problema de Dirichlet transformado del ejemplo 1

que es la recta $u = 1$. Por tanto, la condición de frontera $\phi(x, x + 2) = -2$ se transforma en la condición frontera $\Phi(-1, v) = -2$, y la condición de frontera $\phi(x, x) = 3$ se transforma en la condición de frontera $\Phi(1, v) = 3$. Vea la figura 4.5.5.

**Paso 3** Una solución del problema de Dirichlet en $D'$ está dada por (2) con $x$ y $y$ sustituidos por $u$ y $v$, y con $k_0 = -2$ y $k_1 = 3$:

$$\Phi(u, v) = \frac{3 - (-2)}{2}u + \frac{-2 + 3}{2} = \frac{5}{2}u + \frac{1}{2}.$$

**Paso 4** El paso final en nuestra solución es sustituir las partes real e imaginaria de $f$ en $\Phi$ para la variables $u$ y $v$ para obtener la solución deseada $\phi$. De (8) vemos que las partes real e imaginaria de $f$ son:

$$u(x, y) = x - y + 1 \quad \text{y} \quad v(x, y) = x + y,$$

respectivamente, y así la función:

$$\phi(x, y) = \Phi(u(x, y), v(x, y)) = \frac{5}{2}(x - y + 1) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}y + 3 \qquad (9)$$

es una solución del problema de Dirichlet en $D$. Se le recomienda comprobar, mediante el cálculo directo que la función $\phi$ dada en (9) satisface la ecuación de Laplace y las condiciones frontera $\phi(x, x) = 3$ y $\phi(x, x + 2) = -2$. ❑

En la sección 3.4, vimos que si $\phi$ es armónica en un dominio $D$ y si $\psi$ es armónica conjugada de $\phi$ en $D$, entonces la **función de potencial compleja** $\Omega(z)$ dada por:

$$\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

es una función analítica en $D$. Las curvas de nivel de $\phi$ y $\psi$ forman una familia ortogonal de curvas como se define en la sección 3.4, y el significado físico de estas curvas se resume en la tabla 3.4.1 de la página 152. Por ejemplo, si la función $\phi$ del ejemplo 1 representa el potencial electrostático entre dos placas conductoras infinitamente largas, entonces las curvas de nivel $\phi(x, y) = \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}y + 3 = c_1$ representan las curvas de potencial. Estas curvas equipotenciales, que son rectas con pendiente 1, se muestran a color en la figura 4.5.6.

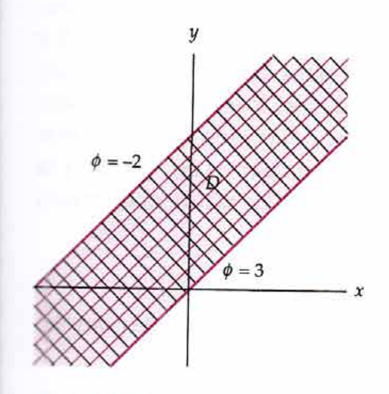



Figura 4.5.6 Curvas equipotenciales y líneas de fuerza del ejemplo 1

Este es un cálculo sencillo para encontrar una función armónica conjugada $\Psi(u, v) = \frac{5}{2}v$ de $\Phi(u, v) = \frac{5}{2}u + \frac{1}{2}$ y forma la función de potencial compleja $\Omega(w) = \frac{5}{2}w + \frac{1}{2}$ del problema de Dirichlet en $D'$ para el ejemplo 1. Por tanto, una función de potencial compleja para el problema de Dirichlet en $D$ se encuentra sustituyendo el símbolo $w$ por el mapeo analítico $w = (1 + i)z + 1$:

$$\Omega(z) = \frac{5}{2}[(1 + i)z + 1] + \frac{1}{2} = \left(\frac{5}{2} + \frac{5}{2}i\right)z + 3.$$

Por tanto, una conjugada armónica de $\phi$ es $\psi(x, y) = \text{Im}(\Omega(z)) = \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}y$. Si $\phi$ es el potencial electrostático, entonces las curvas de nivel $\psi(x, y) = \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}y = c_2$ representan las líneas de fuerza. Estas líneas de fuerza, que son segmentos de recta con pendiente $-1$, se muestran en negro en la figura 4.5.6.

El método usado en el ejemplo 1 se puede generalizar para resolver un problema de Dirichlet en cualquier dominio $D$ limitado por dos rectas paralelas. La clave para resolver este problema es encontrar una función lineal apropiada que mapee las rectas frontera de $D$ sobre las rectas frontera del dominio que se muestra en la figura 4.5.2. Vea los problemas 1 al 4 de los ejercicios 4.5.

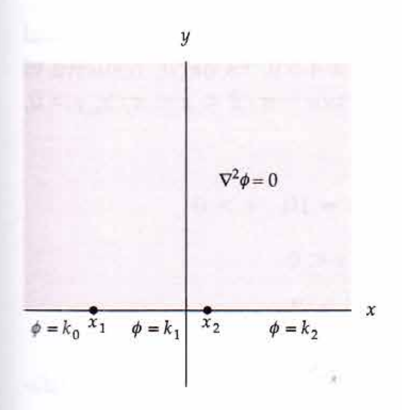



Figura 4.5.7 Un problema de Dirichlet en el semiplano $y > 0$

**Problema de Dirichlet en un semiplano** Sea $D$ el semiplano superior $y > 0$, y sean $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ $n$ puntos distintos en el eje real (que es la frontera de $D$). Para muchas aplicaciones, es útil conocer una solución $\phi$, del problema de Dirichlet en $D$ que satisface las condiciones de frontera $\phi(x, 0) = k_0$ para $x < x_1$, $\phi(x, 0) = k_1$ para $x_1 < x < x_2$, $\phi(x, 0) = k_2$ para $x_2 < x < x_3, \ldots, \phi(x, 0) = k_n$ para $x_n < x$. Vea la figura 4.5.7. Si $z = x + iy$, entonces una solución de este problema de Dirichlet está dada por:

$$\phi(x, y) = k_n + \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n}(k_{j-1} - k_j)\operatorname{Arg}(z - x_j). \tag{10}$$

La deducción de esta solución se analizará en la sección 7.4. Como una aplicación de (10), considere el problema de Dirichlet:

$$\textit{Resuelva: } \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty,\ y > 0.$$

$$\textit{Sujeto a: } \phi(x, 0) = \begin{cases} -1, & -\infty < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 2 \\ 4, & 2 < x < \infty. \end{cases}$$

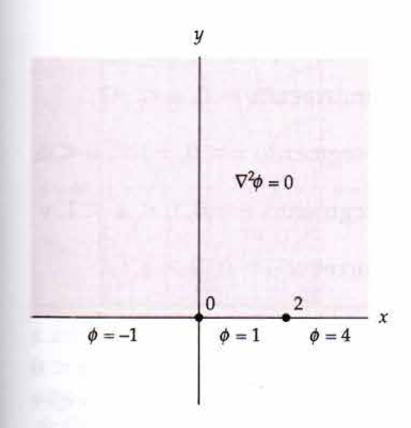



Figura 4.5.8 Un problema de Dirichlet en el semiplano $y > 0$

Vea la figura 4.5.8. Una solución de este problema está dada por (10) con $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $k_0 = -1$, $k_1 = 1$ y $k_2 = 4$:

$$\phi(x, y) = 4 - \frac{2}{\pi}\operatorname{Arg}(z) - \frac{3}{\pi}\operatorname{Arg}(z - 2). \tag{11}$$

Ahora directamente comprobamos que la función $\phi(x, y)$ en (11) es una solución de este problema de Dirichlet. Para ver que es $\phi$ armónica en el dominio $y > 0$, observamos que $\phi$ es la parte real de la función

$$\Omega(z) = 4 + (2i/\pi)\operatorname{Ln}(z) + (3i/\pi)\operatorname{Ln}(z - 2).$$

Ya que $\Omega$ es analítica en el dominio $y > 0$, se deduce que $\phi$ es armónica en el dominio $y > 0$. Ahora comprobaremos que $\phi$ satisface las condiciones de frontera que se muestran en la figura 4.5.8. Si $-\infty < x < 0$ y $y = 0$, entonces $z = x + iy$ está en el eje real negativo y así $\operatorname{Arg}(z) = \pi$. En este caso, también tenemos que $z - 2$ está en el eje real negativo y así $\operatorname{Arg}(z - 2) = \pi$ también. Sustituyendo estos valores en (11) da como resultado:

$$\phi(x, 0) = 4 - \frac{2}{\pi}\pi - \frac{3}{\pi}\pi = -1.$$

Por otro lado, si $0 < x < 2$ y $y = 0$, entonces $z$ está en el eje real positivo, mientras que $z - 2$ está en el eje real negativo. Por tanto, $\operatorname{Arg}(z) = 0$ y $\operatorname{Arg}(z - 2) = \pi$. Después de sustituir estos valores en (11) vemos que:

$$\phi(x, 0) = 4 - \frac{2}{\pi}0 - \frac{3}{\pi}\pi = 1.$$

Por último, si $2 < x < \infty$ y $y = 0$, entonces $z$ y $z - 2$ están en el eje real positivo, y así $\operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arg}(z - 2) = 0$. Por tanto,

$$\phi(x, 0) = 4 - \frac{2}{\pi}0 - \frac{3}{\pi}0 = 4.$$

Por tanto, hemos demostrado que la función $\phi$ en (11) es una solución del problema de Dirichlet que se muestra en la figura 4.5.8 como se enunció.

## EJEMPLO 2 Una aplicación de flujo de calor

Encuentre la temperatura en estado estable $\phi(x, y)$ en la franja vertical semi-infinita que se muestra a color en la figura 4.5.9. Es decir, resuelva el problema de Dirichlet en el dominio $D$ definido por $-\pi/2 < x < \pi/2$, $y > 0$, donde las condiciones de frontera son:

$$\phi(-\pi/2, y) = 40, \quad \phi(\pi/2, y) = 10, \quad y > 0$$

$$\phi(x, 0) = \begin{cases} 20, & -\pi/2 < x < 0 \\ 50, & 0 < x < \pi/2. \end{cases}$$

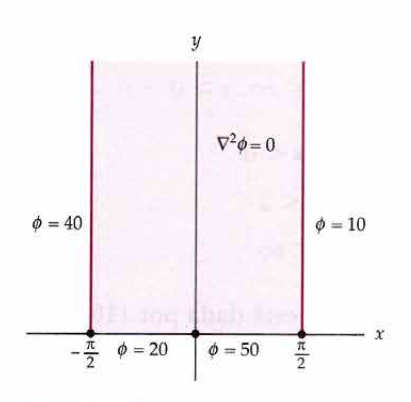



**Figura 4.5.9** Figura para el ejemplo 2

**Solución** De la sección 3.4, la temperatura de estado estable $\phi$ debe satisfacer la ecuación de Laplace (1) en $D$. Se procede como en el ejemplo 1.

**Paso 1** En la sección 4.3, vimos que el mapeo $w = \text{sen}\, z$ toma el dominio $D$ sobre el semiplano superior $D'$ dado por $v > 0$. Vea el ejemplo 3 de la sección 4.3. Ya que el sen $z$ es una función entera, $w = \text{sen}\, z$ es un mapeo analítico de $D$ sobre $D'$.

**Paso 2** En el ejemplo 3 en la sección 4.3 tenemos que $w = \text{sen}\, z$ mapea:

($i$) la semirrecta $x = -\pi/2$, $y > 0$, sobre la semirrecta $v = 0$, $u < -1$,

($ii$) el segmento $y = 0$, $-\pi/2 < x < 0$ sobre el segmento $v = 0$, $-1 < u < 0$,

($iii$) el segmento $y = 0$, $0 < x < \pi/2$ sobre el segmento $v = 0$, $0 < u < 1$, y

($iv$) la semirrecta $x = \pi/2$, $y > 0$, sobre la semirrecta $v = 0$, $u > 1$.

Esto transforma el problema de Dirichlet en el dominio $D$ que se muestra a color en la figura 4.5.9 sobre el problema de Dirichlet en el semiplano $v < 0$ que se muestra en gris en la figura 4.5.10. Es decir, el problema de Dirichlet transformado es:

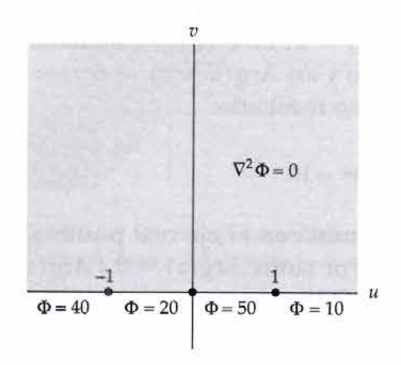



**Figura 4.5.10** Problema de Dirichlet transformado para el ejemplo 2

$$\textit{Resuelva:}\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} = 0$$

$$\textit{Sujeto a:}\ \phi(u, 0) = \begin{cases} 40, & -\infty < u < -1 \\ 20, & -1 < u < 0 \\ 50, & 0 < u < 1 \\ 10, & 1 < u < \infty. \end{cases}$$

**Paso 3** Una solución del problema de Dirichlet transformado en el paso 2 está dada por (10) con los símbolos $x$, $y$, y $z$ sustituidos por $u$, $v$, y $w$, respectivamente. Haciendo $k_0 = 40$, $k_1 = 20$, $k_2 = 50$, $k_3 = 10$, $u_1 = -1$, $u_2 = 0$, y $u_3 = 1$, se obtiene:

$$\Phi(u, v) = 10 + \frac{20}{\pi}\text{Arg}\,(w + 1) - \frac{30}{\pi}\text{Arg}\,(w) + \frac{40}{\pi}\text{Arg}\,(w - 1). \qquad (12)$$

**Paso 4** Una solución $\phi$ del problema de Dirichlet en el dominio $D$ se encuentra reemplazando las variables $u$ y $v$ en (12) con las partes real e imaginaria de la función analítica $f(z) = \operatorname{sen} z$. Esto es equivalente a sustituir a $w$ con sen $z$ en (12):

$$\phi(x, y) = 10 + \frac{20}{\pi}\operatorname{Arg}(\operatorname{sen} z + 1) - \frac{30}{\pi}\operatorname{Arg}(\operatorname{sen} z) + \frac{40}{\pi}\operatorname{Arg}(\operatorname{sen} z - 1). \quad (13)$$

Si lo desea, la función $\phi$ se puede escribir en términos de $x$ y $y$, a condición de que seamos cuidadosos con el uso de la función arcotangente real. En particular, *si los valores del arcotangente se eligen entre 0 y* $\pi$, entonces la función $\phi$ en (13) se puede escribir como:

$$\phi(x, y) = 10 + \frac{20}{\pi}\arctan\left(\frac{\cos x \operatorname{senh} y}{\operatorname{sen} x \cosh y + 1}\right) - \frac{30}{\pi}\arctan\left(\frac{\cos x \operatorname{senh} y}{\operatorname{sen} x \cosh y}\right) + \frac{40}{\pi}\arctan\left(\frac{\cos x \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x \cosh y - 1}\right).$$

❑

Observe que la función

$$\Omega(z) = 10 - \frac{20i}{\pi}\operatorname{Ln}(\operatorname{sen} z + 1) + \frac{30i}{\pi}\operatorname{Ln}(\operatorname{sen} z) - \frac{40i}{\pi}\operatorname{Ln}(\operatorname{sen} z - 1)$$

es analítica en el dominio $D$ dado por $-\pi/2 < x < \pi/2$, $y > 0$, que se muestra a color en la figura 4.5.9. Ya que la parte real de $\Omega(z)$ es la función $\phi$ dada por (13), la parte imaginaria $\psi$ de $\Omega(z)$ es la armónica conjugada de $\phi$. Por tanto, $\Omega(z)$ es una función de potencial compleja de la función $\phi$ del ejemplo 2. En los problemas de flujo de calor, las curvas de nivel de temperatura de estado estable $\phi$ se llaman isotermas, mientras que las curvas de nivel de su armónica conjugada $\psi$ se llaman líneas de flujo de calor. En la figura 4.5.11 hemos dibujado las curvas de nivel para el problema de flujo de calor del ejemplo 2. Las isotermas son las curvas que se muestran a color y las líneas de flujo de calor son las curvas que se muestran en negro.

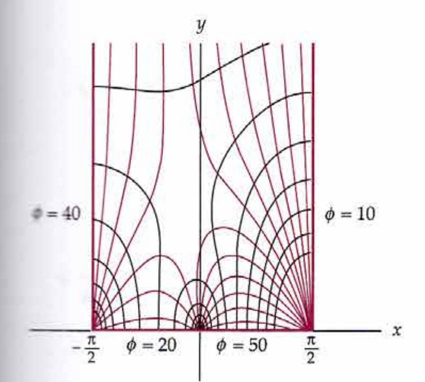



**Figura 4.5.11** Las isotermas y las líneas de flujo de calor para el ejemplo 2

## EJERCICIOS 4.5

*Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-13.*

En los problemas 1 a 4, (**a**) utilice un mapeo lineal y (2) para encontrar el potencial electrostático $\phi(x, y)$ en el dominio $D$ que satisface las condiciones de frontera dadas, (**b**) determine una función de potencial compleja $\Omega(z)$ para $\phi(x, y)$, y (**c**) dibuje las curvas equipotenciales y las líneas de fuerza.

1. El dominio $D$ está acotado por las rectas $x = 2$ y $x = 7$, y las condiciones de frontera son $\phi(2, y) = 3$ y $\phi(7, y) = -2$.
2. El dominio $D$ está acotado por las rectas $y = 0$ y $y = 3$, y las condiciones de frontera son $\phi(x, 0) = 1$ y $\phi(x, 3) = 2$.
3. El dominio $D$ está acotado por las rectas $y = \sqrt{3}x$ y $y = \sqrt{3}x + 4$, y las condiciones de frontera son $\phi(x, \sqrt{3}x) = 10$ y $\phi(x, \sqrt{3}x + 4) = 5$.
4. El dominio $D$ está acotado por las rectas $y = x + 2$ y $y = x + 4$, y las condiciones de frontera son $\phi(x, x + 2) = -4$ y $\phi(x, x + 4) = 5$.

En los problemas 5 a 8, (**a**) use el mapeo analítico $w = \operatorname{sen} z$ y, si es necesario, mapeos lineales, junto con (10) para encontrar la temperatura en estado estable $\phi(x, y)$ en

el dominio $D$ que satisface las condiciones de frontera dadas, y (**b**) determine una función de potencial compleja $\Omega(z)$ para $\phi(x, y)$.

**5.** El dominio $D$ está dado por $\pi/2 < x < 3\pi/2$, $y > 0$, y las condiciones de frontera son $\phi(\pi/2, y) = 20$, $\phi(x, 0) = -13$, y $\phi(3\pi/2, y) = 12$.

**6.** El dominio $D$ está acotado por $-3 < x < 3$, $y > 1$, y las condiciones de frontera son $\phi(-3, y) = 1$, $\phi(x, 1) = 3$, y $\phi(3, y) = 5$.

**7.** El dominio $D$ está acotado por $-\pi/2 < y < \pi/2$, $x > 0$, y las condiciones de frontera son $\phi(x, -\pi/2) = 15$, $\phi(0, y) = 32$, y $\phi(x, \pi/2) = 23$.

**8.** El dominio $D$ está acotado por las rectas $y = x + 2$, $y = x - 2$, $y = -x$. En $D$ los puntos $z = x + iy$ satisfacen $y \geq -x$. Las condiciones de frontera son $\phi(x, x + 2) = 10$, $\phi(x, -x) = 7$, y $\phi(x, x - 2) = 5$.

## Enfocando los conceptos

**9.** Utilice el mapeo analítico $w = z^2$ y (10) para resolver el problema de Dirichlet que se muestra en la figura 4.5.12. Determine una función de potencial compleja $\Omega(z)$ para $\phi(x, y)$.

**10.** Utilice el mapeo analítico $w = z^4$ y (10) para resolver el problema de Dirichlet que se muestra en la figura 4.5.13. Determine una función de potencial compleja $\Omega(z)$ para $\phi(x, y)$.

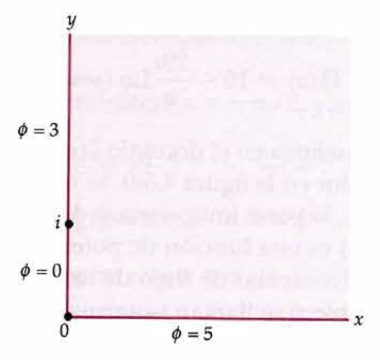



**Figura 4.5.12** Figura para el problema 9

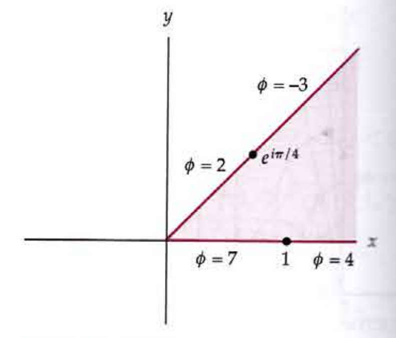
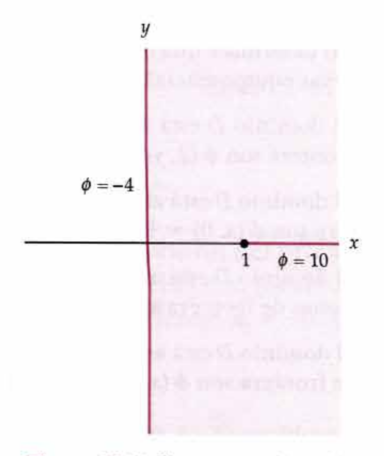



**Figura 4.5.13** Figura para el problema 10

**11.** Utilice el mapeo analítico $w = \text{sen}^{-1} z$ y (2) para resolver el problema de Dirichlet que se muestra en la figura 4.5.14. Encuentre la función de potencial compleja $\Omega(z)$ para $\phi(x, y)$.

**12.** Utilice el mapeo analítico $w = z + \dfrac{1}{z}$ y (10) para resolver el problema de Dirichlet que se muestra en la figura 4.5.15. Determine una función de potencial compleja $\Omega(z)$ para $\phi(x, y)$.



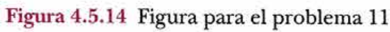


**Figura 4.5.14** Figura para el problema 11

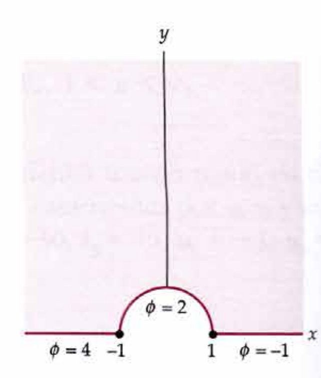



**Figura 4.5.15** Figura para el problema 12

## Tareas del laboratorio de cómputo

En los problemas 13 a 16 utilice un SAC para trazar las isotermas y las líneas de flujo de calor para el flujo de calor emitido.

**13.** El flujo de calor del problema 5.

**14.** El flujo de calor del problema 6.

**15.** El flujo de calor del problema 7.

**16.** El flujo de calor del problema 8.

En los problemas 17 a 20 utilice un SAC para trazar las curvas de nivel $\phi = c_1$ y $\psi = c_2$ de la función de potencial compleja dada $\Omega(z)$.

**17.** $\Omega(z)$ es la función de potencial compleja del problema 9.

**18.** $\Omega(z)$ es la función de potencial compleja del problema 10.

**19.** $\Omega(z)$ es la función de potencial compleja del problema 11.

**20.** $\Omega(z)$ es la función de potencial compleja del problema 12.

## CAPÍTULO 4 PREGUNTAS DE REPASO

*Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-13.*

En los problemas 1 a 20 responda verdadero o falso. Si el enunciado es falso, justifique su respuesta ya sea explicando por qué es falso o dando un contraejemplo: si el enunciado es verdadero, justifique su respuesta, ya sea demostrando el enunciado o citando un resultado apropiado de este capítulo.

**1.** Si $|e^z| = 1$, entonces $z$ es un número imaginario puro.

**2.** $\text{Re}(e^z) = \cos y$.

**3.** El mapeo $w = e^z$ mapea rectas verticales en el plano $z$ sobre rectas horizontales en el plano $w$.

**4.** Hay infinitas soluciones $z$ a la ecuación $e^z = w$.

**5.** $\ln i = \frac{1}{2}\pi i$.

**6.** $\text{Im}(\ln z) = \arg(z)$.

**7.** Para todos los complejos distintos de cero $z$, $e^{\text{Ln}\, z} = z$.

**8.** Si $w_1$ y $w_2$ son dos valores de $\ln z$, entonces $\text{Re}(w_1) = \text{Re}(w_2)$.

**9.** $\text{Ln}\,\dfrac{1}{z} = -\text{Ln}\, z$ para todo $z$ distinto de cero.

**10.** Para todos los números complejos distintos de cero, $\text{Ln}(z_1z_2) = \text{Ln}\, z_1 + \text{Ln}\, z_2$.

**11.** $\text{Ln}\, z$ es una función entera.

**12.** El valor principal de $i^{i+1}$ es $e^{-\pi/2+i}$.

**13.** La potencia compleja $z^\alpha$ es siempre multivaluada.

**14.** $\cos z$ es una función periódica con un periodo de $2\pi$.

**15.** Existen complejos $z$ tales que $|\text{sen}\, z| > 1$.

**16.** $\tan z$ tiene singularidades en $z = (2n + 1)\pi/2$, para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**17.** $\cosh z = \cos (iz)$.

**18.** $z = \frac{1}{2}\pi i$ es cero de $\cosh z$.

**19.** La función sen $\bar{z}$ no es analítica en ningún punto.

**20.** Cada rama de $\tan^{-1} z$ es entera.

En los problemas 21 a 40 trate de llenar los espacios en blanco, sin consultar el texto.

**21.** Las partes real e imaginaria de $e^z$ son $u(x, y)$ = ______________ y $v(x, y)$ = ______________.

**22.** El dominio de la Ln $z$ es ______________, y su rango es __________.

**23.** $\text{Ln}(\sqrt{3} + i)$ = __________.

**24.** La función exponencial compleja $e^z$ es periódica con un periodo de __________.

**25.** Si $e^{iz} = 2$, entonces $z$ = __________.

**26.** $\text{Ln}(e^{1-\pi i})$ = __________.

**27.** Ln $z$ es discontinua en __________.

**28.** El segmento de recta $x = a$, $-\pi < y \leq \pi$, se mapea sobre __________ con el mapeo $w = e^z$.

**29.** $\ln(1 + i)$ = __________.

**30.** Si ln $z$ es imaginario puro, entonces $|z|$ = __________.

**31.** $z_1 = 1$ y $z_2$ = ____________ son dos números reales para los que el valor principal $z^i = 1$.

**32.** El valor principal de $i^i$ es __________.

**33.** En el dominio $|z| > 0$, $-\pi < \arg(z) < \pi$, la derivada del valor principal de $z^\alpha$ es __________.

**34.** La función seno complejo se define por el sen $z$ = __________.

**35.** $\cos(4i)$ = __________.

**36.** La franja vertical semi-infinita $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, $y \geq 0$, se mapea sobre ___________ con $w$ = sen $z$.

**37.** Las partes real e imaginaria de sen $z$ son ________ y ________ respectivamente.

**38.** El seno complejo y la función seno hiperbólico están relacionados con las fórmulas sen$(iz)$ = __________ y senh $(iz)$ = __________.

**39.** $\tanh^{-1} z$ no está definida para $z$ = __________.

**40.** Para calcular un valor específico de $\text{sen}^{-1} z$ necesita elegir una rama de ______ y una rama de __________.

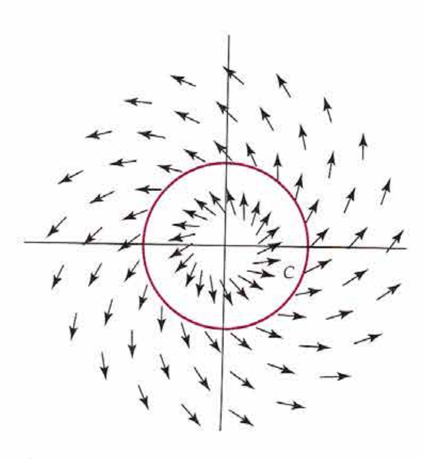
CAPÍTULO

5

# Integración en el plano complejo

## Contenido del capítulo






Campo vectorial de velocidades normalizadas de $f(z) = (1 + i)z$. Vea la página 264.

**Introducción** Para definir una integral de una función compleja $f$, partimos de una función compleja $f$ definida a lo largo de cierta curva $C$ o contorno en el plano complejo. Veremos en esta sección que la definición de una integral compleja, sus propiedades y método de evaluación son muy similares a los de una integral real de línea en el plano cartesiano.

## 5.1 Integrales reales

***Para el profesor*:** En esta sección presentamos un repaso de las definiciones y métodos de evaluación de la integral definida y de las integrales de línea en el plano. En nuestra experiencia hemos encontrado que un nuevo examen de este material contribuye a una introducción más suave a la integración compleja. Puede, por supuesto, saltarse esta sección e ir directamente a las integrales de contorno complejas si piensa que sus estudiantes tienen una familiaridad adecuada con estos conceptos. Sin embargo, la terminología de curvas en el plano introducida en esta sección se usará en la siguiente.

**Integral definida** Es probable que usted ha conservado al menos dos asociaciones de sus estudios de cálculo elemental: la derivada con la pendiente, y la integral definida con el área. Pero así como la derivada $f'(x)$ de una función real $y = f(x)$ tiene otros usos además de encontrar pendientes de rectas tangentes, también el valor de una integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ no tiene que ser el área "bajo una curva". Recuerde, si $F(x)$ es una antiderivada de una función continua $f$, es decir, $F$ es una función para la que $F'(x) = f(x)$, entonces la integral definida de $f$ en el intervalo $[a, b]$ es el número

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{1}$$

Por ejemplo, $\int_{-1}^{2} x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{2} = \frac{8}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = 3$. No olvide que el **teorema fundamental del cálculo**, que acabamos de dar en (1), es un método de *evaluación* de $\int_a^b f(x)\,dx$; no es la *definición* de $\int_a^b f(x)\,dx$.

En el análisis que sigue se presentan las definiciones de los dos tipos de **integrales reales**. Comenzamos con los cinco pasos que conducen a la definición de la integral definida (o de Riemann) de una función $f$, seguimos con la definición de las integrales de línea en el plano cartesiano. Ambas definiciones tienen sus bases en el concepto de límite.

### *Pasos que conducen a la definición de la integral definida*

1. *Sea $f$ una función de una sola variable $x$ definida en todos los puntos en un intervalo cerrado $[a, b]$.*

2. *Sea $P$ una partición:*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

*de $[a, b]$ en $n$ subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, de longitud $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Vea la figura 5.1.1.*

3. *Sea $\|P\|$ la **norma** de la partición $P$ de $[a, b]$, es decir, el subintervalo de mayor longitud en la participación.*

4. *Se elige un número $x_k^*$ en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ de $[a, b]$. Vea la figura 5.1.1.*

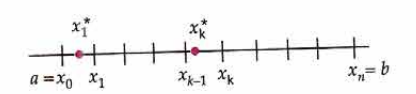



**Figura 5.1.1** Partición de $[a, b]$ con $x^*_k$ en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$

5. *Se forman n productos* $f(x_k^*)\Delta x_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *y la suma de estos productos*

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x_k.$$

**Definición 5.1.1 Integral definida**

La **integral definida** de $f$ en $[a, b]$ es

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x_k. \tag{2}$$

Si el límite en (2) existe decimos que $f$ es **integrable** en el intervalo $[a, b]$, o que la integral definida de $f$ **existe**. Se puede demostrar que si $f$ es continua en $[a, b]$, entonces la integral definida en (2) existe.

El concepto de integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, es decir, *la integración de una función real f(x) sobre un intervalo en el eje x de* $x = a$ *a* $x = b$ se puede generalizar *a la integración de un función real de varias variables G (x, y) sobre una curva C del punto A al punto B* en el plano cartesiano. Para esto necesitamos introducir cierta terminología de curvas.

**Terminología** Supongamos que una curva $C$ en el plano se parametriza con un conjunto de ecuaciones $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$, donde $x(t)$ y $y(t)$ son funciones reales continuas. Haciendo que los **puntos inicial y final** de $C$, es decir, $(x(a), y(a))$ y $(x(b), y(b))$, se denoten con los símbolos $A$ y $B$, respectivamente. Decimos que:

(*i*) $C$ es una **curva suave**, si $x'$ y $y'$ son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ y no son simultáneamente cero en el intervalo abierto $(a, b)$.

(*ii*) $C$ es una **curva suave por tramos** si consiste de un número finito de curvas suaves $C_1, C_2, \ldots, C_n$ unidas una al extremo de la otra, es decir, el punto final de una curva $C_k$ coincide con el punto inicial de la siguiente curva $C_{k+1}$.

(*iii*) $C$ es una **curva simple** si la curva $C$ no se cruza consigo misma excepto posiblemente en $t = a$ y $t = b$.

(*iv*) $C$ es una **curva cerrada** si $A = B$.

(*v*) $C$ es una **curva simple cerrada** si la curva $C$ no se cruza consigo misma y $A = B$, es decir, $C$ es simple y cerrada.

La figura 5.1.2 muestra cada tipo de curva definida de (*i*) a (*v*).

(**a**) Curva suave y simple (**b**) Curva suave por tramos y simple (**c**) Cerrada pero no simple (**d**) Curva cerrada simple

Figura 5.1.2 Tipos de curvas en el plano

**Integrales de línea en el plano** Los siguientes cinco pasos conducen a la definición de tres **integrales de línea*** en el plano y son análogos a los cinco pasos dados antes en la definición de la integral definida.

*Una desafortunada elección de los nombres. Sería más apropiado, **integrales de curvas**.

### *Pasos que conducen a la definición de las integrales de línea*

1. *Sea $G$ una función de dos variables reales $x$ y $y$ definido en todos los puntos en una curva suave $C$ que se encuentra en alguna región del plano $xy$. Sea $C$ definida por la parametrización $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$.*

2. *Sea $P$ una partición del intervalo del parámetro $[a, b]$ en $n$ subintervalos $[t_{k-1}, t_k]$, de longitud $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$:*

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b.$$

*La partición $P$ produce una partición de la curva $C$ en $n$ sub-arcos de longitud $\Delta s_k$. Sea la proyección de cada sub-arco sobre los ejes $x$ y $y$ que tienen longitudes $\Delta x_k$ y $\Delta y_k$, respectivamente. Vea la figura 5.1.3.*

3. *Sea $\|P\|$ la norma de la partición $P$ de $[a, b]$ es decir, la longitud del mayor de los subintervalos de la partición.*

4. *Se elige un punto $(x_k^*, y_k^*)$ en cada sub-arco de $C$. Vea la figura 5.1.3.*

5. *Se forman $n$ productos $G(x_k^*, y_k^*)\Delta x_k$, $G(x_k^*, y_k^*)\Delta y_k$, $G(x_k^*, y_k^*)\Delta s_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ y después se suman estos productos*

$$\sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*)\Delta x_k, \quad \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*)\Delta y_k, \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*)\Delta s_k.$$

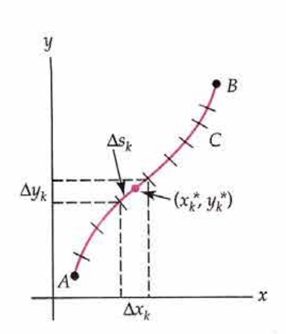



Figura 5.1.3 Partición de la curva $C$ en $n$ sub-arcos producidos por una partición $P$ del intervalo del parámetro $[a, b]$

**Definición 5.1.2 Integrales de línea en el plano**

$(i)$ La **integral de línea de $G$ a lo largo de $C$ con respecto a $x$** es

$$\int_C G(x, y)\, dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*)\, \Delta x_k. \tag{3}$$

$(ii)$ La **integral de línea de $G$ a lo largo de $C$ con respecto a $y$** es

$$\int_C G(x, y)\, dy = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*)\, \Delta y_k. \tag{4}$$

$(iii)$ La **integral de línea de $G$ a lo largo de $C$ con respecto a la longitud de arco $s$** es

$$\int_C G(x, y)\, ds = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*)\, \Delta s_k. \tag{5}$$

Se puede demostrar que si $G$ es continua en $C$, entonces los tres tipos de integrales de línea definidas en (3), (4) y (5) existen. Por costumbre, vamos a suponer continuidad de G. La curva $C$ se conoce como **la trayectoria de** integración.

**Método de Evaluación—$C$ definida paramétricamente** Las integrales de línea en la Definición 5.1.2 se pueden evaluar de dos maneras, dependiendo de si la curva $C$ se define por un par de ecuaciones paramétricas o por una función explícita. De cualquier modo, *la idea básica es la de convertir una integral de línea a una integral definida* en una sola variable. Si $C$

es una curva suave parametrizada por $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, entonces sustituyendo $x$ y $y$ en la integral por las funciones $x(t)$ y $y(t)$, y la diferencial adecuada $dx$, $dy$, o $ds$ por

$$dx = x'(t)\,dt, \quad dy = y'(t)\,dt, \quad \text{o} \quad ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt.$$

El término $ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$ se llama la diferencial de la longitud de arco. De esta manera cada una de las integrales de línea de la definición 5.1.2 se convierte en una integral definida en la que la variable de integración es el parámetro $t$. Es decir,

$$\int_C G(x, y)\,dx = \int_a^b G\left(x(t), y(t)\right) x'(t)\,dt, \tag{6}$$

$$\int_C G(x, y)\,dy = \int_a^b G\left(x(t), y(t)\right) y'(t)\,dt, \tag{7}$$

$$\int_C G(x, y)\,ds = \int_a^b G\left(x(t), y(t)\right) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt. \tag{8}$$

**EJEMPLO 1** ***C* definida paramétricamente**

Evalúe (**a**) $\int_C xy^2\,dx$, (**b**) $\int_C xy^2\,dy$ y (**c**) $\int_C xy^2\,ds$, donde la trayectoria de integración $C$ es el cuarto de circunferencia definida por $x = 4\cos t$, $y = 4\,\text{sen}\,t$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

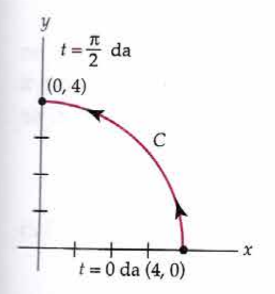
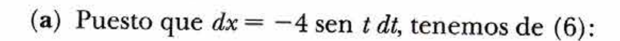


Figura 5.1.4 Trayectoria de integración $C$

**Solución** La trayectoria $C$ de integración se muestra a color en la figura 5.1.4. En cada una de las tres integrales de línea dadas, se sustituye $x$ por $4\cos t$ y se sustituye $y$ por $4\,\text{sen}\,t$.



(**a**) Puesto que $dx = -4\,\text{sen}\,t\,dt$, tenemos de (6):

$$\begin{aligned}\int_C xy^2\,dx &= \int_0^{\pi/2} (4\cos t)\,(4\,\text{sen}\,t)^2\,(-4\,\text{sen}\,t\,dt)\\ &= -256\int_0^{\pi/2} \text{sen}^3\,t\cos t\,dt = -256\left[\frac{1}{4}\,\text{sen}^4\,t\right]_0^{\pi/2} = -64.\end{aligned}$$

(**b**) Dado que $dy = 4\cos t\,dt$, tenemos de (7):

$$\begin{aligned}\int_C xy^2\,dy &= \int_0^{\pi/2} (4\cos t)\,(4\,\text{sen}\,t)^2\,(4\cos t\,dt)\\ &= 256\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2\,t\cos^2 t\,dt\\ &= 256\int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\,\text{sen}^2\,2t\,dt\\ &= 64\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1-\cos 4t)\,dt = 32\left[t - \frac{1}{4}\,\text{sen}\,4t\right]_0^{\pi/2} = 16\pi.\end{aligned}$$

Observe que en esta integración hemos utilizado dos identidades trigonométricas: $\text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$ y $\text{sen}^2\,\theta = \frac{1}{2}\,(1-\cos 2\theta)$.

(c) Dado que $ds = \sqrt{16\left(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t\right)}\, dt = 4\, dt$, se deduce de (8):

$$\int_C xy^2\, ds = \int_0^{\pi/2} (4\cos t)\,(4\operatorname{sen} t)^2\,(4\, dt)$$

$$= 256\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t \cos t\, dt = 256\left[\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 t\right]_0^{\pi/2} = \frac{256}{3}.$$

❑

**Método de Evaluación–*C* definido por una función** Si la trayectoria de integración *C* es la gráfica de una función explícita $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, entonces podemos usar $x$ como parámetro. En esta situación, la diferencial de $y$ es $dy = f'(x)\, dx$, y la diferencial de longitud de arco es $ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$. Después de sustituir, las tres integrales de línea de la definición 5.1.2 se convierten en las integrales definidas:

$$\int_C G(x, y)\, dx = \int_a^b G(x, f(x))\, dx, \qquad (9)$$

$$\int_C G(x, y)\, dy = \int_a^b G(x, f(x)) f'(x)\, dx, \qquad (10)$$

$$\int_C G(x, y)\, ds = \int_a^b G(x, f(x))\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \qquad (11)$$

Una integral de línea a lo largo de una curva *C suave* por tramos se define como la suma de las integrales sobre las diversas curvas suaves cuya unión es la curva *C*. Por ejemplo, para evaluar $\int_C G(x, y)\, ds$ cuando *C* se compone de dos curvas suaves $C_1$ y $C_2$, comenzamos escribiendo

$$\int_C G(x, y)\, ds = \int_{C_1} G(x, y)\, ds + \int_{C_2} G(x, y)\, ds. \qquad (12)$$

Las integrales $\int_{C_1} G(x, y)\, ds$ y $\int_{C_2} G(x, y)\, ds$, entonces se evalúan en la forma dada en (8) o (11).

**EJEMPLO 2 *C* definida por una función explícita**

Evalúe $\int_C xy\, dx + x^2\, dy$, donde *C* es la gráfica de $y = x^3$, $-1 \leq x \leq 2$.

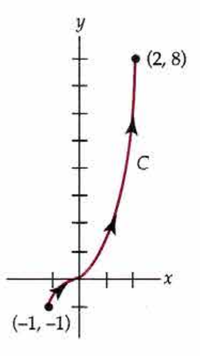



**Figura 5.1.5** Gráfica de $y = x^3$ en el intervalo $-1 \leq x \leq 2$

**Solución** En la figura 5.1.5, se muestra la curva *C* y se define con la función explícita $y = x^3$. Por tanto podemos usar $x$ como parámetro. Usando la diferencial $dy = 3x^2 dx$, aplicamos (9) y (10):

$$\int_C xy\, dx + x^2\, dy = \int_{-1}^2 x\left(x^3\right) dx + x^2\left(3x^2\, dx\right)$$

$$= \int_{-1}^2 4x^4\, dx = \frac{4}{5}x^5\Big|_{-1}^2 = \frac{132}{5}.$$

❑

**Notación** En muchas aplicaciones las integrales de línea se presentan como una suma $\int_C P(x, y)\, dx + \int_C Q(x, y)\, dy$. Es una práctica común en escribir esta suma como una integral sin paréntesis como

$$\int_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy \quad \text{o simplemente} \quad \int_C P\, dx + Q\, dy. \tag{13}$$

Una integral de línea a lo largo de una curva cerrada $C$ usualmente se denota por

$$\oint_C P\, dx + Q\, dy.$$

---

**EJEMPLO 3** ***C* es una curva cerrada**

Evalúe $\oint_C x\, dx$, donde $C$ es la circunferencia definida por $x = \cos t$, $y = \text{sen}\, t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

**Solución** La diferencial de $x = \cos t$ es $dx = -\text{sen}\, t\, dt$, y así, de (6),

$$\oint_C x\, dx = \int_0^{2\pi} \cos t\, (-\text{sen}\, t\, dt) = \frac{1}{2} \cos^2 t \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}[1 - 1] = 0.$$ ❑

---

**EJEMPLO 4** ***C* es una curva cerrada**

Evalúe $\oint_C y^2\, dx - x^2\, dy$, donde $C$ es la curva cerrada que se muestra en la figura 5.1.6.

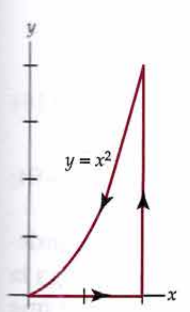


**Figura 5.1.6** Trayectoria de integración en partes suave

**Solución** Puesto que $C$ es suave por tramos, se procede como se muestra en (12), es decir, la integral se expresa como una suma de integrales. Simbólicamente, escribimos $\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3}$, dónde $C_1$, $C_2$, $C_3$ son las curvas indicadas en la figura 5.1.7. En $C_1$, usamos $x$ como parámetro. Ya que $y = 0$, $dy = 0$, por lo que

$$\int_{C_1} y^2\, dx - x^2\, dy = \int_0^2 0\, dx - x^2 (0) = 0.$$

En $C_2$, utilizamos $y$ como parámetro. Dado que $x = 2$, $dx = 0$, tenemos

$$\int_{C_2} y^2\, dx - x^2\, dy = \int_0^4 y^2 (0) - 4\, dy = -\int_0^4 4\, dy = -16.$$

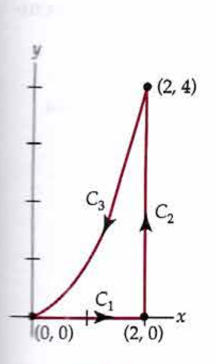


**Figura 5.1.7** $C$ consiste de la unión de $C_1$, $C_2$ y $C_3$.

En $C_3$, usamos $x$ de nuevo como parámetro. De $y = x^2$, obtenemos $dy = 2x\, dx$ y así

$$\int_{C_3} y^2\, dx - x^2\, dy = \int_2^0 \left(x^2\right)^2 dx - x^2\, (2x\, dx)$$

$$= \int_2^0 \left(x^4 - 2x^3\right) dx = \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4\right)\Big|_2^0 = \frac{8}{5}.$$

Por tanto, $\displaystyle\oint_C y^2\, dx - x^2\, dy = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} = 0 + (-16) + \frac{8}{5} = -\frac{72}{5}.$ ❑

**Orientación de una curva** En la integral definida normalmente suponemos que el intervalo de integración es $a \leq x \leq b$ y el símbolo $\int_a^b f(x)\, dx$ indica que estamos integrando en la dirección positiva del eje $x$. Integrando en la dirección opuesta, de $x = b$ a $x = a$, se obtiene el negativo de la integral original:

$$\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx. \tag{14}$$

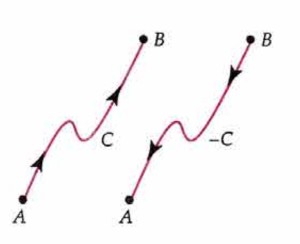


Figura 5.1.8 Curva $C$ y su opuesta $-C$

Las integrales de línea tienen una propiedad similar a la (14), pero primero tenemos que introducir el concepto de **orientación** de la trayectoria $C$. Si $C$ no es una curva cerrada, se dice que la **dirección positiva** en $C$ o que $C$ tiene una **orientación positiva**, si se recorre $C$ desde su punto inicial $A$ a su punto final $B$. En otras palabras, si $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$ son las ecuaciones paramétricas para $C$, entonces la dirección positiva de $C$ corresponde a los valores crecientes del parámetro $t$. Si $C$ se recorre en sentido contrario al de la orientación positiva, entonces se dice que $C$ tiene una **orientación negativa**. Si $C$ tiene una orientación (positiva o negativa), entonces la **curva opuesta**, la curva con orientación opuesta, se representará con el símbolo $-C$. En la figura 5.1.8, si suponemos que $A$ y $B$ son los puntos inicial y final de la curva $C$, respectivamente, entonces las flechas sobre la curva $C$, indican que estamos atravesando la curva de su punto inicial hasta su punto final, y así $C$ tiene una orientación positiva. La curva a la derecha de $C$ que se etiqueta con $-C$, entonces tiene orientación negativa. Por último, si $-C$ denota la curva que tiene orientación opuesta a $C$, entonces el análogo de (14) para integrales de línea es

$$\int_{-C} P\, dx + Q\, dy = -\int_C P\, dx + Q\, dy, \tag{15}$$

o, equivalentemente

$$\int_{-C} P\, dx + Q\, dy + \int_C P\, dx + Q\, dy = 0. \tag{16}$$

Por ejemplo, en el inciso (a) del ejemplo 1, vimos que $\int_C xy^2\, dx = -64$; concluimos de (15) que $\int_{-C} xy^2\, dx = 64$.

*Nota* ➡ Es importante estar conscientes de que una integral de línea es independiente de la parametrización de la curva $C$, siempre y cuando $C$ tenga la misma orientación en todos los conjuntos de ecuaciones paramétricas que definen la curva. Vea el problema 33 en los ejercicios 5.1.

## EJERCICIOS 5.1 *Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-14.*

En los problemas 1 a 10 evalúe la integral definida. Si es necesario, revise las técnicas de integración en su libro de cálculo.

1. $\int_{-1}^{3} x(x-1)(x+2)\, dx$
2. $\int_{-1}^{0} t^2\, dt + \int_0^2 x^2\, dx + \int_2^3 u^2\, du$
3. $\int_{1/2}^{1} \operatorname{sen} 2\pi x\, dx$
4. $\int_0^{\pi/8} \sec^2 2x\, dx$
5. $\int_0^4 \frac{dx}{2x+1}$
6. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{-x}\, dx$
7. $\int_2^4 xe^{-x/2}\, dx$
8. $\int_1^e \ln x\, dx$
9. $\int_2^4 \frac{dx}{x^2-6x+5}$
10. $\int_2^4 \frac{2x-1}{(x+3)^2}\, dx$

En los problemas 11 a 14 evalúe las integrales de línea $\int_C G(x, y)\,dx$, $\int_C G(x, y)\,dy$ y $\int_C G(x, y)\,ds$ sobre la curva indicada $C$.

**11.** $G(x, y) = 2xy$; $x = 5\cos t$, $y = 5\,\text{sen}\,t$, $0 \leq t \leq \pi/4$

**12.** $G(x, y) = x^3 + 2xy^2 + 2x$; $x = 2t$, $y = t^2$, $0 \leq t \leq 1$

**13.** $G(x, y) = 3x^2 + 6y^2$; $y = 2x + 1$, $-1 \leq x \leq 0$

**14.** $G(x, y) = x^2/y^3$; $2y = 3x^{3/2}$, $1 \leq t \leq 8$

En los problemas 15 a 18 evalúe $\int_C (2x + y)\,dx + xy\,dy$ sobre la curva dada de $(-1, 2)$ a $(2, 5)$.

**15.** $y = x + 3$

**16.** $y = x^2 + 1$

**17.**

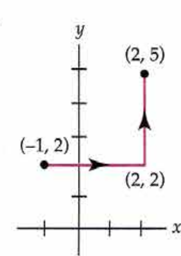



Figura 5.1.9 Figura para el problema 17

**18.**

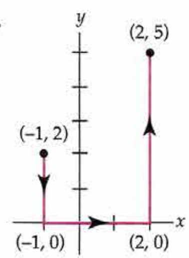



Figura 5.1.10 Figura para el problema 18

En los problemas 19 a 22 evalúe $\int_C y\,dx + x\,dy$ sobre la curva dada de $(0, 0)$ a $(1, 1)$.

**19.** $y = x^2$

**20.** $y = x$

**21.** $C$ consiste en los segmentos de recta de $(0, 0)$ a $(0, 1)$ y de $(0, 1)$ a $(1, 1)$.

**22.** $C$ consiste de los segmentos de recta de $(0, 0)$ a $(1, 0)$ y de $(1, 0)$ a $(1, 1)$.

**23.** Evalúe $\int_C (6x^2 + 2y^2)\,dx + 4xy\,dy$, donde $C$ está dada por $x = \sqrt{t}$, $y = t$, $4 \leq t \leq 9$.

**24.** Evalúe $\int_C -y^2\,dx + xy\,dy$, donde $C$ está dada por $x = 2t$, $y = t^3$, $0 \leq t \leq 2$.

**25.** Evalúe $\int_C 2x^3y\,dx + (3x + y)\,dy$, donde $C$ está dada por $x = y^2$ de $(1, -1)$ a $(1, 1)$.

**26.** Evalúe $\int_C 4x\,dx + 2y\,dy$, donde $C$ está dada por $x = y^3 + 1$ de $(0, -1)$ a $(9, 2)$.

En los problemas 27 y 28, evalúe $\oint_C (x^2 + y^2)\,dx - 2xy\,dy$ sobre la curva cerrada dada.

**17.**

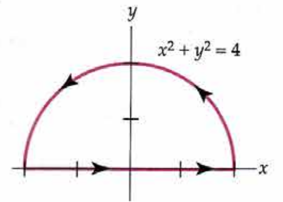



Figura 5.1.11 Figura para el problema 27

**18.**

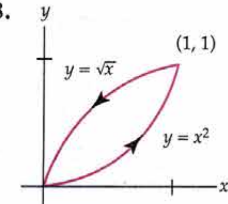



Figura 5.1.12 Figura para el problema 28

En los problemas 29 y 30, evalúe $\oint_C x^2y^3\,dx - xy^2\,dy$ en la curva cerrada dada.

**27.**

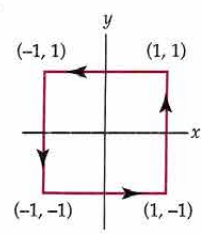



Figura 5.1.13 Figura para el problema 29

**28.**

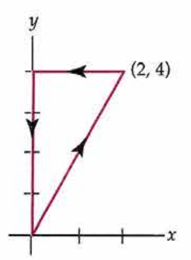



Figura 5.1.14 Figura para el problema 30

**31.** Evalúe $\oint_C (x^2 - y^2)\,ds$, donde $C$ está dada por $x = 5\cos t$, $y = 5\,\text{sen}\,t$, $0 \le t \le 2\pi$.

**32.** Evalúe $\int_{-C} y\,dx - x\,dy$, donde $C$ está dada por $x = 2\cos t$, $y = 3\,\text{sen}\,t$, $0 \le t \le \pi$.

**33.** Compruebe que la integral de línea $\int_C y^2\,dx + xy\,dy$ tiene el mismo valor de $C$ para cada una de las parametrizaciones siguientes:

$$C: x = 2t + 1,\ y = 4t + 2,\ 0 \le t \le 1$$
$$C: x = t^2,\ y = 2t^2,\ 1 \le t \le \sqrt{3}$$
$$C: x = \ln t,\ y = 2\ln t,\ e \le t \le e^3.$$

**34.** Considere las tres curvas entre (0, 0) y (2, 4):

$$C: x = t,\ y = 2t,\ 0 \le t \le 2$$
$$C: x = t,\ y = t^2,\ 0 \le t \le 2$$
$$C: x = 2t - 4,\ y = 4t - 8,\ 2 \le t \le 3.$$

Demuestre que $\int_{C_1} xy\,ds = \int_{C_3} xy\,ds$, pero $\int_{C_1} xy\,ds \neq \int_{C_2} xy\,ds$. Explique.

**35.** Si $\rho(x, y)$ es la densidad de un alambre (masa por unidad de longitud), entonces la masa del alambre es $m = \int_C \rho(x, y)\,ds$. Determine la masa de un alambre que tiene la forma de una semicircunferencia $x = 1 + \cos t$, $y = \text{sen}\,t$, $0 \le t \le \pi$, si la densidad en un punto $P$ es directamente proporcional a la distancia del eje $y$.

**36.** Las coordenadas del centro de masa de un alambre con densidad variable están dadas por $\bar{x} = M_y/m$, $\bar{y} = M_x/m$ donde

$$m = \int_C \rho(x, y)\,ds, \quad M_x = \int_C y\rho(x, y)\,ds, \quad M_y = \int_C x\rho(x, y)\,ds.$$

Encuentre el centro de masa del alambre en el problema 35.

## 5.2 Integrales complejas

En la sección anterior revisamos dos tipos de integrales reales. Hemos visto que la definición de la integral definida inicia con una función real $y = f(x)$ que está definida en un intervalo del eje $x$. Debido a que una curva plana es el análogo bidimensional de un intervalo, entonces la definición se generaliza de $\int_a^b f(x)\,dx$ a las integrales de funciones reales de dos variables definidas en una curva $C$ en el plano cartesiano. Veremos en esta sección que una integral compleja está definida de una manera bastante similar a la de una integral de línea en el plano cartesiano.

Dado que las curvas desempeñan un papel importante en la definición de una integral compleja, comenzamos con un repaso breve de cómo se representan las curvas en el plano complejo.

**Repaso de curvas** Suponga que las funciones continuas reales $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$ son ecuaciones paramétricas de una curva $C$ en el plano

complejo. Si usamos estas ecuaciones como las partes real e imaginaria en $z = x + iy$, vimos en la sección 2.2, que podemos describir los puntos $z$ sobre $C$ por medio de una función con valores complejos de una variable real $t$ llamada **parametrización** de $C$:

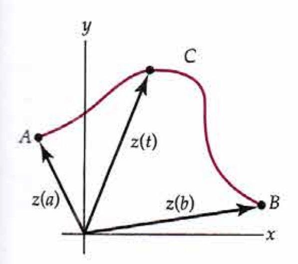


**Figura 5.2.1** $z(t) = x(t) + iy(t)$ como un vector de posición

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b. \tag{1}$$

Por ejemplo, las ecuaciones paramétricas $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, describen una circunferencia unitaria con centro en el origen. Una parametrización de esta circunferencia es $z(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t$, o $z(t) = e^{it}\, 0 \leq t \leq 2\pi$. Vea de la ecuación (6) a la (10) de la sección 2.2.

El punto $z(a) = x(a) + iy(a)$ o $A = (x(a), y(a))$ se llama **punto inicial** de $C$ y $z(b) = x(b) + iy(b)$ o $B = (x(b), y(b))$ es el **punto final**, también vimos en la sección 2.7 que $z(t) = x(t) + iy(t)$ también podría interpretarse como una función vectorial bidimensional. Por tanto, $z(a)$ y $z(b)$ puede interpretarse como vectores de posición. Como $t$ varía de $t = a$ a $t = b$ podemos imaginar que la curva $C$ está trazada por la punta de flecha en movimiento de $z(t)$. Vea la figura 5.2.1.

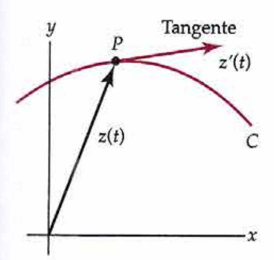


**Figura 5.2.2** $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ como un vector tangente

## Contornos

Los conceptos de curvas en el plano complejo como son suave, suave por tramos, simple, cerrada, cerrada y simple son fáciles de formular en términos de la función vectorial (1). Supongamos que la derivada de (1) es $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$. Decimos que una curva $C$ en el plano complejo es **suave** si $z'(t)$ es continua y nunca es cero en el intervalo $a \leq t \leq$ b. Como se muestra en la figura 5.2.2, ya que el vector $z'(t)$ no es cero en ningún punto $P$ sobre $C$, el vector $z'(t)$ es tangente a $C$ en $P$. En otras palabras, una curva suave tiene una tangente cambiando continuamente, puesto de otra manera, una curva suave no puede tener esquinas afiladas o cúspides. Vea la figura 5.2.3. Una **curva suave por tramos** $C$ tiene una tangente cambiando continuamente, excepto posiblemente en los puntos donde las curvas suaves componentes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ se unen entre sí. Una curva $C$ en el plano complejo se dice que es **simple** si $z(t_1) \neq z(t_2)$ para $t_1 \neq t_2$, excepto, posiblemente, para $t = a$ y $t = b$. $C$ es una **curva cerrada** si $z(a) = z(b)$. $C$ es una **curva cerrada simple** si $z(t_1) \neq z(t_2)$ para $t_1 \neq t_2$ y $z(a) = z(b)$. En análisis complejo, una curva $C$ suave por partes se llama un **contorno** o **trayectoria**.

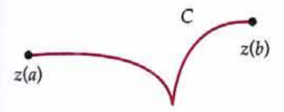
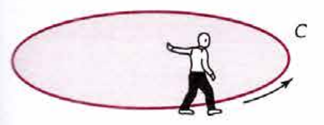
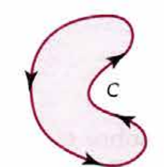


**Figura 5.2.3** La curva $C$ no es suave ya que tiene una cúspide.

Así como lo hicimos en la sección anterior, definimos el **sentido positivo** sobre un contorno $C$ tal que la dirección en la curva que corresponde al aumento de los valores del parámetro $t$. También se dice que la curva $C$ tiene **orientación positiva**. En el caso de una curva cerrada simple $C$, la dirección positiva corresponde aproximadamente a la dirección en contra de las manecillas del reloj o a una persona que al caminar en $C$ debe mantener el interior de $C$ a la izquierda. Por ejemplo, la circunferencia $z(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, tiene una orientación positiva. Vea la figura 5.2.4. La **dirección negativa** sobre un contorno $C$ es la dirección opuesta a la dirección positiva. Si $C$ tiene una orientación, la **curva opuesta**, es decir, una curva con orientación opuesta, se denota por $-C$. En una curva cerrada simple, el sentido negativo corresponde a la dirección de las manecillas del reloj.



**(a)** Dirección positiva



**(b)** Dirección positiva

**Figura 5.2.4** El interior de cada curva es hacia la izquierda

## Integral compleja

Una integral de una función $f$ de una variable compleja $z$ que se define en un contorno $C$ se denota por $\int_C f(z)\,dz$ y se llama una **integral compleja**. La siguiente lista de suposiciones es un preludio a la definición de una integral compleja. Para comparar, se le pide que revise las listas dadas antes de las definiciones 5.1.1 y 5.1.2. Además, observe la figura 5.2.5 para que lea la lista nueva.

## *Pasos que conducen a la definición de la integral compleja*

1. *Sea f una función de una variable compleja z definida en todos los puntos de una curva suave C que se encuentra en alguna región del plano complejo. Sea C definida por la parametrización* $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$.

2. *Sea P una partición del intervalo del parámetro* $[a, b]$ *en n subintervalos* $[t_{k-1}, t_k]$, *de la longitud* $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b.$$

*La partición P induce una partición de la curva C en n sub-arcos cuyos puntos iniciales y finales son los pares de números*

$$\begin{aligned} z_0 &= x(t_0) + iy(t_0), & z_1 &= x(t_1) + iy(t_1),\\ z_1 &= x(t_1) + iy(t_1), & z_2 &= x(t_2) + iy(t_2),\\ &\ \vdots & &\ \vdots \\ z_{n-1} &= x(t_{n-1}) + iy(t_{n-1}), & z_n &= x(t_n) + iy(t_n). \end{aligned}$$

*Sea* $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. *Vea la figura 5.2.5.*

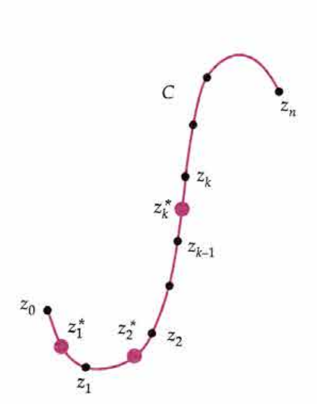



**Figura 5.2.5** La partición de la curva $C$ en $n$ sub-arcos es producida por una partición $P$ del intervalo del parámetro $[a, b]$.

3. *Sea* $\|P\|$ *sea la norma de la partición P de* $[a, b]$, *es decir, la longitud del mayor de los subintervalos de la partición.*

4. *Se elige un punto* $z_k^* = x_k^* + i\, x_k^*$ *en cada sub-arco de C. Vea la figura 5.2.5.*

5. *Se forman n productos* $f(z_k^*)\Delta z_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *y después se suman estos productos:*

$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\Delta z_k.$$

**Definición 5.2.1 Integral compleja**

La **integral compleja** de $f$ en $C$ es

$$\int_C f(z)\, dz = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\, \Delta z_k. \qquad (2)$$

Suposiciones generales en todo este libro ➡

Si el límite en (2) existe se dice que $f$ es $f$ **integrable** sobre $C$. El límite existe siempre que $f$ sea continua en todos los puntos en $C$ y $C$ es ya sea suave o suave por tramos. Por tanto de aquí en adelante, supondremos estas condiciones como algo natural. Además, usaremos la notación $\oint_C f(z)\, dz$ para representar una integral compleja en torno a una curva cerrada $C$ *orientada positivamente.* Cuando es importante distinguir la dirección de integración en torno de una curva cerrada, empleamos las notaciones

$$\oint_C f(z)\, dz \qquad \text{y} \qquad \oint_C f(z)\, dz$$

para denotar la integración en las dirección positiva y negativa, respectivamente.

El punto de haber hecho que las definiciones de las integrales reales analizadas en la sección 5.1 y de la definición 5.2.1 son formalmente iguales, de ahora en adelante vamos a referirnos a un integral compleja $\int_C f(z)\,dz$ por su nombre más común, **integral de contorno**.

*Nota* ➡

**Función con valores complejos de una variable real** Antes de pasar a las propiedades de las integrales de contorno y la importantísima pregunta de cómo evaluar una integral de contorno, necesitamos una breve digresión para ampliar, el concepto de una **función con valores complejos de una variable real** que se presentó en las observaciones de la sección 2.1. Como ya se mencionó, una parametrización de una curva $C$ de la forma dada en (1) es un ejemplo de ésta. Veamos otro ejemplo sencillo. Si $t$ representa una variable real, entonces la salida de la función $f(t) = (2t + i)^2$ es un número complejo. Para $t = 2$,

$$f(2) = (4 + i)^2 = 16 + 8i + i^2 = 15 + 8i.$$

En general, si $f_1$ y $f_2$ son funciones reales de una variable real $t$ (es decir, funciones reales), entonces $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ es una función con valores complejos de una variable real $t$. Lo que realmente nos interesa en este momento es la integral definida $\int_a^b f(t)\,dt$, en otras palabras, la integración de la función con valores complejos $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ de variable real $t$ realizada en un intervalo real. Continuando con la función específica $f(t) = (2t + i)^2$, parece lógico integrar, por ejemplo, en el intervalo $0 \leq t \leq 1$,

$$\int_0^1 (2t + i)^2 dt = \int_0^1 \left(4t^2 - 1 + 4ti\right) dt = \int_0^1 (4t^2 - 1)dt + i\int_0^1 4t\,dt. \qquad (3)$$

Las integrales $\int_0^1 (4t^2 - 1)dt$ y $\int_0^1 4t\,dt$ en (3) son reales, y así uno se inclinaría a llamarlas partes real e imaginaria de $\int_0^1 (2t + i)^2 dt$. Cada una de estas integrales reales se pueden evaluar usando el teorema fundamental del cálculo ((1) de la sección 5.1):

$$\int_0^1 (4t^2 - 1)dt = \left(\frac{4}{3}t^3 - t\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad \int_0^1 4t\,dt = 2t^2\Big|_0^1 = 2.$$

Así, (3) se convierte en $\int_0^1 (2t + i)^2 dt = \frac{1}{3} + 2i$.

Dado que la integración anterior parece muy normal y de rutina, le damos la siguiente generalización. Si $f_1$ y $f_2$ son funciones reales de una variable real $t$ continua en un intervalo común $a \leq t \leq b$, entonces *definimos* la integral de la función de valores complejos $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ en $a \leq t \leq b$ en términos de integrales definidas de las partes real e imaginaria de $f$:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f_1(t)\,dt + i\int_a^b f_2(t)\,dt. \qquad (4)$$

La continuidad de $f_1$ y $f_2$ en $[a, b]$ garantiza que tanto $\int_a^b f_1(t)\,dt$ como $\int_a^b f_2(t)\,dt$ existan.

Todas las propiedades siguientes de las integrales se pueden demostrar directamente a partir de la definición dada en (4). Si $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ y

$g(t) = g_1(t) + ig_2(t)$ son funciones complejas de una variable real $t$ continua en un intervalo $a \leq t \leq b$, entonces

Estas propiedades son importantes en la evaluación de las integrales de contorno. Con frecuencia se usan sin mencionarlas.

$$\int_a^b kf(t)\,dt = k\int_a^b f(t)\,dt, dt, \quad k \text{ es una constante compleja,} \tag{5}$$

$$\int_a^b (f(t) + g(t))\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt, \tag{6}$$

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt, \tag{7}$$

$$\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt. \tag{8}$$

En (7) optamos por suponer que el número real $c$ está en el intervalo $[a, b]$.

Ahora resumimos nuestro análisis de las integrales de contorno.

**Evaluación de integrales de contorno** Para facilitar el análisis sobre cómo evaluar una integral de contorno $\int_C f(z)\,dz$, vamos a escribir a (2) en una forma abreviada. Si usamos $u + iv$ para $f(z)$, $\Delta x + i\Delta y$ para $\Delta z$, lím para $\lim_{\|P\|\to 0}$, $\sum$ para $\sum_{k=1}^{n}$ y después de eliminar todos las subíndices, (2) se convierte en

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \text{lím}\sum(u + iv)(\Delta x + i\Delta y)\\ &= \text{lím}\left[\sum(u\Delta x - v\Delta y) + i\sum(v\Delta x + u\Delta y)\right].\end{aligned}$$

La interpretación del último renglón es

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C v\,dx + u\,dy. \tag{9}$$

Vea la definición 5.1.2. En otras palabras, las partes real e imaginaria de una integral de contorno $\int_C f(z)\,dz$ son un par de integrales de línea reales $\int_C u\,dx - v\,dy$ y $\int_C v\,dx + u\,dy$. Ahora si $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$ son las ecuaciones paramétricas de $C$, entonces $dx = x'(t)\,dt$, $dy = y'(t)\,dt$. Sustituyendo los símbolos $x$, $y$, $dx$, y $dy$ por $x(t)$, $y(t)$, $x'(t)\,dt$, y $y'(t)\,dt$, respectivamente, el lado derecho de (9) se convierte en

$$\begin{aligned}&\overbrace{\int_a^b [u(x(t), y(t))\,x'(t) - v(x(t), y(t))\,y'(t)]dt}^{\int_C udx\,-vdy}\\ &+ i\overbrace{\int_a^b [v(x(t), y(t))\,x'(t) + u(x(t), y(t))\,y'(t)]dt.}^{\int_C vdx\,+udy}\end{aligned} \tag{10}$$

Si usamos la función de valores complejos (1) para describir el contorno $C$, entonces (10) es igual que $\int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt$ donde el integrando

$$f(z(t))\,z'(t) = [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))]\,[x'(t) + iy'(t)]$$

se multiplica fuera y $\int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt$ se expresa en términos de sus partes real e imaginaria. Llegamos así a una forma práctica de evaluar una integral de contorno.

**Teorema 5.2.1 Evaluación de una integral de contorno**

Si $f$ es continua en una curva suave $C$ dada por la parametrización $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$, entonces

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt. \tag{11}$$

Los resultados anteriores en (10) y (11) vale la pena repetirlos, esta vez con diferentes palabras. Supongamos que $z(t) = x(t) + iy(t)$ y $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$. Entonces el integrando $f(z(t))z'(t)$ es una función de valores complejos de una variable real $t$. Por tanto, la integral $\int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt$ se evalúa de la manera definida en (4). El siguiente ejemplo ilustra el método.

**EJEMPLO 1 Evaluación de una integral de contorno**

Evalúe $\int_C \bar{z}\,dz$, donde $C$ se parametriza con $z(t) = 3t + it^2$, $-1 \leq t \leq 4$.

**Solución** Con la identificación $f(z) = \bar{z}$ tenemos $f(z(t)) = \overline{3t + it^2} = 3t - it^2$. También, $z'(t) = 3 + 2it$, y así, por (11), la integral es

$$\int_C \bar{z}\,dz = \int_{-1}^4 (3t - it^2)(3 + 2it)\,dt = \int_{-1}^4 \left[2t^3 + 9t + 3t^2 i\right] dt.$$

Ahora, de acuerdo con (4), la última integral es igual a

$$\begin{aligned}\int_C \bar{z}\,dz &= \int_{-1}^4 (2t^3 + 9t)\,dt + i\int_{-1}^4 3t^2\,dt \\ &= \left(\frac{1}{2}t^4 + \frac{9}{2}t^2\right)\Bigg|_{-1}^4 + it^3\Bigg|_{-1}^4 = 195 + 65i.\end{aligned}$$

❑

**EJEMPLO 2 Evaluación de una integral de contorno**

Evalúe $\oint_C \frac{1}{z}\,dz$, donde $C$ es la circunferencia $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

**Solución** En este caso $z(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t = e^{it}$, $z'(t) = ie^{it}$, y $f(z(t)) = \dfrac{1}{z(t)} = e^{-it}$. Por tanto,

$$\oint_C \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} (e^{-it})\,ie^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

❑

Como se analizó en la sección 5.1, para algunas curvas la variable real $x$ en sí misma se puede utilizar como parámetro. Por ejemplo, para evaluar

$\int_C (8x^2 - iy)\,dz$ sobre el segmento de recta $y = 5x$, $0 \leq x \leq 2$, escribimos $z = x + 5xi$, $dz = (1 + 5i)dx$, $\int_C (8x^2 - iy)\,dz = \int_0^2 (8x^2 - 5ix)(1 + 5i)\,dx$, y después se integra de la forma habitual:

$$\int_C (8x^2 - iy)\,dz = (1 + 5i)\int_0^2 (8x^2 - 5ix)\,dx$$

$$= (1 + 5i)\left[\frac{8}{3}x^3\right]_0^2 - (1 + 5i)i\left[\frac{5}{2}x^2\right]_0^2 = \frac{214}{3} + \frac{290}{3}i.$$

En general, si $x$ y $y$ están relacionadas por medio de una función real continua $y = f(x)$, entonces la curva correspondiente $C$ en el plano complejo se puede parametrizar por $z(x) = x + if(x)$. De manera equivalente, podemos hacer $x = t$ de manera que un conjunto de ecuaciones paramétricas para $C$ es $x = t$, $y = f(t)$.

## Propiedades

Las siguientes propiedades de las integrales de contorno son análogas a las propiedades de las integrales de línea reales, así como las propiedades que se presentan de (5) a (8).

**Teorema 5.2.2 Propiedades de integrales de contorno**

Supongamos que las funciones $f$ y $g$ son continuas en un dominio $D$ y $C$ es una curva suave situada totalmente en $D$. Entonces

(*i*) $\int_C kf(z)\,dz = k\int_C f(z)\,dz$, $k$ es una constante compleja.

(*ii*) $\int_C [f(z) + g(z)]dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)\,dz$.

(*iii*) $\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz$ donde $C$ se compone de las curvas suaves $C_1$ y $C_2$ que se unen extremo con extremo.

(*iv*) $\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz$ donde $-C$ denota la curva que tiene la orientación opuesta de $C$.

Las cuatro partes del teorema 5.2.2 también valen si $C$ es una curva suave en partes en $D$.

### EJEMPLO 3 *C* es una curva suave por tramos

Evalúe $\int_C (x^2 + iy^2)\,dz$, donde $C$ es el contorno de la figura 5.2.6.

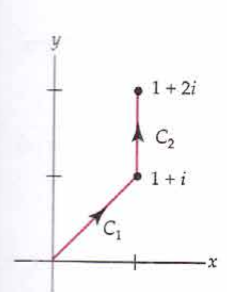



Figura 5.2.6 Contorno $C$ suave por tramos.

**Solución** De acuerdo con el Teorema 5.2.2 (*iii*) escribimos

$$\int_C (x^2 + iy^2)\,dz = \int_{C_1} (x^2 + iy^2)\,dz + \int_{C_2} (x^2 + iy^2)\,dz.$$

Ya que la curva $C_1$ se define por $y = x$, $0 \leq x \leq 1$, tiene sentido usar $x$ como parámetro. Por tanto, $z(x) = x + ix$, $z'(x) = 1 + i$, $f(z) = x^2 + iy^2$, $f(z(x)) = x^2 + ix^2$, y

$$\int_{C_1} (x^2 + iy^2)\,dz = \int_0^1 \overbrace{(x^2 + ix^2)}^{(1+i)x^2}(1 + i)\,dx$$

$$= (1 + i)^2\int_0^1 x^2\,dx = \frac{(1 + i)^2}{3} = \frac{2}{3}i. \qquad (12)$$

La curva $C_2$ se define por $x = 1$, $1 \leq y \leq 2$. Si utilizamos $y$ como parámetro, entonces $z(y) = 1 + iy$, $z'(y) = i$, $f(z(y)) = 1 + iy^2$, y

$$\int_{C_2} (x^2 + iy^2)\, dz = \int_1^2 (1 + iy^2) i\, dy = -\int_1^2 y^2\, dy + i\int_1^2 dy = -\frac{7}{3} + i. \quad (13)$$

Combinando (10) y (13) se obtiene $\int_C (x^2 + iy^2)\, dz = \frac{2}{3}i + (-\frac{7}{3} + i) = -\frac{7}{3} + \frac{5}{3}i$. ❑

Algunas veces en la aplicación de integración compleja es útil encontrar una cota superior para el módulo o valor absoluto de una integral de contorno. En el siguiente teorema se utiliza el hecho de que la longitud de una curva plana es $L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$. Pero si $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$, entonces $|z'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$ y, por tanto, $L = \int_a^b |z'(t)|\, dt$.

**Teorema 5.2.3 Un teorema de acotamiento**

Si $f$ es continua sobre una curva suave $C$ y si $|f(z)| \leq M$ para todo $z$ en $C$, entonces $\left|\int_C f(z)\, dz\right| \leq ML$, donde $L$ es la longitud de $C$.

**Demostración** Se deduce de la forma de la desigualdad del triángulo dada en (11) de la sección 1.2 que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\Delta z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(z_k^*)|\, |\Delta z_k| \leq M \sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k|. \quad (14)$$

Porque $|\Delta z_k| = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$, podemos interpretar $|\Delta z_k|$ como la longitud de la cuerda que une los puntos $z_k$ y $z_{k-1}$ sobre $C$. Además, ya que la suma de las longitudes de las cuerdas no puede ser mayor que la longitud $L$ de $C$, la desigualdad (14) continúa como $\left|\sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\Delta z_k\right| \leq ML$. Por último, la continuidad de $f$ garantiza que $\int_C f(z)\, dz$ existe y, por lo que si hacemos que $\|P\| \to 0$, la última desigualdad produce $\left|\int_C f(z)\, dz\right| \leq ML$. ❑

El teorema 5.2.3 se utiliza a menudo en la teoría de la integración compleja y algunas veces se conoce como la **desigualdad *ML***. Se deduce del análisis en la página 112 de la sección 2.6 que, dado que $f$ es continua en el contorno $C$, la cota $M$ para los valores de $f(z)$ en el teorema 5.2.3 siempre existirá.

**EJEMPLO 4 Una cota para una integral de contorno**

Encontrar una cota superior para el valor absoluto de $\oint_C \frac{e^z}{z+1}\, dz$ donde $C$ es la circunferencia $|z| = 4$.

**Solución** Primero, la longitud $L$ de la circunferencia de radio 4 es $8\pi$. Ahora, de la desigualdad (7) de la sección 1.2, se deduce que para todos los puntos $z$ en la circunferencia, se tiene que $|z + 1| \geq |z| - 1 = 4 - 1 = 3$. Así

$$\left|\frac{e^z}{z+1}\right| \leq \frac{|e^z|}{|z| - 1} = \frac{|e^z|}{3}. \quad (15)$$

Además, $|e^z| = |e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)| = e^x$. Para los puntos en la circunferencia $|z| = 4$, el máximo en el que $x = \operatorname{Re}(z)$ puede ser es 4, y así de (15) se obtiene

$$\left|\frac{e^z}{z+1}\right| \leq \frac{e^4}{3}.$$

De la desigualdad *ML* (Teorema 5.2.3) tenemos

$$\left|\oint_C \frac{e^z}{z+1}\, dz\right| \leq \frac{8\pi e^4}{3}.$$

❑

## Observaciones

No hay una única parametrización para el contorno *C*. Debe comprobar que

$$z(t) = e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t, \ 0 \leq t \leq 2\pi$$
$$z(t) = e^{2\pi it} = \cos 2\pi t + i \operatorname{sen} 2\pi t, \ 0 \leq t \leq 1$$
$$z(t) = e^{\pi it/2} = \cos\frac{\pi t}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi t}{2}, \ 0 \leq t \leq 4$$

todas son parametrizaciones orientadas en el sentido positivo, para la circunferencia unitaria $|z| = 1$.

## EJERCICIOS 5.2

*Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-14.*

En los problemas 1 al 16, evalúe la integral a lo largo del contorno indicado.

1. $\int_C (z+3)\, dz$, donde $C$ es $x = 2t,\ y = 4t - 1,\ 1 \leq t \leq 3$
2. $\int_C (2\bar{z} - z)\, dz$, donde $C$ es $x = -t,\ y = t^2 + 2,\ 0 \leq t \leq 2$
3. $\int_C z^2\, dz$, donde $C$ es $z(t) = 3t + 2it,\ -2 \leq t \leq 2$
4. $\int_C (3z^2 - 2z)\, dz$, donde $C$ es $z(t) = t + it^2,\ 0 \leq t \leq 1$
5. $\int_C \frac{z+1}{z}\, dz$, donde $C$ es la mitad derecha de la circunferencia $|z| = 1$ de $z = -i$ a $z = i$
6. $\int_C |z|^2\, dz$, donde $C$ es $x = t^2,\ y = 1/t,\ 1 \leq t \leq 2$
7. $\oint_C \operatorname{Re}(z)\, dz$ donde $C$ es la circunferencia $|z| = 1$
8. $\oint_C \left(\frac{1}{(z+i)^3} - \frac{5}{z+i} + 8\right) dz$, donde $C$ es la circunferencia $|z + i| = 1$
9. $\int_C (x^2 + iy^3)\, dz$, donde $C$ es el segmento de recta de $z = 1$ a $z = i$
10. $\int_C (x^2 - iy^3)\, dz$, donde $C$ es la mitad inferior de la circunferencia $|z| = 1$ de $z = -1$ a $z = 1$

**11.** $\int_C e^z\, dz$, donde $C$ es la trayectoria poligonal que consiste en los segmentos de recta de $z = 0$ a $z = 2$ y de $z = 2$ a $z = 1 + \pi i$.

**12.** $\int_C \operatorname{sen} z\, dz$,, donde $C$ es la trayectoria poligonal que consiste en los segmentos de recta de $z = 0$ a $z = 1$ y de $z = 1$ a $z = 1 + i$.

**13.** $\int_C \operatorname{Im}(z - i)\, dz$ donde $C$ es la trayectoria poligonal que consiste del arco circular a lo largo de $|z| = 1$ de $z = 1$ a $z = i$, y el segmento de recta de $z = i$ a $z = -1$

**14.** $\int_C dz$ donde $C$ es la mitad izquierda de la elipse $\frac{1}{36}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$ de $z = 2i$ a $z = -2i$

**15.** $\oint_C ze^z\, dz$, donde $C$ es el cuadrado con vértices $z = 0$, $z = 1$, $z = 1 + i$, y $z = i$

**16.** $\int_C f(z)\, dz$, donde $f(z) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ 6x, & x > 0 \end{cases}$ y $C$ es la parábola $y = x^2$ de $z = -1 + i$ a $z = 1 + i$

En los problemas 17 al 20, evalúe la integral a lo largo del contorno $C$ dado en la figura 5.2.7.

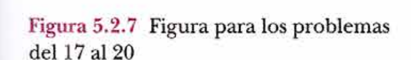


Figura 5.2.7 Figura para los problemas del 17 al 20

**17.** $\oint_C x\, dz$

**18.** $\oint_C (2z - 1)\, dz$

**19.** $\oint_C z^2\, dz$

**20.** $\oint_C \bar{z}^2\, dz$

En los problemas 21 al 24, evalúe $\int_C (z^2 - z + 2)\, dz$ de $i$ a $1$ a lo largo del contorno $C$ dado en las figuras.

**21.**

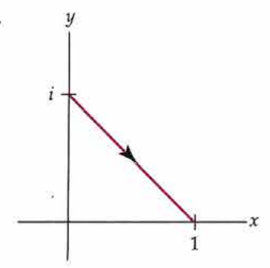



Figura 5.2.8 Figura para el problema 21

**22.**

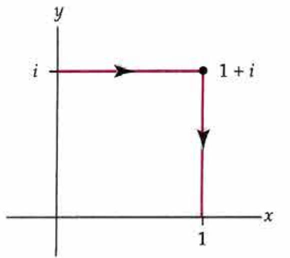



Figura 5.2.9 Figura para el problema 22

**23.**

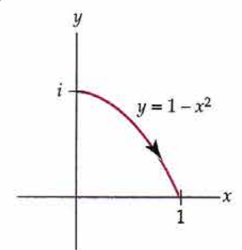



Figura 5.2.10 Figura para el problema 23

**24.**

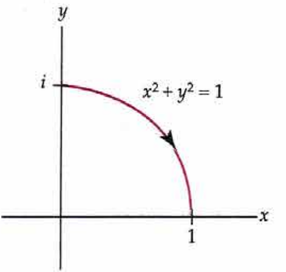



Figura 5.2.11 Figura para el problema 24

En los problemas 25 al 28, determine una cota superior para el valor absoluto de la integral a lo largo del contorno indicado.

**25.** $\oint_C \frac{e^z}{z^2 + 1}\, dz$, donde $C$ es la circunferencia $|z| = 5$

26. $\int_C \frac{1}{z^2 - 2i}\,dz$, donde $C$ es la mitad derecha de la circunferencia $|z| = 6$ de $z = -6i$ a $z = 6i$

27. $\int_C (z^2 + 4)\,dz$, donde $C$ es el segmento de recta de $z = 0$ a $z = 1 + i$

28. $\int_C \frac{1}{z^3}\,dz$, donde $C$ es un cuarto de la circunferencia $|z| = 4$ de $z = 4i$ a $z = 4$

## Enfocando los conceptos

29. **(a)** Utilice la definición 5.2.1 para demostrar que para cualquier curva suave $C$ entre $z_0$ y $z_n$ se tiene que $\int_C dz = z_n - z_0$.

**(b)** Utilice el resultado del inciso (a) para comprobar su respuesta al problema 14.

**(c)** ¿A qué es igual $\oint_C dz$ cuando $C$ es una curva cerrada simple?

30. Use la definición 5.2.1 para demostrar que para cualquier curva suave $C$ entre $z_0$ y $z_n$ se tiene que $\int_C z\,dz = \frac{1}{2}(z_n^2 - z_0^2)$. [*Sugerencia*: La integral existe. Por lo que elija $z_k^* = z_k$ y $z^*_k = z_{k-1}$].

31. Utilice los resultados de los problemas 29 y 30 para evaluar $\int_C (6z + 4)\,dz$ donde $C$ es:

**(a)** La línea recta de $1 + i$ a $2 + 3i$.

**(b)** El contorno cerrado $x^4 + y^4 = 4$.

32. Encuentre una cota superior para el valor absoluto de la integral $\int_C \frac{1}{z^2 + 1}\,dz$, donde el contorno $C$ es el segmento de recta de $z = 3$ a $z = 3 + i$. Utilice el hecho de que $|z^2 + 1| = |z - i|\,|z + i|$ dónde $|z - i|$ y $|z + i|$ representan, respectivamente, las distancias entre $i$ y $-i$ a los puntos $z$ en $C$.

33. Encuentre una cota superior para el valor absoluto de la integral $\oint_C \frac{z^2}{(z^2 + 9)^2}\,dz$, donde $C$ es una circunferencia de radio $R > 3$ centrado en el origen. Utilice el hecho de que $|z^2 + 9| = |z - 3i|\,|z + 3i|$ y aplique a cada factor la desigualdad del triángulo (10) de la sección de 1.2.

34. Encuentre una cota superior para el valor absoluto de la integral $\int_C \text{Ln}(z + 3)\,dz$, donde el contorno $C$ es el segmento de recta de $z = 3i$ a $z = 4 + 3i$.

# 5.3 Teorema de Cauchy-Goursat

En esta sección nos dedicaremos a las integrales de contorno, donde el contorno $C$ es una curva cerrada simple con una orientación positiva (sentido contrario a las manecillas del reloj). En concreto, veremos que cuando $f$ es analítica en un tipo especial de dominio $D$, el valor de la integral de contorno $\oint_C f(z)\,dz$ es el mismo para *cualquier* curva simple cerrada $C$ que se encuentra totalmente dentro de $D$. Este teorema, llamado el **teorema de Cauchy-Goursat**, es uno de *los* resultados fundamentales en el análisis complejo. Como introducción vamos a analizar el teorema de Cauchy-Goursat y algunas de sus ramificaciones, necesitamos distinguir dos tipos de dominios en el plano complejo: simplemente conexo y múltiplemente conexos.

**Dominios simplemente y múltiplemente conexos** Recuerde de la sección 1.5 que un dominio es un conjunto abierto conexo en el plano complejo. Se dice que un dominio $D$ es **simplemente conexo** si todo contorno cerrado simple $C$ que se encuentra totalmente en $D$ se puede reducir a un punto sin salir de $D$. Vea la figura 5.3.1. En otras palabras, si queremos dibujar un contorno cerrado simple $C$ de forma que se encuentre totalmente dentro

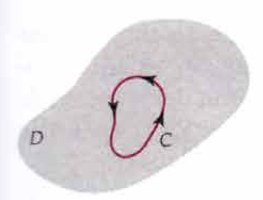



**Figura 5.3.1** Dominio simplemente conectado $D$



múltiplemente conec-

una integral ➡ integral doble

de un dominio simplemente conexo, entonces $C$ incluye sólo los puntos del dominio $D$. Expresado de otra manera, un dominio simplemente conexo no tiene "hoyos" en él. Todo el plano complejo es un ejemplo de un dominio simplemente conexo, el anillo definido por $1 < |z| < 2$ no es simplemente conexo. (¿Por qué?) Un dominio que no es simplemente conexo se llama un **dominio múltiplemente conexo**, es decir, un dominio múltiplemente conexo tiene "hoyos" en él. Observe en la figura 5.3.2 que si la curva $C_2$ que encierra el "hoyo" se reduce a un punto, la curva tendría que salir eventualmente de $D$. Llamamos un dominio con un "hoyo" **doblemente conectado**, un dominio con dos "hoyos" **triplemente conectado**, y así sucesivamente. El disco abierto definido por $|z| < 2$ es un dominio simplemente conexo, el anillo circular abierto definido por $1 < |z| < 2$ es un dominio doblemente conectado.

**Teorema de Cauchy** En 1825 el matemático francés Louis-Augustin Cauchy demostró uno de los teoremas más importantes del análisis complejo.

> ***Teorema de Cauchy***
>
> *Supongamos que una función $f$ es analítica en un dominio simplemente conexo $D$ y que $f'$ es continua en $D$. Entonces para todo contorno cerrado simple $C$ en $D$, $\oint_C f(z)\,dz = 0$.* (1)

**Demostración de Cauchy (1)** La demostración de este teorema es una consecuencia inmediata del teorema de Green en el plano y de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Recuerde del cálculo que si $C$ es una curva con orientación positiva, suave por tramos, simple cerrada que forma la frontera de una región $R$ dentro de $D$, y si las funciones con valores reales $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ junto con sus derivadas parciales de primer orden son continuas en un dominio que contiene a $C$ y $R$, entonces

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA. \tag{2}$$

Ahora, en el enunciado (1) hemos supuesto que $f'$ es continua en todo el dominio $D$. Entonces, las partes real e imaginaria de $f(z) = u + iv$ y sus primeras derivadas parciales son continuas en $D$. Por (9) de la sección 5.2 escribimos $\oint_C f(z)\,dz$ en términos de integrales de línea reales y aplicamos el teorema de Green (2) para cada integral de línea:

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\,dz &= \oint_C u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i\oint_C v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy \\ &= \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dA + i\iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dA. \end{aligned} \tag{3}$$

Debido a que $f$ es analítica en $D$, las funciones reales $u$ y $v$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ y $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$, en cada punto de $D$. Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann se sustituyen $\partial u/\partial y$ y $\partial u/\partial x$ en (3) se demuestra que

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\,dz &= \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dA + i\iint_R \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dA \\ &= \iint_R (0)\,dA + i\iint_R (0)\,dA = 0.\end{aligned}$$

Esto completa la demostración. ❑

En 1883 el matemático francés Edouard Goursat demostró que no es necesaria la hipótesis de continuidad de $f'$ para llegar a la conclusión del

teorema de Cauchy. La versión resultante modificada del teorema de Cauchy hoy se conoce como el **teorema de Cauchy-Goursat**. Como era de esperar, con menos hipótesis, la demostración de esta versión del teorema de Cauchy es más complicada que la que se acaba de presentar. En el Apéndice II se describe una forma de la demostración diseñada por Goursat.

**Teorema 5.3.1 Teorema de Cauchy-Goursat**

Suponga que una función $f$ es analítica en un dominio simplemente conexo $D$. Entonces para todo contorno cerrado simple $C$ en $D$, $\oint_C f(z)\,dz = 0$.

Ya que el interior de un contorno cerrado simple es un dominio simplemente conexo, el Teorema de Cauchy-Goursat se puede establecer de una forma un poco más práctica:

*Si $f$ es analítica en todos los puntos dentro y sobre un contorno $C$ simple cerrado, entonces $\oint_C f(z)\,dz = 0$.* (4)

### EJEMPLO 1 Aplicación del teorema de Cauchy-Goursat

Evalúe $\oint_C e^z\,dz$, donde el contorno $C$ se muestra en la figura 5.3.3.

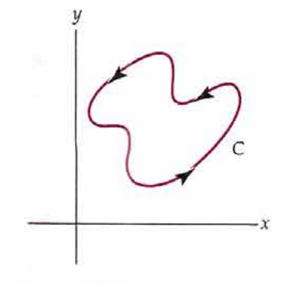


Figura 5.3.3 Contorno para el ejemplo 1

**Solución** La función $f(z) = e^z$ es entera y por tanto es analítica en todos los puntos dentro y sobre el contorno cerrado simple $C$. Se deduce de la forma del teorema de Cauchy-Goursat dado en (4) que $\oint_C e^z\,dz = 0$. ❑

El punto del ejemplo 1 es que $\oint_C e^z\,dz = 0$ para *cualquier* contorno cerrado simple en el plano complejo. De hecho, se deduce que para cualquier contorno cerrado simple $C$ y para cualquier función entera $f$, tal como $f(z) = \operatorname{sen} z$, $f(z) = \cos z$, y $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, que

$$\oint_C \operatorname{sen} z\,dz = 0, \quad \oint_C \cos z\,dz = 0, \quad \oint_C p(z)\,dz = 0,$$

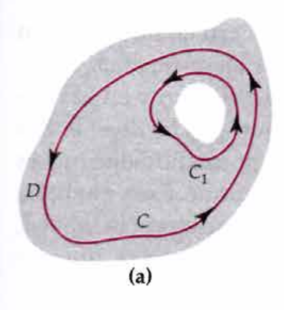
y así sucesivamente.

### EJEMPLO 2 Aplicación del teorema de Cauchy-Goursat

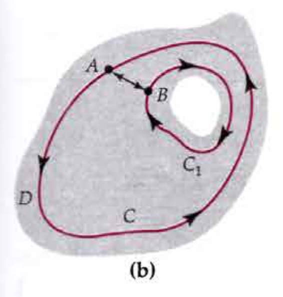
Evalúe $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{z^2}$, donde el contorno $C$ es la elipse $(x-2)^2 + \frac{1}{4}(y-5)^2 = 1$.

**Solución** La función racional $f(z) = 1/z^2$ es analítica en todo punto excepto en $z = 0$. Pero $z = 0$ no es un punto interior a o sobre el contorno elíptico cerrado simple $C$. Por tanto, de (4) tenemos que $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{z^2} = 0$. ❑

**Teorema de Cauchy-Goursat para dominios múltiplemente conexos** Si $f$ es analítica en un dominio $D$ múltiplemente conexo, entonces no podemos concluir que $\oint_C f(z)\,dz = 0$ para cada contorno cerrado simple $C$ en $D$. Para empezar, supongamos que $D$ es un dominio doblemente conexo y que $C$ y $C_1$ son contornos simples cerrados de tal manera que $C_1$



(a)



(b)

**Figura 5.3.4** Dominio doblemente conexo $D$

rodea el "hoyo" en el dominio y es interior a $C$. Vea la figura 5.3.4(a). Supongamos también que $f$ es analítica en cada contorno y en cada punto interior a $C$, pero exterior a $C_1$. Al introducir el corte transversal $AB$ que se muestra en la figura 5.3.4(b), la región limitada entre las curvas ahora es simplemente conexa. De (*iv*) del teorema 5.2.2, la integral de $A$ a $B$ tiene el valor opuesto de la integral de $B$ a $A$, y así de (4) tenemos

$$\oint_C f(z)\,dz + \int_{AB} f(z)\,dz + \int_{-AB} f(z)\,dz + \oint_{C_1} f(z)\,dz = 0$$

o

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz. \tag{5}$$

El último resultado a veces se llama el **principio de la deformación de contornos** ya que podemos pensar en el contorno $C_1$ como una deformación permanente del contorno $C$. Bajo esta deformación de contornos, si la región entre $C$ y $C_1$ contiene sólo puntos donde $f$ es analítica, entonces el valor de la integral no cambia. En otras palabras, (5) nos permite evaluar una integral sobre un complicado contorno cerrado simple $C$, sustituyendo a $C$ por un contorno $C_1$ que es más conveniente.

### EJEMPLO 3 Aplicación de la deformación de contornos

Evalúe $\oint_C \frac{dz}{z-i}$, donde $C$ es el contorno en negro en la figura 5.3.5.

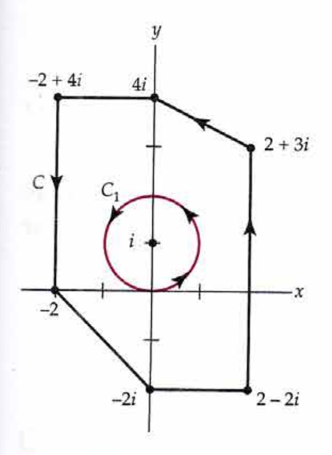



**Figura 5.3.5** Usamos el contorno $C_1$ más simple del ejemplo 3

**Solución** Observe que $f(z) = \frac{1}{z - i}$ es analítica en el dominio múltiplemente conexo que consiste del plano complejo excluyendo al punto $z = i$. De acuerdo con (5), elegimos el contorno circular más conveniente $C_1$ dibujado a color en la figura. Haciendo que el radio de la circunferencia sea $r = 1$, estamos garantizando que $C_1$ se encuentra dentro de $C$. En otras palabras, $C_1$ es la circunferencia $|z - i| = 1$, que a partir de (10) de la sección 2.2 se puede parametrizar por $z = i + e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. De $z - i = e^{it}$ y $dz = ie^{it}\,dt$ obtenemos

$$\oint_C \frac{dz}{z-i} = \oint_{C_1} \frac{dz}{z-i} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}}\,dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

❑

El resultado obtenido en el ejemplo 3 se puede generalizar. Utilizando el principio de la deformación de contornos (5) y procediendo como en el ejemplo, se puede demostrar que si $z_0$ es cualquier número complejo constante interior a *cualquier* contorno cerrado simple $C$, entonces para $n$ un entero tenemos

$$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i & n = 1 \\ 0, & n \ne 1. \end{cases} \tag{6}$$

El hecho de que la integral en (6) sea igual a cero cuando $n \ne 1$ se deduce sólo en parte del teorema de Cauchy-Goursat. Cuando $n$ es cero o un entero negativo, $1/(z - z_0)^n$ es un *polinomio* y, por tanto, entera. El teorema 5.3.1 y el análisis que sigue al ejemplo 1 indican que $\oint_C dz/(z - z_0)^n = 0$. Se deja

Por ejemplo $1/(z - z_0)^{-3} = (z - z_0)^3$ es un ➡ polinomio.

como ejercicio demostrar que la integral sigue siendo cero cuando $n$ es un entero positivo distinto de 1. Vea el problema 24 de los ejercicios 5.3.

La analiticidad de la función $f$ en todos los puntos dentro y en el contorno cerrado simple $C$ es *suficiente* para garantizar que $\oint_C f(z)\,dz = 0$. Sin embargo, el resultado en (6) hace hincapié en que la analiticidad no es *necesaria*, es decir, puede suceder que $\oint_C f(z)\,dz = 0$ sin que $f$ sea analítica dentro de $C$. Por ejemplo, si $C$ en el ejemplo 2 es la circunferencia $|z| = 1$, entonces (6), identificando $n = 2$ y $z_0 = 0$, inmediatamente se obtiene $\oint_C \frac{dz}{z^2} = 0$. Observe que $f(z) = 1/z^2$ no es analítica en $z = 0$ dentro de $C$.

**EJEMPLO 4 Aplicación de la fórmula (6)**

Evalúe $\oint_C \frac{5z+7}{z^2+2z-3}\,dz$, donde $C$ es la circunferencia $|z-2| = 2$.

**Solución** Factorizando el denominador $z^2 + 2z - 3 = (z-1)(z+3)$ el integrando no es analítico en $z = 1$ y en $z = -3$. De estos dos puntos, sólo $z = 1$ se encuentra dentro del contorno $C$, que es una circunferencia centrada en $z = 2$ de radio $r = 2$. Ahora por fracciones parciales

$$\frac{5z+7}{z^2+2z-3} = \frac{3}{z-1} + \frac{2}{z+3}$$

y así,
$$\oint_C \frac{5z+7}{z^2+2z-3}\,dz = 3\oint_C \frac{1}{z-1}\,dz + 2\oint_C \frac{1}{z+3}\,dz. \tag{7}$$

De acuerdo con el resultado dado en (6), la primera integral en (7) tiene el valor de $2\pi i$, mientras que por el teorema de Cauchy-Goursat el valor de la segunda integral es 0. Por tanto, (7) se convierte en

$$\oint_C \frac{5z+7}{z^2+2z-3}\,dz = 3(2\pi i) + 2(0) = 6\pi i.$$

❑

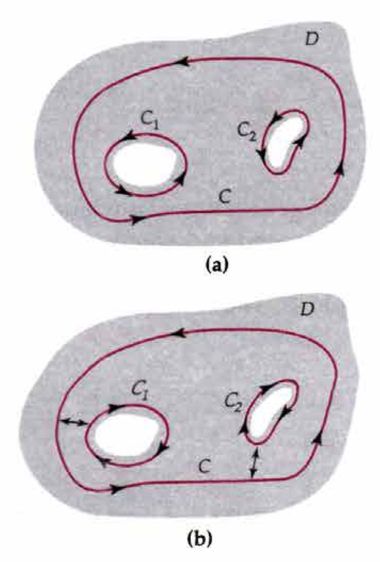



**Figura 5.3.6** Dominio $D$ triplemente conectado

Si $C$, $C_1$ y $C_2$ son contornos cerrados simples como se muestra en la figura 5.3.6(a) y si $f$ es analítica en cada uno de los tres contornos, así como en cada punto interior a $C$, pero exterior tanto a $C_1$ como a $C_2$, entonces introduciendo cortes transversales entre $C_1$ y $C$ y entre $C_2$ y $C$, como se muestra en la figura 5.3.6(b), se tiene por el teorema 5.3.1 que

$$\oint_C f(z)\,dz + \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz = 0$$

y así,
$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz. \tag{7}$$

El siguiente teorema resume el resultado general para un dominio múltiplemente conexo con $n$ "hoyos".

**Teorema 5.3.2 Teorema de Cauchy-Goursat para dominios multiplemente conexos.**

Supongamos que $C$, $C_1$, ..., $C_n$ son curvas simples cerradas con una orientación positiva tal que $C_1$, $C_2$, ..., $C_n$ son interiores a $C$, pero las regiones interiores a cada $C_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, no tienen puntos en común. Si $f$ es analítica en cada contorno y en cada punto interior a $C$, pero exterior a todas las $C_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, entonces

$$\oint_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\,dz. \tag{8}$$

## EJEMPLO 5 Aplicando el teorema 5.3.2

Evalúe $\oint_C \frac{dz}{z^2+1}$, donde $C$ es la circunferencia $|z| = 4$.

**Solución** En este caso, factorizando el denominador del integrando como, $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$. Por consiguiente, el integrando $1/(z^2 + 1)$ no es una función analítica en $z = i$ y en $z = -i$. Estos dos puntos están dentro del contorno $C$. Usando una vez más descomposición en fracciones parciales, tenemos

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i} - \frac{1}{2i}\frac{1}{z+i}$$

y

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\oint_C \left[\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right] dz.$$

Ahora rodeando los puntos $z = i$ y $z = -i$ con contornos circulares $C_1$ y $C_2$, respectivamente, que están totalmente dentro de $C$. En concreto, la elección $|z - i| = \frac{1}{2}$ para $C_1$ y $|z + i| = \frac{1}{2}$ para $C_2$ será suficiente. Vea la figura 5.3.7. Del teorema 5.3.2 podemos escribir

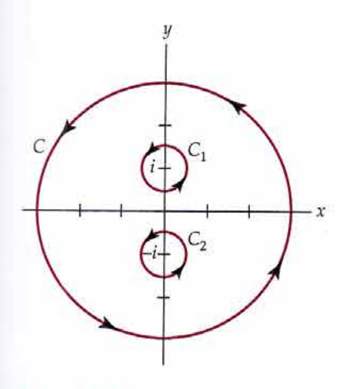



Figura 5.3.7 Contorno para el ejemplo 5

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\oint_{C_1}\left[\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right] dz + \frac{1}{2i}\oint_{C_2}\left[\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right] dz$$

$$= \frac{1}{2i}\oint_{C_1}\frac{1}{z-i}dz - \frac{1}{2i}\oint_{C_1}\frac{1}{z+i}dz + \frac{1}{2i}\oint_{C_2}\frac{1}{z-i}dz - \frac{1}{2i}\oint_{C_2}\frac{1}{z+i}dz. \tag{9}$$

Debido a que $1/(z + i)$ es analítica en $C_1$ y en cada punto de su interior, y ya que $1/(z - i)$ es analítica en $C_2$ y en cada punto en su interior, se tiene de (4) que la segunda y tercera integrales en (9) son cero. Además, se tiene de (6), con $n = 1$, que

$$\oint_{C_1}\frac{dz}{z-i} = 2\pi i \quad \text{y} \quad \oint_{C_2}\frac{dz}{z+i} = 2\pi i.$$

Por lo que (9) se convierte en

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+1} = \pi - \pi = 0.$$

❑

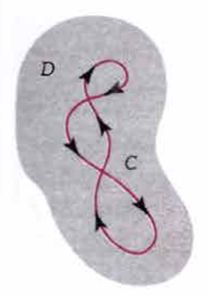


Figura 5.3.8 El contorno C es cerrado pero no es simple

## Observaciones

En todo el análisis anterior hemos supuesto que $C$ era un contorno simple cerrado, es decir, $C$ no se cruzaba consigo misma. Aunque no presentaremos la demostración, se puede demostrar que el teorema de Cauchy-Goursat es válido para cualquier contorno cerrado $C$ en un dominio simplemente conexo $D$. Como se muestra en la figura 5.3.8, el contorno $C$ es cerrado pero no simple. Sin embargo, si $f$ es analítica en $D$, entonces $\oint_C f(z)\,dz = 0$. Vea el problema 23 de los ejercicios 5.3.

## EJERCICIOS 5.3 *Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-14.*

En los problemas 1 al 8, muestre que $\oint_C f(z)\,dz = 0$, donde $f$ es la función dada y $C$ es la circunferencia unitaria $|z| = 1$.

**1.** $f(z) = z^3 - 1 + 3i$

**2.** $f(z) = z^2 + \dfrac{1}{z-4}$

**3.** $f(z) = \dfrac{z}{2z+3}$

**4.** $f(z) = \dfrac{z-3}{z^2+2z+2}$

**5.** $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{(z^2-25)(z^2+9)}$

**6.** $f(z) = \dfrac{e^z}{2z^2+11z+15}$

**7.** $f(z) = \tan z$

**8.** $f(z) = \dfrac{z^2-9}{\cosh z}$

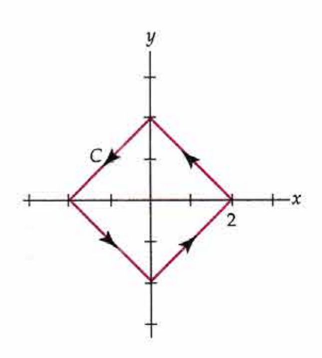


Figura 5.3.9 Figura para el problema 9

**9.** Evalúe $\oint_C \dfrac{1}{z}\,dz$, donde $C$ es el contorno de la figura 5.3.9.

**10.** Evalúe $\oint_C \dfrac{5}{z+1+i}\,dz$, donde $C$ es el contorno de la figura 5.3.10.

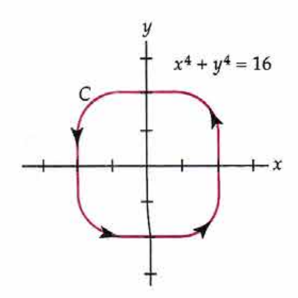


*Figura 5.3.10 Figura para el problema 10*

En los problemas 11 al 22, utilice cualquiera de los resultados de esta sección para evaluar la integral a lo largo del(los) contorno(s) indicado(s) cerrado(s).

**11.** $\oint_C \left(z + \dfrac{1}{z}\right) dz;\ |z| = 2$

**12.** $\oint_C \left(z + \dfrac{1}{z^2}\right) dz;\ |z| = 2$

**13.** $\oint_C \dfrac{z}{z^2-\pi^2}\,dz;\ |z| = 3$

**14.** $\oint_C \dfrac{10}{(z+i)^4}\,dz;\ |z+i| = 1$

**15.** $\oint_C \dfrac{2z+1}{z^2+z}\,dz;$ **(a)** $|z| = \frac{1}{2}$, **(b)** $|z| = 2$, **(c)** $|z-3i| = 1$

**16.** $\oint_C \dfrac{2z}{z^2+3}\,dz;$ **(a)** $|z| = 1$, **(b)** $|z-2i| = 1$, **(c)** $|z| = 4$

**17.** $\oint_C \dfrac{-3z+2}{z^2-8z+12}\,dz;$ **(a)** $|z-5| = 2$, **(b)** $|z| = 9$

**18.** $\oint_C \left(\dfrac{3}{z+2} - \dfrac{1}{z-2i}\right) dz;$ **(a)** $|z| = 5$, **(b)** $|z-2i| = \frac{1}{2}$

**19.** $\oint_C \dfrac{z-1}{z(z-i)(z-3i)}\,dz;\ |z-i| = \frac{1}{2}$

**20.** $\oint_C \dfrac{1}{z^3+2iz^2}\,dz;\ |z| = 1$

**21.** $\oint_C \operatorname{Ln}(z+10)\,dz;\ |z| = 2$

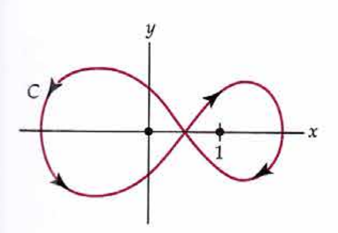


Figura 5.3.11 Figura para el problema 23

**22.** $\oint_C \left[\frac{5}{(z-2)^3} + \frac{3}{(z-2)^2} - \frac{10}{z-2} + 7\csc z\right] dz;\ |z-2| = \frac{1}{2}$

**23.** Evalúe $\oint_C \frac{8z-3}{z^2-z}\,dz$, donde $C$ es la "forma de ocho" del contorno de la figura 5.3.11. [*Sugerencia:* Exprese $C$ como la unión de dos curvas cerradas $C_1$ y $C_2$].

**24.** Supongamos que $z_0$ es cualquier número complejo constante interior a cualquier curva simple cerrada del contorno $C$. Muestre que para un entero positivo $n$,

$$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n=1 \\ 0, & n>1. \end{cases}$$

En los problemas 25 y 26, evalúe la integral de contorno dada por cualquier medio.

**25.** $\oint_C \left(\frac{e^z}{z+3} - 3\bar{z}\right) dz$, donde $C$ es la circunferencia unitaria $|z| = 1$

**26.** $\oint_C \left(z^3 + z^2 + \mathrm{Re}(z)\right) dz$, donde $C_1$ es el triángulo con vértices $z = 0$, $z = 1 + 2i$, y $z = 1$

## Enfocando los conceptos

**27.** Explique por qué $\oint_C f(z)\,dz = 0$ para cada una de las siguientes funciones y $C$ es cualquier contorno cerrado simple en el plano complejo.

(a) $f(z) = (5iz^4 - 4z^2 + 2 - 6i)^9$ (b) $f(z) = (z^2 - 3iz)e^{5z}$

(c) $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{e^{z^2}}$ (d) $f(z) = z\cos^2 z$

**28.** Describa contornos $C$ para los que hemos garantizado que $\oint_C f(z)\,dz = 0$ para cada una de las siguientes funciones.

(a) $f(z) = \frac{1}{z^3+z}$ (b) $f(z) = \csc z$

(c) $f(z) = \frac{1}{1-e^z}$ (d) $f(z) = \mathrm{Ln}\, z$

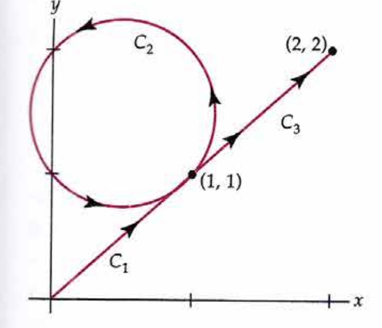


Figura 5.3.12 Figura para el problema 30

**29.** Explique por qué la integral en el problema 25 es igual a

$$\oint_C \left(\frac{e^z}{z+3} - \frac{3}{z}\right) dz$$

y por qué, usando (6), esta forma hace que la integral sea un poco más fácil de evaluar.

**30.** Evalúe $\int_C e^z\,dz$ de $z = 0$ a $z = 2 + 2i$ sobre el contorno $C$ de la figura 5.3.12 que consiste en la recta $y = x$ y una circunferencia tangente a la recta en $(1, 1)$.

**31.** Del ejemplo 1 conocemos el valor de $\oint_C e^z\,dz$ para cualquier contorno cerrado simple $C$ en el plano complejo. En particular, use $|z| = 1$ como $C$ y la parametrización $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta < 2\pi$, para determinar los valores de las integrales reales

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\operatorname{sen}(\theta + \operatorname{sen}\theta)\,d\theta \quad \text{y} \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\theta + \operatorname{sen}\theta)\,d\theta.$$

**32.** Sea $n$ un entero positivo. Use una integral de contorno compleja para demostrar que

$$\int_0^{2\pi} e^{\operatorname{sen} n\theta}\cos(\theta - \cos n\theta)\,d\theta = 0 \quad \text{y} \quad \int_0^{2\pi} e^{\operatorname{sen} n\theta}\operatorname{sen}(\theta - \cos n\theta)\,d\theta = 0.$$

[*Sugerencia:* Modifique el integrando del problema 31].

## 5.4 Independencia de la trayectoria

En la sección 5.1 vimos que cuando una función real $f$ tiene una antiderivada elemental que es, una función $F$ para la que $F'(x) = f(x)$, una integral definida se puede evaluar con el teorema fundamental del cálculo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

Observe que $\int_a^b f(x)\,dx$ depende sólo de los números $a$ y $b$ en los puntos inicial y final del intervalo de integración. En contraste, el valor de una integral de línea real $\int_C P\,dx + Q\,dy$ generalmente depende de la curva $C$. Sin embargo, existen integrales $\int_C P\,dx + Q\,dy$ cuyo valor depende sólo del punto inicial $A$ y del punto final $B$ de la curva $C$ y no de $C$ misma. En este caso decimos que la integral de línea es **independiente de la trayectoria**. Por ejemplo, $\int_C y\,dx + x\,dy$ es independiente de la trayectoria. Vea los problemas del 19 al 22 en los ejercicios 5.1. Una integral de línea, que es independiente de la trayectoria se puede evaluar de forma similar a (1). Parece natural, entonces preguntar:

*¿Existe una versión compleja del teorema fundamental del cálculo? ¿Puede una integral de contorno $\int_C f(z)\,dz$ ser independiente de la trayectoria?*

En esta sección veremos que la respuesta a ambas preguntas es sí.

**Independencia de la trayectoria** La definición de **independencia de la trayectoria** para una integral de contorno $\int_C f(z)\,dz$ es esencialmente la misma que para una integral de línea real $\int_C P\,dx + Q\,dy$.

**Definición 5.4.1 Independencia de la trayectoria**

Sean $z_0$ y $z_1$ puntos en un dominio $D$. Una integral de contorno $\int_C f(z)\,dz$ se dice que es **independiente de la trayectoria** si su valor es el mismo para todos los contornos $C$ en $D$ con el punto inicial $z_0$ y el punto final $z_1$.

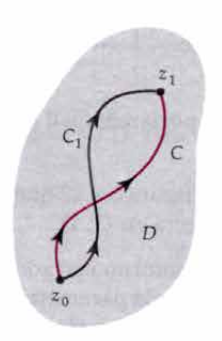



**Figura 5.4.1** Si $f$ es analítica en $D$, las integrales sobre $C$ y $C_1$ son iguales

Al final de la sección anterior se observó que el teorema de Cauchy-Goursat también es válido para contornos cerrados, no sólo para contornos cerrados simples, en un dominio simplemente conexo $D$. Ahora supongamos que, como se muestra en la figura 5.4.1, que $C$ y $C_1$ son dos contornos situados totalmente en un dominio simplemente conexo $D$ y ambos con punto inicial $z_0$ y punto final $z_1$. Observe que $C$ unida a la curva opuesta $-C_1$ forman un contorno cerrado. Por tanto, si $f$ es analítica en $D$, se deduce del teorema de Cauchy-Goursat que

$$\int_C f(z)\,dz + \int_{-C_1} f(z)\,dz = 0. \tag{2}$$

Pero (2) es equivalente a

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz. \tag{3}$$

El resultado en (3) también es un ejemplo del principio de la deformación de los contornos introducido en (5) de la sección 5.3. Resumimos el último resultado como un teorema.

**Teorema 5.4.1 Analiticidad implica independencia de trayectoria**

Suponga que una función $f$ es analítica en un dominio simplemente conexo $D$ y $C$ es cualquier contorno en $D$. Entonces $\int_C f(z)\,dz$ es independiente de la trayectoria $C$.

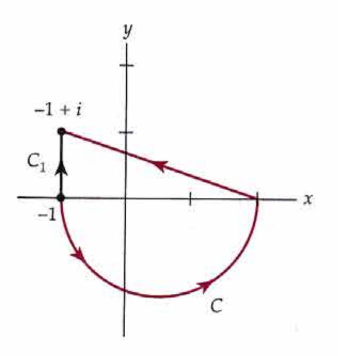



**Figura 5.4.2** Contorno para el ejemplo 1

### EJEMPLO 1 Elección de una trayectoria diferente

Evalúe $\int_C 2z\,dz$, donde $C$ es el contorno que se muestra a color en la figura 5.4.2.

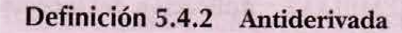
**Solución** Puesto que la función $f(z) = 2z$ es entera, podemos, de acuerdo con el Teorema 5.4.1, reemplazar la trayectoria $C$ suave por tramos por cualquier contorno conveniente $C_1$ uniendo $z_0 = -1$ y $z_1 = -1 + i$. En concreto, si elegimos el contorno $C_1$ como el segmento de recta vertical $x = -1$, $0 \le y \le 1$, que se muestra en negro en la figura 5.4.2, entonces $z = -1 + iy$ y $dz = i dy$. Por tanto,

$$\int_C 2z\,dz = \int_{C_1} 2z\,dz = -2\int_0^1 y\,dy - 2i\int_0^1 dy = -1 - 2i.$$

❑

Una integral de contorno $\int_C f(z)\,dz$, que es independiente de la trayectoria $C$ se suele escribir $\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz$, donde $z_0$ y $z_1$ son los puntos inicial y final de $C$. Por tanto, en el ejemplo 1 podemos escribir $\int_{-1}^{-1+i} 2z\,dz$.

Hay una forma más fácil de evaluar la integral de contorno del ejemplo 1, pero antes de continuar se necesita otra definición.



**Definición 5.4.2 Antiderivada**

Suponga que una función $f$ es continua en un dominio $D$. Si existe una función $F$ tal que $F'(z) = f(z)$ para cada $z$ en $D$, entonces $F$ se llama una **antiderivada** de $f$.

Por ejemplo, la función $F(z) = -\cos z$ es una antiderivada de $f(z) = \operatorname{sen} z$ ya que $F'(z) = \operatorname{sen} z$. Al igual que en el cálculo de una variable real, la antiderivada más general, o **integral indefinida** de una función $f(z)$ se escribe como $\int f(z)\,dz = F(z) + C$, donde $F'(z) = f(z)$ y $C$, es una constante compleja. Por ejemplo, $\int \operatorname{sen} z\,dz = -\cos z + C$.

Puesto que una antiderivada $F$ de una función $f$ tiene una derivada en cada punto en un dominio $D$, es necesariamente analítica y por tanto, continua en cada punto de $D$.

Recordemos, derivabilidad implica continuidad.

Ahora estamos en condiciones de demostrar el análogo complejo de (1).

**Teorema 5.4.2 Teorema fundamental del cálculo para integrales de contorno**

Suponga que una función $f$ es continua en un dominio $D$ y $F$ es una antiderivada de $f$ en $D$. Entonces, para cualquier contorno $C$ en $D$ con punto inicial $z_0$ y punto final $z_1$,

$$\int_C f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0). \qquad (4)$$

**Demostración** Demostraremos (4) en el caso en que C es una curva suave parametrizada por $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$. Los puntos inicial y final de C son entonces $z(a) = z_0$ y $z(b) = z_1$. Utilizando (11) de la sección 5.2 y el hecho de que $F'(z) = f(z)$ para todo $z$ en $D$, entonces, tenemos

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt = \int_a^b F'(z(t))z'(t)\,dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}F(z(t))\,dt \quad \leftarrow \text{regla de la cadena} \\ &= F(z(t))\Big|_a^b \\ &= F(z(b)) - F(z(a)) = F(z_1) - F(z_0).\end{aligned}$$

❑

**EJEMPLO 2 Aplicación del teorema 5.4.2**

En el ejemplo 1, vimos que la integral $\int_C 2z\,dz$, donde $C$ se muestra en la figura 5.4.2, es independiente de la trayectoria. Ahora, puesto que $f(z) = 2z$ es una función entera, es continua. Además, $F(z) = z^2$ es una antiderivada de $f$ ya que $F'(z) = 2z = f(z)$. Por tanto, de (4) del teorema 5.4.2 tenemos

$$\int_{-1}^{-1+i} 2z\,dz = z^2\Big|_{-1}^{-1+i} = (-1+i)^2 - (-1)^2 = -1 - 2i.$$

❑

**EJEMPLO 3 Aplicación del teorema 5.4.2**

Evalúe $\int_C \cos z\,dz$, donde $C$ es cualquier contorno con punto inicial de $z_0 = 0$ y punto final $z_1 = 2 + i$.

**Solución** $F(z) = \text{sen}\,z$ es una antiderivada de $f(z) = \cos z$ ya que $F'(z) = \cos z = f(z)$. Por tanto, de (4) tenemos

$$\int_C \cos z\,dz = \int_0^{2+i} \cos z\,dz = \text{sen}\,z\Big|_0^{2+i} = \text{sen}(2+i) - \text{sen}\,0 = \text{sen}\,(2+i).$$

Si deseamos un número complejo de la forma $a + ib$ como una respuesta, podemos utilizar $\text{sen}\,(2+i) \approx 1.4031 - 0.4891i$ (vea el inciso (b) del ejemplo 1 de la sección 4.3). Por tanto,

$$\int_C \cos z\,dz = \int_0^{2+i} \cos z\,dz \approx 1.4031 - 0.4891i.$$

❑

## Algunas conclusiones

Podemos sacar varias conclusiones inmediatas del Teorema 5.4.2. Primero, observamos que si el contorno $C$ es cerrado, $z_0 = z_1$ y, en consecuencia,

$$\oint_C f(z)\,dz = 0. \tag{5}$$

A continuación, ya que el valor de $\int_C f(z)\,dz$ sólo depende de los puntos $z_0$ y $z_1$, este valor es el mismo para cualquier contorno $C$ en $D$ que conecta estos puntos. En otras palabras:

> *Si una función continua f tiene una antiderivada F en D, entonces $\int_C f(z)\,dz$ es independiente de la trayectoria.* (6)

Además, tenemos la siguiente condición de suficiencia para la existencia de una antiderivada.

> *Si f es continua y $\int_C f(z)\,dz$ es independiente de la trayectoria C en un dominio D, entonces f tiene una antiderivada en todo punto en D.* (7)

El último enunciado es importante y merece una demostración.

**Demostración de (7)** Supongamos que $f$ es continua y $\int_C f(z)\,dz$ es independiente de la trayectoria en un dominio $D$ y que $F$ es una función definida por $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)\,ds$, donde $s$ denota una variable compleja, $z_0$ es un punto fijo en $D$, y $z$ representa cualquier punto de $D$. Queremos demostrar que $F'(z) = f(z)$, es decir,

*Importante* ➡

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)\,ds \tag{8}$$

*es una antiderivada de f en D.* Ahora,

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(s)\,ds - \int_{z_0}^{z} f(s)\,ds = \int_{z}^{z+\Delta z} f(s)\,ds. \tag{9}$$

Debido a que $D$ es un dominio, podemos elegir $\Delta z$ de manera que $z + \Delta z$ este en $D$. Además, $z$ y $z + \Delta z$ se pueden unir por un segmento de recta como el que se muestra en la figura 5.4.3. Este es el contorno que utilizamos en la última integral en (9). Con $z$ fijo, podemos escribir

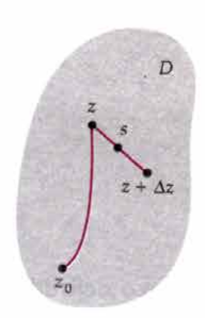



**Figura 5.4.3** Contorno utilizado en la demostración de (7)

$$f(z)\Delta z = f(z)\int_{z}^{z+\Delta z} ds = \int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\,ds$$

o

$$f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\,ds. \tag{10}$$

De (9) y (10) tenemos

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} [f(s) - f(z)]\,ds.$$

Ahora $f$ es continua en el punto $z$. Esto significa que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que $|f(s) - f(z)| < \varepsilon$ siempre que $|s - z| < \delta$. Por consiguiente, si elegimos $\Delta z$ tal que $|\Delta z| < \delta$, se deduce de la desigualdad $ML$ de la sección 5.2 que

$$\left|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} [f(s) - f(z)]\,ds\right|$$

$$= \left|\frac{1}{\Delta z}\right|\left|\int_{z}^{z+\Delta z} [f(s) - f(z)]\,ds\right| \le \left|\frac{1}{\Delta z}\right|\varepsilon|\Delta z| = \varepsilon.$$

Por tanto, hemos demostrado que

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} = f(z) \quad \text{o} \quad F'(z) = f(z). \qquad \square$$

Si $f$ es una función analítica en un dominio simplemente conexo $D$, necesariamente es continua en $D$. Este hecho, cuando se pone junto con los resultados del teorema 5.4.1 y (7), conduce a un teorema que afirma que una función analítica tiene una antiderivada analítica.

**Teorema 5.4.3 Existencia de una antiderivada**

Suponga que una función $f$ es analítica en un dominio simplemente conexo $D$. Entonces $f$ tiene una antiderivada en $D$, es decir, existe una función $F$ tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z$ en $D$.

En (21) de la sección 4.1 vimos por $|z| > 0$, $-\pi < \arg(z) < \pi$, que $1/z$ es la derivada de Ln $z$. Esto significa que, bajo algunas circunstancias Ln $z$ es una antiderivada de $1/z$. Pero se debe tener cuidado en el uso de este resultado. Por ejemplo, supongamos que $D$ es todo el plano complejo, sin el origen. La función $1/z$ es analítica en este dominio *múltiplemente conexo.* Si $C$ es cualquier contorno cerrado simple que contenga al origen, no se tiene de (5) que $\oint_C dz/z = 0$. De hecho, de (6) de la sección 5.3 con $n = 1$ e identificando $z_0 = 0$, vemos que

Tenga cuidado al usar Ln $z$ como una antiderivada de $1/z$.

$$\oint_C \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i.$$

En este caso, Ln $z$ no es una antiderivada de $1/z$ en $D$, ya que Ln $z$ no es analítica en $D$. Recuerde, Ln $z$ no es analítica en el eje real no positivo, que es el corte de rama de la rama principal $f_1(z)$ del logaritmo. Vea la página 168 en la sección 4.1.

**EJEMPLO 4 Uso de la función logarítmica**

Evalúe $\int_C \frac{1}{z}\, dz$, donde $C$ es el contorno de la figura 5.4.4.

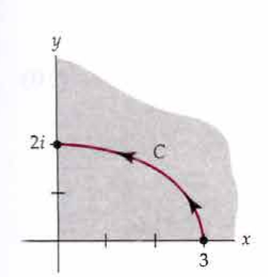


**Figura 5.4.4** Contorno para el ejemplo 4

**Solución** Supongamos que $D$ es el dominio simplemente conexo definido por $x > 0$, $y > 0$, en otras palabras, $D$ es el primer cuadrante en el plano $z$. En este caso, Ln $z$ es una antiderivada de $1/z$, ya que estas dos funciones son analíticas en $D$. Por tanto por (4),

$$\int_3^{2i} \frac{1}{z}\, dz = \text{Ln } z\Big|_3^{2i} = \text{Ln } 2i - \text{Ln } 3.$$

De (14) de la sección 4.1,

$$\text{Ln } 2i = \log_e 2 + \frac{\pi}{2}i \quad \text{y} \quad \text{Ln } 3 = \log_e 3$$

$\log_e 2 - \log_e 3 = \log_e \frac{2}{3}$

y así,

$$\int_3^{2i} \frac{1}{z}\, dz = \log_e \frac{2}{3} + \frac{\pi}{2}i \approx -0.4055 + 1.5708i. \qquad \square$$

**EJEMPLO 5 Uso de una antiderivada de $z^{-1/2}$**

Evalúe $\int_C \frac{1}{z^{1/2}}\,dz$, donde C es el segmento de recta entre $z_0 = i$ y $z_1 = 9$.

**Solución** En todas partes, tomamos $f_1(z) = z^{1/2}$ como la rama principal de la función raíz cuadrada. En el dominio $|z| > 0$, $-\pi < \arg(z) < \pi$, la función $f_1(z) = 1/z^{1/2} = z^{-1/2}$ es analítica y tiene la derivada $F(z) = 2z^{1/2}$ (vea (9) en la sección 4.2). Por tanto,

Vea el problema 5 en los ejercicios 1.4

$$\int_i^9 \frac{1}{z^{1/2}}dz = 2z^{1/2}\Big|_i^9 = 2\left[3 - \overbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\right]$$
$$= (6 - \sqrt{2}) - i\sqrt{2}.$$

## Observaciones *Comparación con el análisis real*

(*i*) En su estudio de técnicas de integración en cálculo aprendió que las integrales indefinidas de ciertos tipos de productos se podrían evaluar por partes:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx. \quad (11)$$

Sin duda, usted ha utilizado (11) en forma más compacta $\int u dv = \int u dv = uv - \int v du$. La fórmula (11) se transfiere al análisis complejo. Suponga que $f$ y $g$ son analíticas en un dominio simplemente conexo $D$. Entonces

$$\int f(z)g'(z)dz = f(z)g(z) - \int g(z)f'(z)dz. \quad (12)$$

Además, si $z_0$ y $z_1$ son los puntos inicial y final de un contorno C que se encuentra en su totalidad en $D$, entonces

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)g'(z)\,dz = f(z)g(z)\Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} g(z)f'(z)\,dz. \quad (13)$$

Estos resultados se pueden demostrar de manera directa usando el teorema 5.4.2 en la función $\frac{d}{dz}fg$. Vea los problemas 21 al 24 en los ejercicios 5.4.

(*ii*) Si $f$ es una función real continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ entonces existe un número $c$ en el intervalo abierto $(a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a). \quad (14)$$

El resultado en (14) se conoce como el **teorema del valor medio** para integrales definidas. Si $f$ es una función analítica compleja en un dominio simplemente conexo $D$, es continua en cada punto de un contorno $C$ en $D$ con el punto inicial $z_0$ y el punto final $z_1$. Se podría esperar un resultado paralelo a (14) para una integral $\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz$. Sin embargo, no existe una contraparte compleja.

## EJERCICIOS 5.4 *Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-14.*

En los problemas 1 y 2, evalúe la integral, donde el contorno $C$ está dado en la figura, (**a**) usando una trayectoria alternativa de integración y (**b**) usando el teorema 5.4.2.

**1.** $\int_C (4z - 1)\, dz$

**2.** $\int_C e^z\, dz$

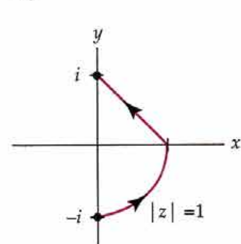



Figura 5.4.5 Figura para el problema 1

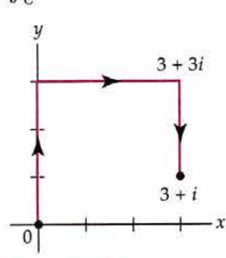



Figura 5.4.6 Figura para el problema 2

En los problemas 3 y 4, evalúe la integral a lo largo del contorno indicado $C$.

**3.** $\int_C 2z\, dz$, donde $C$ es $z(t) = 2t^3 + i(t^4 - 4t^3 + 2)$, $-1 \le t \le 1$

**4.** $\int_C 2z\, dz$, donde $C$ es $z(t) = 2\cos^3 \pi t - i \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{4}t$, $0 \le t \le 2$

En los problemas 5 al 20, utilice el teorema 5.4.2 para evaluar la integral dada. Escriba cada respuesta en la forma $a + ib$.

**5.** $\int_0^{3+i} z^2\, dz$

**6.** $\int_{-2i}^{1} (3z^2 - 4z + 5i)\, dz$

**7.** $\int_{1-i}^{1+i} z^3\, dz$

**8.** $\int_{-3i}^{2i} (z^3 - z)\, dz$

**9.** $\int_{-i/2}^{1-i} (2z + 1)^2\, dz$

**10.** $\int_1^i (iz + 1)^3\, dz$

**11.** $\int_{i/2}^{i} e^{\pi z}\, dz$

**12.** $\int_{1-i}^{1+2i} ze^{z^2}\, dz$

**13.** $\int_{\pi}^{\pi+2i} \operatorname{sen}\frac{z}{2}\, dz$

**14.** $\int_{1-2i}^{\pi i} \cos z\, dz$

**15.** $\int_{\pi i}^{2\pi i} \cosh z\, dz$

**16.** $\int_i^{1+(\pi/2)i} \operatorname{senh} 3z\, dz$

**17.** $\int_C \frac{1}{z}\, dz$, $C$ es el arco de la circunferencia $z = 4e^{it}$, $-\pi/2 \le t \le \pi/2$

**18.** $\int_C \frac{1}{z}\, dz$, $C$ es el segmento de recta entre $1 + i$ y $4 + 4i$

**19.** $\int_{-4i}^{4i} \frac{1}{z^2}\, dz$, $C$ es cualquier contorno que no pase por el origen

**20.** $\int_{1-i}^{1+\sqrt{3}i} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\right) dz$, $C$ es cualquier contorno en el semiplano derecho $\operatorname{Re}(z) > 0$

En los problemas 21 a 24, utilice la integración por partes (13) para evaluar la integral. Escriba cada respuesta en la forma $a + ib$.

**21.** $\int_{\pi}^{i} e^z \cos z\, dz$

**22.** $\int_0^i z \operatorname{sen} z\, dz$

**23.** $\int_i^{1+i} ze^z\, dz$

**24.** $\int_0^{\pi i} z^2 e^z\, dz$

En los problemas 25 y 26, utilice el teorema 5.4.2 para evaluar la integral. En cada integral $z^{1/2}$ es la rama principal de la función raíz cuadrada. Escribe cada respuesta en la forma $a + ib$.

**25.** $\int_C \frac{1}{4z^{1/2}}\,dz$, $C$ es el arco de la circunferencia $z = 4e^{it}$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$

**26.** $\int_C 3z^{1/2}\,dz$, $C$ es el segmento de recta entre $z_0 = 1$ y $z_1 = 9i$

**Enfocando los conceptos**

**27.** Encuentre una antiderivada de $f(z) = \operatorname{sen} z^2$. No piense cosas profundas.

**28.** De un dominio $D$ sobre el que $f(z) = z(z+1)^{1/2}$ es analítica. Después determine una antiderivada de $f$ en $D$.

**29.** Sea $\alpha = a + ib$ una constante compleja.

**(a)** Aplique el teorema 5.4.2 para evaluar $\int_{x_0}^{x} e^{\alpha z}\,dz$ donde $x_0$ y $x$ son los valores reales.

**(b)** Explique cómo el inciso (a) y el teorema 5.2.1 con la parametrización $z(t) = t$, $x_0 \leq t \leq x$ se puede usar para deducir la fórmula integral (real)

$$\int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{e^{ax}\,(a\cos bx + b\operatorname{sen} bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

**30.** Determine $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\,dx$. [*Sugerencia*: Vea el problema 29].

## 5.5 Fórmulas de las integrales de Cauchy y sus consecuencias

En las dos últimas secciones hemos visto la importancia del teorema de Cauchy-Goursat en la evaluación de las integrales de contorno. En esta sección vamos a examinar más consecuencias del teorema de Cauchy-Goursat. Sin lugar a dudas, la más importante de ellas es el siguiente resultado:

*El valor de una función analítica $f$ en cualquier punto $z_0$ en un dominio simplemente conexo se puede representar con una integral de contorno.*

Después de establecer esta proposición la vamos a usar para demostrar además que:

*Una función analítica $f$ en un dominio simplemente conexo tiene derivadas de todos los órdenes.*

Las ramificaciones de estos dos resultados no sólo nos mantendrán ocupados el resto de esta sección sino también en el siguiente capítulo.

### 5.5.1 Dos fórmulas integrales de Cauchy

**Primera fórmula** Si $f$ es analítica en un dominio simplemente conexo $D$ y $z_0$ es cualquier punto en $D$, el cociente $f(z)/(z - z_0)$ no está definido en $z_0$ y, por tanto, *no* es analítica en $D$. Por tanto, no *podemos* concluir que la integral de $f(z)/(z - z_0)$ alrededor de un contorno cerrado simple $C$ que contiene a $z_0$ es cero por el teorema de Cauchy-Goursat. De hecho, como veremos ahora, la integral de $f(z)/(z - z_0)$ alrededor de $C$ tiene el valor $2\pi i f(z_0)$.

La primera de las dos fórmulas notables se conoce simplemente como **fórmula integral de Cauchy**.

**Teorema 5.5.1 Fórmula de la integral de Cauchy**

Supongamos que $f$ es analítica en un dominio simplemente conexo $D$ y $C$ es cualquier contorno cerrado simple contenido totalmente en $D$. Entonces, para cualquier punto $z_0$ dentro de $C$,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz. \tag{1}$$

**Demostración** Sea $D$ un dominio simplemente conexo, $C$ un contorno cerrado simple en D, y $z_0$ un punto interior de $C$. Además, sea $C_1$ un círculo con centro en $z_0$ con un pequeño radio suficiente para que $C_1$ se encuentre en el interior de $C$. Por el principio de la deformación de contornos, (5) de la sección 5.3, podemos escribir

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz. \tag{2}$$

Queremos demostrar que el valor de la integral de la derecha es $2\pi i f(z_0)$. Para esto, sumamos y restamos la constante $f(z_0)$ en el numerador del integrando,

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz &= \oint_{C_1} \frac{f(z_0) - f(z_0) + f(z)}{z - z_0}\, dz. \\ &= f(z_0)\oint_{C_1} \frac{1}{z - z_0}\, dz + \oint_{C_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz. \end{aligned} \tag{3}$$

De (6) de la sección 5.3, sabemos que

$$\oint_{C_1} \frac{1}{z - z_0}\, dz = 2\pi i \tag{4}$$

y así (3) se convierte en

$$\oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i f(z_0) + \oint_{C_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz. \tag{5}$$

Puesto que $f$ es continua en $z_0$, sabemos que para cualquier $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño existe una $\delta > 0$ tal que $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ siempre que $|z - z_0| < \delta$. En particular, si elegimos que el círculo $C_1$ sea $|z - z_0| = \frac{1}{2}\delta < \delta$, entonces por la desigualdad *ML* (teorema 5.2.3) el valor absoluto de la integral del lado derecho de la igualdad en (5) satisface

$$\left| \oint_{C_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz \right| \le \frac{\varepsilon}{\delta/2} 2\pi \left(\frac{\delta}{2}\right) = 2\pi\varepsilon.$$

En otras palabras, el valor absoluto de la integral puede hacerse arbitrariamente pequeña tomando el radio de la circunferencia $C_1$ suficientemente pequeño. Esto puede suceder sólo si la integral es 0. Por tanto (5) es $\oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i f(z_0)$. El teorema se demuestra dividiendo ambos lados del último resultado entre $2\pi i$. ❑

*Nota* ➡ Debido a que el símbolo $z$ representa un punto sobre el contorno $C$, (1) indica que *los valores de una función analítica $f$ en los puntos $z_0$ dentro de un contorno cerrado simple $C$ están determinados por los valores de $f$ en el contorno $C$.*

La fórmula integral de Cauchy (1) se puede utilizar para evaluar integrales de contorno. Puesto que a veces trabajamos los problemas sin un dominio simplemente conexo explícitamente definido, una nueva afirmación más práctica del teorema 5.5.1 es:

*Si $f$ es analítica en todos los puntos dentro y sobre un contorno cerrado simple $C$, y $z_0$ es cualquier punto interior a $C$, entonces* $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{z - z_0}\,dz.$

**EJEMPLO 1 Uso de la fórmula integral de Cauchy**

Evalúe $\oint_C \dfrac{z^2 - 4z + 4}{z + i}\,dz$, donde $C$ es la circunferencia $|z| = 2$.

**Solución** Primero, identificamos $f(z) = z^2 - 4z + 4$ y $z_0 = -i$ como un punto dentro de la circunferencia $C$. A continuación, observamos que $f$ es analítica en todos los puntos dentro y sobre el contorno $C$. Por tanto, por la fórmula integral de Cauchy (1) obtenemos

$$\oint_C \frac{z^2 - 4z + 4}{z + i}\,dz = 2\pi i f(-i) = 2\pi i(3 + 4i) = \pi(-8 + 6i).$$

❑

**EJEMPLO 2 Uso de la fórmula integral de Cauchy**

Evalúe $\oint_C \dfrac{z}{z^2 + 9}\,dz$, donde $C$ es la circunferencia $|z - 2i| = 4$.

**Solución** Factorizando el denominador $z^2 + 9 = (z - 3i)(z + 3i)$, vemos que $3i$ es el único punto en el contorno cerrado $C$ en que el integrando no es analítico. Vea la figura 5.5.1. Entonces reescribiendo el integrando como

$$\frac{z}{z^2 + 9} = \frac{\left.\dfrac{z}{z + 3i}\right\} f(z)}{z - 3i},$$

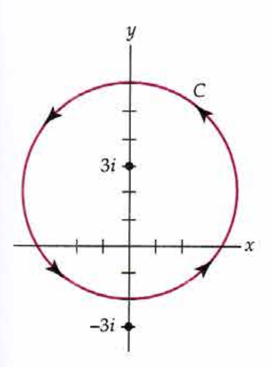


Figura 5.5.1 Contorno del ejemplo 2

podemos identificar $f(z) = z/(z + 3i)$. La función $f$ es analítica en todos los puntos dentro y sobre el contorno $C$. Por tanto, de la fórmula integral de Cauchy (1) tenemos

$$\oint_C \frac{z}{z^2 + 9}\,dz = \int_C \frac{\dfrac{z}{z + 3i}}{z - 3i}\,dz = 2\pi i f(3i) = 2\pi i\frac{3i}{6i} = \pi i.$$

❑

**Segunda fórmula** Vamos a construirla del teorema 5.5.1, usándola para demostrar que los valores de las derivadas $f^{(n)}(z_0)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ de una función analítica también se dan por una fórmula integral. Esta segunda fórmula integral es similar a (1) y se conoce por la **fórmula integral de Cauchy para derivadas**.

**Teorema 5.5.2 Fórmula integral de Cauchy para derivadas**

Supongamos que $f$ es analítica en un dominio simplemente conexo $D$ y $C$ es cualquier contorno cerrado simple situado totalmente en $D$. Entonces, para cualquier punto $z_0$ dentro de $C$,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz. \tag{6}$$

**Demostración** Demostraremos (6) sólo para el caso $n = 1$. El resto de la *prueba se puede completar con el principio de inducción matemática.* Comenzamos con la definición de la derivada y (1):

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{2\pi i\Delta z}\left[\oint_C \frac{f(z)}{z-(z_0+\Delta z)}\,dz - \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz\right] \\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)}\,dz. \end{aligned}$$

Antes de continuar, vamos a establecer algunos preliminares. La continuidad de $f$ en el contorno $C$ garantiza que $f$ está acotada (vea la página 112 de la sección 2.6), es decir, existe un número real $M$ tal que $|f(z)| \le M$ para todos los puntos $z$ en $C$. Además, sea $L$ la longitud de $C$ y sea $\delta$ la distancia más corta entre los puntos de $C$ y el punto $z_0$. Así, para todos los puntos $z$ en $C$ tenemos

$$|z-z_0| \ge \delta \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{|z-z_0|^2} \le \frac{1}{\delta^2}.$$

Además, si elegimos $|\Delta z| \le \frac{1}{2}\delta$, entonces por (10) de la sección 1.2,

$$|z-z_0-\Delta z| \ge \big|\,|z-z_0| - |\Delta z|\,\big| \ge \delta - |\Delta z| \ge \tfrac{1}{2}\delta$$

y así,
$$\frac{1}{|z-z_0-\Delta z|} \le \frac{2}{\delta}.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} &\left|\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz - \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)}\,dz\right| \\ &\qquad = \left|\oint_C \frac{-\Delta z\, f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)^2}\,dz\right| \le \frac{2ML\,|\Delta z|}{\delta^3}. \end{aligned}$$

Debido a que la última expresión tiende a cero cuando $\Delta z \to 0$, hemos demostrado que

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz,$$

que es (6) para $n = 1$. ❑

Al igual que (1), la fórmula (6) se puede utilizar para evaluar integrales.

## EJEMPLO 3 Uso de la fórmula integral de Cauchy para derivadas

Evalúe $\oint_C \frac{z+1}{z^4+2iz^3}\,dz$, donde $C$ es la circunferencia $|z| = 1$.

**Solución** Al examinar el integrando se ve que no es analítica en $z = 0$ y en $z = -2i$, pero sólo $z = 0$ está dentro del contorno cerrado. Al escribir el integrando como

$$\frac{z+1}{z^4+2iz^3} = \frac{\frac{z+1}{z+2i}}{z^3}$$

podemos identificar, $z_0 = 0$, $n = 2$ y $f(z) = (z+1)/(z+2i)$. La regla del cociente da $f''(z) = (2-4i)/(z+2i)^3$, y así $f''(0) = (2i-1)/4i$. Por tanto, de (6) se encuentra

$$\oint_C \frac{z+1}{z^4+4z^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}f''(0) = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}i.$$

❏

## EJEMPLO 4 Uso de la Fórmula Integral de Cauchy para derivadas

Evalúe $\int_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}\,dz$, donde $C$ es el contorno en forma de ocho que se muestra en la figura 5.5.2.

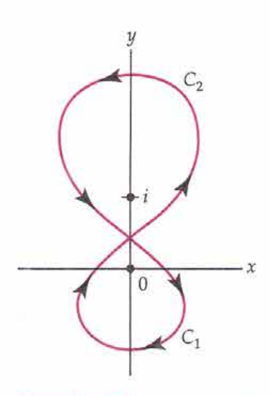


Figura 5.5.2 Contorno del ejemplo 4

**Solución** Aunque $C$ no es un contorno cerrado simple, podemos pensar en éste, como la unión de dos curvas cerradas simples $C_1$ y $C_2$ como se indica en la figura 5.5.2. Dado que las flechas en $C_1$ son en el sentido de las manecillas del reloj o en la dirección negativa, la curva opuesta $-C_1$ tiene orientación positiva. Por tanto, escribimos

$$\int_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}\,dz = \int_{C_1} \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}\,dz + \int_{C_2} \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}\,dz$$

$$= -\oint_{-C_1} \frac{\frac{z^3+3}{(z-i)^2}}{z}\,dz + \oint_{C_2} \frac{\frac{z^3+3}{z}}{(z-i)^2}\,dz = -I_1 + I_2,$$

y estamos en condiciones de utilizar las dos fórmulas (1) y (6).

Para evaluar $I_1$ identificamos $z_0 = 0$, $f(z) = (z^3+3)/(z-i)^2$, y $f(0) = -3$. Por (1) se deduce que

$$I_1 = \oint_{-C_1} \frac{\frac{z^3+3}{(z-i)^2}}{z}\,dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i(-3) = -6\pi i.$$

Para evaluar $I_2$ ahora identificamos $z_0 = i$, $n = 1$, $f(z) = (z^3+3)/z$, $f'(z) = (2z^3-3)/z^2$, y $f'(i) = 3 + 2i$. De (6) obtenemos

$$I_2 = \oint_{C_2} \frac{\frac{z^3+3}{z}}{(z-i)^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!}f'(i) = 2\pi i(3+2i) = -4\pi + 6\pi i.$$

Finalmente, se obtiene

$$\int_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}\,dz = -I_1 + I_2 = 6\pi i + (-4\pi + 6\pi i) = -4\pi + 12\pi i.$$

❑

## 5.5.2 Algunas consecuencias de las fórmulas integrales

A continuación se resume un inmediato e importante corolario del teorema 5.5.2.

**Teorema 5.5.3 La derivada de una función analítica es analítica**

Suponga que $f$ es analítica en un dominio simplemente conexo $D$. Entonces $f$ tiene derivadas de todos los órdenes en cada punto $z$ en $D$. Las derivadas $f', f'', f''', \ldots$ son funciones analíticas en $D$.

Si una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en un dominio simplemente conexo $D$, acabamos de ver que sus derivadas de todos los órdenes existentes en cualquier punto $z$ en $D$ y por lo que $f', f'', f''', \ldots$ son continuas. De

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$f''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - i\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

$$\vdots$$

también podemos concluir que las funciones reales $u$ y $v$ tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes en un punto de analiticidad.

**Desigualdad de Cauchy** A continuación presentamos una desigualdad derivada de la fórmula integral de Cauchy para las derivadas.

**Teorema 5.5.4 Desigualdad de Cauchy**

Supongamos que $f$ es analítica en un dominio simplemente conexo $D$ y $C$ es una circunferencia definida por $|z - z_0| = r$ que se encuentra totalmente en $D$. Si $|f(z)| \leq M$ para todos los puntos $z$ en $C$, entonces

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!M}{r^n}. \tag{7}$$

**Demostración** De la hipótesis,

$$\left|\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\right| = \frac{|f(z)|}{r^{n+1}} \leq \frac{M}{r^{n+1}}.$$

Por tanto, de (6) y de la desigualdad $ML$ (Teorema 5.2.3), tenemos

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}2\pi r = \frac{n!M}{r^n}.$$

❑

El número $M$ en el teorema 5.5.4 depende de la circunferencia $|z - z_0| = r$. Pero observe en (7) que si $n = 0$, entonces $M \geq |f(z_0)|$ para *cualquier* circunferencia $C$ centrado en $z_0$, siempre y cuando se encuentre $C$ dentro de $D$. En otras palabras, una cota superior $M$ de $|f(z)|$ en $C$ no puede ser menor que $|f(z_0)|$.

**Teorema de Liouville** La desigualdad de Cauchy (7) es un ingrediente clave en la demostración del siguiente resultado. A pesar de que lleva el nombre de "teorema de Liouville", probablemente Cauchy lo probó por primera vez. La esencia del teorema es que una función entera $f$, que es analítica para todo $z$, no puede estar acotada a menos que $f$ en sí misma sea una constante.

**Teorema 5.5.5 Teorema de Liouville**

Las únicas funciones enteras acotadas son constantes.

**Demostración** Supongamos que $f$ es una función entera y acotada, es decir, $|f(z)| \leq M$ para todo $z$. Entonces, para cualquier punto $z_0$, con (7) se obtiene $|f'(z_0)| \leq M/r$. Al hacer $r$ arbitrariamente grande podemos hacer $|f'(z_0)|$ tan pequeña como queramos. Esto significa que $f'(z_0) = 0$ para todos los puntos $z_0$ en el plano complejo. Por tanto, por el teorema 3.2.3(*ii*), $f$ debe ser una constante. ❑

**Teorema fundamental del álgebra** El teorema 5.5.5 nos permite establecer un resultado generalmente aprendido —pero nunca demostrado— de álgebra elemental.

**Teorema 5.5.6 Teorema fundamental del álgebra**

Si $p(z)$ es un polinomio no constante, entonces la ecuación $p(z) = 0$ tiene al menos un cero.

**Demostración** Supongamos que el polinomio $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, $n > 0$, no es 0 para todo número complejo $z$. Esto implica que el recíproco de $p$, $f(z) = 1/p(z)$, es una función entera. Ahora

$$|f(z)| = \frac{1}{|a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0|}$$
$$= \frac{1}{|z|^n \, |a_n + (a_{n-1}/z + \cdots + a_1/z^{n-1} + a_0/z^n)|}.$$

Se elije un número real $M > 1$ tal que $M > \left|\dfrac{2na_j}{a_n}\right|$ para $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Entonces para $|z| > M$ tenemos $|a_j/z^{n-j}| < |a_n|/2n$, y así

$$|a_{n-1}/z + \cdots + a_1/z^{n-1} + a_0/z| \leq |a_n|/2n + \cdots + |a_n|/2n = |a_n|/2.$$

De la desigualdad (8) de la sección 1.2 tenemos entonces:

$$|f(z)| \leq \frac{1}{|z|^n \, ||a_n| - |a_{n-1}/z + \cdots + a_1/z^{n-1} + a_0/z^n||}$$
$$\leq \frac{1}{M^n \, ||a_n| - |a_n|/2|} = \frac{2}{M^n |a_n|}.$$

Así, vemos que $f$ está acotada en el exterior del disco $|z| \leq M$. Sin embargo, como $f$ es continua también debe ser acotada en el disco $|z| \leq M$ (vea la

*sección 2.6). Se concluye que la función f es una función entera acotada.* Entonces se deduce del teorema de Liouville que $f$ es una constante, y por tanto $p$ es una constante. Pero esto es una contradicción a nuestra suposición de que $p$ *no* es un polinomio constante. Concluimos que debe existir al menos un número $z$ para los que $p(z) = 0$. ❑

Se deja como ejercicio demostrar, utilizando el teorema 5.5.6, que si $p(z)$ es un polinomio no constante de grado $n$, entonces $p(z) = 0$ tiene exactamente $n$ ceros (contando ceros múltiples). Vea el problema 29 de los ejercicios 5.5.

**Teorema de Morera** La demostración del teorema siguiente consagra el nombre del matemático italiano Giacinto Morera por siempre en los libros sobre el análisis complejo. El Teorema de Morera, da una condición de suficiencia para la analiticidad, con frecuencia se considera como el inverso del teorema de Cauchy-Goursat. Para su demostración regresamos al teorema 5.5.3.

**Teorema 5.5.7 Teorema de Morera**

Si $f$ es continua en un dominio simplemente conexo $D$ y si $\oint_C f(z)\,dz = 0$ para cada contorno cerrado $C$ en $D$, entonces $f$ es analítica en $D$.

**Demostración** Por la hipótesis de continuidad de $f$ y $\oint_C f(z)\,dz = 0$ para cada contorno cerrado $C$ en $D$, se concluye que $\int_C f(z)\,dz$ es independiente de la trayectoria. En la demostración de (7) de la sección 5.4 se vio entonces que la función $F$ definida por $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)\,ds$ (donde $s$ denota una variable compleja, $z_0$ es un punto fijo en $D$, y $z$ representa cualquier punto en $D$) es un antiderivada de $f$: es decir, $F'(z) = f(z)$. Por tanto, $F$ es analítica en $D$. Además, $F'(z)$ es analítica de acuerdo con el teorema 5.5.3. Dado que $f(z) = F'(z)$, vemos que $f$ es analítica en $D$. ❑

Una demostración alternativa de este último resultado se resume en el problema 31 de los ejercicios 5.5.

Podríamos seguir por mucho tiempo indicando más y más resultados cuyas pruebas tienen como base la teoría que incluye el teorema de Cauchy-Goursat y las fórmulas integrales de Cauchy. Pero vamos a parar después de un teorema más.

En la sección 2.6 vimos que si una función $f$ es continua en una región cerrada y acotada $R$, entonces $f$ está acotada, es decir, hay una cierta constante $M$ tal que $|f(z)| \leq M$ para $z$ en $R$. Si la frontera de $R$ es una curva cerrada simple $C$, entonces el siguiente teorema, que se presenta sin demostración, nos dice que $|f(z)|$ toma su valor máximo en algún punto $z$ en la frontera de $C$.

**Teorema 5.5.8 Teorema del módulo máximo**

Supongamos que $f$ es analítica y no constante en una región cerrada $R$ acotada por una curva cerrada simple $C$. Entonces el módulo de $|f(z)|$ alcanza su máximo en $C$.

Si la condición de que $f(z) \neq 0$ para todo $z$ en $R$ se agrega a la hipótesis del teorema 5.5.8, entonces el módulo de $|f(z)|$ también alcanza su *mínimo* en $C$. Vea los problemas 27 y 33 de los ejercicios 5.5.

**EJEMPLO 5 Módulo máximo**

Encuentre el módulo máximo de $f(z) = 2z + 5i$ en la región circular cerrada definida por $|z| \leq 2$.

**Solución** De (2) de la sección 1.2, sabemos que $|z|^2 = z\bar{z}$. Sustituyendo el símbolo $z$ por $2z + 5i$ tenemos

$$|2z + 5i|^2 = (2z + 5i)\overline{(2z + 5i)} = (2z + 5i)(2\bar{z} - 5i) = 4z\bar{z} - 10i(z - \bar{z}) + 25. \quad (8)$$

Pero a partir de (6) de la sección 1.1, $\bar{z} - z = 2i\,\mathrm{Im}(z)$, y así (8) es

$$|2z + 5i|^2 = 4|z|^2 + 20\,\mathrm{Im}(z) + 25. \quad (9)$$

Debido a que $f$ es un polinomio, es analítica en la región definida por $|z| \leq 2$. De acuerdo con el teorema 5.5.8, $\text{máx}_{|z| \leq 2}|2z + 5i|$ ocurre en la frontera $|z| = 2$. Por tanto, si $|z| = 2$, entonces con (9) se obtiene

$$|2z + 5i| = \sqrt{41 + 20\,\mathrm{Im}(z)}. \quad (10)$$

La última expresión alcanza su máximo cuando $\mathrm{Im}(z)$ alcanza su máximo en $|z| = 2$, a saber, en el punto $z = 2i$. Por tanto, $\text{máx}_{|z| \leq 2}|2z + 5i| = \sqrt{81} = 9$. ❑

Observe en el ejemplo 5 que $f(z) = 0$ sólo en $z = -\frac{5}{2}i$ y que este punto se encuentra fuera de la región definida por $|z| \leq 2$. Por tanto, podemos concluir que (10) alcanza su mínimo cuando $\mathrm{Im}(z)$ alcanza su mínimo sobre $|z| = 2$ en $z = -2i$. Como resultado, $\text{mín}_{|z| \leq 2}|2z + 5i| = \sqrt{1} = 1$.

**Observaciones** *Comparación con el análisis real*

(*i*) Como una consecuencia del teorema 5.5.3, si $f$ es derivable en todos los puntos de algún dominio, entonces todas las derivadas $f'$, $f''$, $f'''$,... existen en el dominio. En análisis real esto no es necesariamente cierto. Por ejemplo la función $f(x) = x^{5/3}$ es derivable en toda la recta real. Sin embargo, $f''(x) = \frac{10}{9}x^{-1/3}$ no existe en $x = 0$.

(*ii*) En análisis real hay un número infinito de funciones derivables que están acotadas en un intervalo cerrado $[a, b]$, es decir, $|f(x)| \leq M$ para todo $a \leq x \leq b$. Por ejemplo, sen $x$ es infinitamente derivable y acotado en $[-\pi, \pi]$ ya que $|\text{sen } x| \leq 1$ para toda $x$. Sin embargo, el valor absoluto de $|\text{sen } x|$ no alcanza su máximo en la frontera del intervalo cerrado ya que $|\text{sen}(-\pi)| = |\text{sen } \pi| = 0$. Compare este hecho con el teorema 5.5.8 del módulo máximo.

## EJERCICIOS 5.5

*Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-15.*

### 5.5.1 Fórmulas de las integrales de Cauchy

En los problemas 1 al 22, utilice los teoremas 5.5.1 y 5.5.2, cuando sea apropiado, evalúe la integral dada a lo largo del(de los) contorno(s) cerrado(s) indicado(s).

**1.** $\oint_C \frac{4}{z - 3i}\,dz;\ |z| = 5$

**2.** $\oint_C \frac{z^2}{(z - 3i)^2}\,dz;\ |z| = 5$

**3.** $\oint_C \frac{e^z}{z - \pi i}\,dz;\ |z| = 4$

**4.** $\oint_C \frac{1 + e^z}{z}\,dz;\ |z| = 1$

**5.** $\oint_C \frac{z^2 - 3z + 4i}{z + 2i}\,dz;\ |z| = 3$

**6.** $\oint_C \frac{\cos z}{3z - \pi}\,dz;\ |z| = 1.1$

**7.** $\oint_C \frac{z^2}{z^2 + 4}\,dz;$ **(a)** $|z - i| = 2,$ **(b)** $|z + 2i| = 1$

**8.** $\oint_C \frac{z^2 + 3z + 2i}{z^2 + 3z - 4}\,dz;$ **(a)** $|z| = 2,$ **(b)** $|z + 5| = \frac{3}{2}$

**9.** $\oint_C \frac{z^2 + 4}{z^2 - 5iz - 4}\,dz;\ |z - 3i| = 1.3$

**10.** $\oint_C \frac{\operatorname{sen} z}{z^2 + \pi^2}\,dz;\ |z - 2i| = 2$

**11.** $\oint_C \frac{e^{z^2}}{(z - i)^3}\,dz;\ |z - i| = 1$

**12.** $\oint_C \frac{z}{(z + i)^4}\,dz;\ |z| = 2$

**13.** $\oint_C \frac{\cos 2z}{z^5}\,dz;\ |z| = 1$

**14.** $\oint_C \frac{e^{-z}\operatorname{sen} z}{z^3}\,dz;\ |z - 1| = 3$

**15.** $\oint_C \frac{2z + 5}{z^2 - 2z}\,dz;$ **(a)** $|z| = \frac{1}{2},$ **(b)** $|z + 1| = 2$ **(c)** $|z - 3| = 2,$ **(d)** $|z + 2i| = 1$

**16.** $\oint_C \frac{z}{(z - 1)(z - 2)}\,dz;$ **(a)** $|z| = \frac{1}{2},$ **(b)** $|z + 1| = 1$ **(c)** $|z - 1| = \frac{1}{2},$ **(d)** $|z| = 4$

**17.** $\oint_C \frac{z + 2}{z^2(z - 1 - i)}\,dz;$ **(a)** $|z| = 1,$ **(b)** $|z - 1 - i| = 1$

**18.** $\oint_C \frac{1}{z^3(z - 4)}\,dz;$ **(a)** $|z| = 1,$ **(b)** $|z - 2| = 1$

**19.** $\oint_C \left(\frac{e^{2iz}}{z^4} - \frac{z^4}{(z - i)^3}\right)dz;\ |z| = 6$

**20.** $\oint_C \left(\frac{\cosh z}{(z - \pi)^3} - \frac{\operatorname{sen}^2 z}{(2z - \pi)^3}\right)dz;\ |z| = 3$

**21.** $\oint_C \frac{1}{z^3(z - 1)^2}\,dz;\ |z - 2| = 5$

**22.** $\oint_C \frac{1}{z^2(z^2 + 1)}\,dz;\ |z - i| = \frac{3}{2}$

En los problemas 23 y 24 evalúe la integral dada, donde $C$ es el contorno con figura en forma de ocho.

**23.** $\oint_C \frac{3z + 1}{z(z - 2)^2}\,dz$

**24.** $\oint_C \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2}\,dz$

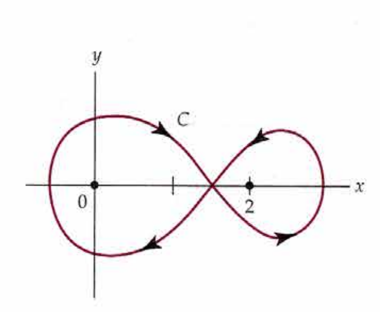



**Figura 5.5.3** Figura para el problema 23

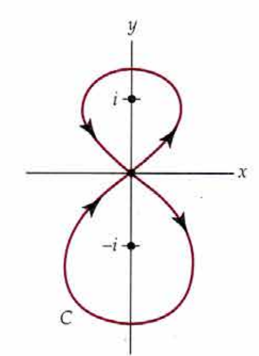



**Figura 5.5.4** Figura para el problema 24

## 5.5.2 Algunas consecuencias de las fórmulas integrales

En los problemas 25 y 26, proceda como en el ejemplo 5 para encontrar el módulo máximo de la función dada en la región circular cerrada indicada.

**25.** $f(z) = -iz + i;\ |z| \leq 5$

**26.** $f(z) = z^2 + 4z;\ |z| \leq 1$

**27.** Supongamos que la frontera $C$ de la región circular cerrada $R$ definida por $|z| \leq 1$ se parametriza con $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Considerando $|f(z(t))|$, encuentre el módulo máximo y el módulo mínimo de la función analítica $f$ dada y los puntos $z$ en $C$ que dan estos valores.

(a) $f(z) = (iz + 3)^2$

(b) $f(z) = (z - 2 - 2\sqrt{3}\,i)^2$

(c) $f(z) = -2iz^2 + 5$

[*Sugerencia*: En los incisos (b) y (c), puede ayudar que recuerde de cálculo cómo encontrar los extremos relativos de una función de valor real de variable real $t$].

### Enfocando los conceptos

**28.** (***Fórmula integral de Cauchy***) Supongamos que $f$ es analítica dentro y sobre una circunferencia $C$ de radio $r$ con centro en $z_0$. Use (1) para obtener

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Este resultado se conoce como el **teorema del valor medio de Gauss** y muestra que el valor de $f$ en el centro $z_0$ de la circunferencia es el promedio de todos los valores de $f$ en la circunferencia de $C$.

**29.** (***Teorema fundamental del álgebra***) Supongamos que

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

es un polinomio de grado $n > 1$ y que $z_1$ es un número tal que $p(z_1) = 0$. Entonces

(a) Demuestre que $p(z) = p(z) - p(z_1) = a_n(z^n - z_1^n) + a_{n-1}(z^{n-1} - z_1^{n-1}) + \cdots + \quad a_1(z - z_1)$.

(b) Utilice el resultado del inciso (a) para demostrar que $p(z) = (z - z_1)q(z)$, donde $q$ es un polinomio de grado $n - 1$.

(c) Utilice el resultado del inciso (b) para dar una explicación racional de por qué la ecuación $p(z) = 0$ tiene $n$ ceros.

**30.** Utilice el problema 29 para factorizar el polinomio

$$p(z) = z^3 + (3 - 4i)z^2 - (15 + 4i)z - 1 + 12i.$$

No utilice la tecnología.

**31.** (***Teorema de Morera***) A veces en la demostración del teorema 5.5.7 también se supone la continuidad de $f'$ en $D$. Si este es el caso, entonces se puede utilizar (3) de la sección 5.1 y el teorema de Green para escribir a $\oint_C f(z)\, dz$ como

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\, dz &= \oint_C u\, dx - v\, dy + i \oint_C v\, dx + u\, dy \\ &= \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dA + i \iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dA,\end{aligned}$$

donde $R$ denota la región acotada por $C$. Proporcione los siguientes pasos en la prueba y establezca la conclusión.

**32.** (***Teorema del módulo máximo***) Critique el siguiente razonamiento:

Considere la función $f(z) = z^2 + 5z - 1$ definida en la región circular cerrada definida por $|z| \leq 1$. Se deduce de la desigualdad del triángulo, (10) de la sección 1.2, que

$$|z^2 + 5z - 1| \leq |z|^2 + 5|z| + |-1|.$$

Ya que el módulo máximo de $f$ se presenta en $|z| = 1$, la desigualdad muestra que el módulo máximo de $f(z) = z^2 + 5z - 1$ sobre la región es 7.

**33.** En este problema vamos a empezar con la demostración del **teorema del módulo mínimo**.

*Si $f$ es analítica en una región cerrada $R$ acotada por una curva simple cerrada $C$ y $f(z) \neq 0$ para todo $z$ en $R$, entonces el módulo de $|f(z)|$ alcanza su mínimo en $C$.*

Defina la función $g(z) = 1/f(z)$, vuelva a leer el teorema 5.5.8, y después termine la demostración del teorema.

**34.** Supongamos que $f(z) = z + 1 - i$ está definida en la región triangular $R$ que tiene vértices $i$, 1 y $1 + i$. Analice cómo el concepto de *distancia* del punto $-1 + i$ se puede utilizar para encontrar los puntos en la frontera de $R$ para los que $|f(z)|$ alcanza su valor máximo y su valor mínimo.

## 5.6 Aplicaciones

En la sección 1.2 se introdujo el concepto de que un número complejo se podría interpretar como un vector de dos dimensiones. A causa de esto, vimos en la sección 2.7 que un campo vectorial en dos dimensiones $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ se podrían representar por medio de una función $f$ con valores complejos tomando las componentes $P$ y $Q$ de $\mathbf{F}$ como las partes real e imaginaria de $f$; es decir, $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ es un vector cuyo punto inicial es $z$. En esta sección vamos a explorar el uso de esta representación compleja del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y)$ en el contexto del análisis de determinados aspectos del flujo de fluidos. Debido a que el campo vectorial se compone de vectores que representan las velocidades en varios puntos en el flujo, $\mathbf{F}(x, y)$ o $f(z)$ se llama un **campo de velocidades**. La magnitud $\|\mathbf{F}\|$ de $\mathbf{F}$, o el módulo de $|f(z)|$ de la representación compleja $f$, se llama **rapidez**.

Se supone en esta sección que cada dominio $D$ es simplemente conexo.

### Campo vectorial irrotacional

En esta sección se considera sólo un flujo de dos dimensiones o **flujo planar** de un fluido (vea las secciones 2.7 y 3.4). Esta suposición permite analizar una sola lámina de fluido que fluye a través de un dominio $D$ en el plano. Supongamos que $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ representa un campo de velocidad en *estado estable* de este flujo de fluidos en $D$. En otras palabras, la velocidad del fluido en un punto en la lámina depende sólo de su posición $(x, y)$ y no del tiempo $t$. En el estudio de los fluidos, si rot $\mathbf{F} = 0$, entonces se dice que el flujo de fluidos es **irrotacional**. Si un dispositivo con álabes, tal como el que se muestra en la figura 5.6.1, se inserta en un fluido que está fluyendo, entonces el giro de su campo de velocidades $\mathbf{F}$ es una medida de la tendencia del fluido para hacer girar el dispositivo alrededor de su eje vertical (imagine este eje vertical que apunta hacia fuera de la página). Los flujos que se muestran en las figuras 5.6.1(a) y 5.6.1(b) son irrotacionales ya que el dispositivo de álabes no está girando. La palabra "irrotacional" es algo engañosa, ya que como se ve en la figura 5.6.1(b), *no* quiere decir que el fluido no gire. Más bien, si rot $\mathbf{F} = 0$, entonces el flujo del fluido está libre de turbulencia en forma de vórtices

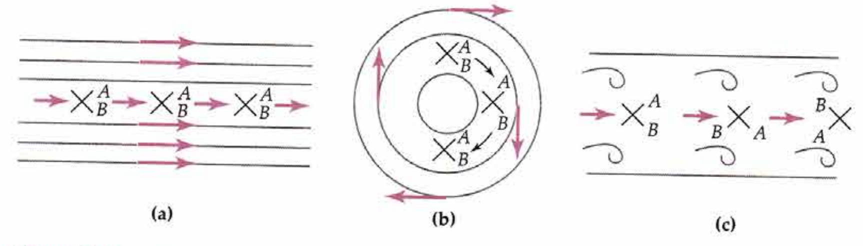



Figura 5.6.1 Tres flujos de fluidos

o remolinos que causan que el álabe gire. En el caso de la figura 5.6.1(c), el flujo es rotacional, observe los vórtices y que el dispositivo de álabes se presenta como girando.

La divergencia del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ es una medida de la razón de cambio de la densidad del fluido en un punto. Si div $\mathbf{F} = 0$, se dice que el fluido es **incompresible**, es decir, un fluido incompresible es homogéneo (densidad constante) en todo el dominio $D$. En un dominio simplemente conexo $D$, un flujo incompresible tiene la propiedad especial de que la cantidad de fluido en el interior de un contorno cerrado simple $C$ es independiente del tiempo. La velocidad con la que el fluido entra en el interior de $C$ coincide con la velocidad con la que se va, y, por tanto, no puede haber fuentes ni sumideros de fluido en los puntos en $D$. En teoría electromagnética, si $\mathbf{F}$ representa un campo vectorial para el que div $\mathbf{F} = 0$, entonces se dice que $\mathbf{F}$ es **solenoidal**. Supongamos que $P$ y $Q$ son continuas y que tienen derivadas parciales continuas en $D$. Entonces del cálculo vectorial div $\mathbf{F}$(o $\nabla \cdot \mathbf{F}$) es una función escalar y rot $\mathbf{F}$ (o $\nabla \times \mathbf{F}$) es un vector:

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{y} \quad \text{curl } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}. \tag{1}$$

En el caso de un **fluido ideal**, es decir, un fluido *incompresible* no viscoso, cuyo flujo planar es *irrotacional*, vemos de (1) que div $\mathbf{F} = 0$ y rot $\mathbf{F} = 0$ producen las ecuaciones simultáneas

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{2}$$

El sistema de ecuaciones en derivadas parciales en (2) es una reminiscencia de las ecuaciones de Cauchy-Riemann; un criterio de analiticidad presentado en el teorema 3.2.2 de la sección 3.2. Si el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + iQ(x, y)\mathbf{j}$ se representa con la función compleja $f(z) = P(x, y) + Q(x, y)$, entonces resulta que (2) implica que el conjugado de $f$, es decir, $g(z) = \overline{f(z)} = P(x, y) - iQ(x, y)$, es una función analítica en D.

**Teorema 5.6.1 Campos vectoriales y analiticidad**

Supongamos que las funciones $u$, $v$, $P$ y $Q$ son continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en un dominio $D$.

(*i*) Si $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ es un campo vectorial para el que div $\mathbf{F} = 0$ y rot $\mathbf{F} = 0$ en $D$, y si $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ es la representación compleja de $\mathbf{F}$, entonces la función $g(z) = \overline{f(z)} = P(x, y) - iQ(x, y)$, es analítica en $D$.

(*ii*) Por el contrario, si $g(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en $D$, entonces la función $f(z) = \overline{g(z)} = u(x, y) - iv(x, y)$ es la representación compleja de un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ para la que div $\mathbf{F} = 0$ y rot $\mathbf{F} = 0$ en $D$.

**Demostración de** $(i)$ Si hacemos que $u(x, y)$ y $v(x, y)$ denote la parte real e imaginaria de $g(z) = \overline{f(z)} = P(x, y) - iQ(x, y)$, entonces $P = u$ y $Q = -v$. Ya que div $\mathbf{F} = 0$ y rot $\mathbf{F} = 0$, las ecuaciones en (2) respectivamente, se convierten en,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial(-v)}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(-v)}{\partial x}.$$

Es decir,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3}$$

Las ecuaciones en (3) son las ecuaciones usuales de Cauchy-Riemann, y así por el teorema 3.2.2 concluimos que $g(z) = \overline{f(z)} = P(x, y) - iQ(x, y)$ es analítica en $D$.

$(ii)$ Ahora sean $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ la parte real e imaginaria de $f(z) = \overline{g(z)} = u(x, y) = iv(x, y)$. Puesto que $u = P$ y $v = -Q$, las ecuaciones de Cauchy-Riemann serán

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial(-Q)}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial(-Q)}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{4}$$

Estas son las ecuaciones en (2) por lo que div $\mathbf{F} = 0$ y rot $\mathbf{F} = 0$. ❑

---

**EJEMPLO 1 El campo vectorial da una función analítica**

El campo vectorial en dos dimensiones

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{K}{2\pi}\left[\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\mathbf{i} - \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\mathbf{j}\right], K > 0,$$

se puede interpretar como el campo de velocidades del flujo de un fluido ideal en un dominio $D$ en el plano $xy$ que no contiene a $(x_0, y_0)$. Es fácil comprobar que el fluido es incompresible (div $\mathbf{F} = 0$) e irrotacional (rot $\mathbf{F} = 0$) en $D$. La representación compleja de $\mathbf{F}$ es

$$f(z) = \frac{K}{2\pi}\left[\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - i\frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right].$$

De hecho, al reescribir a $f$ como

$$f(z) = \frac{K}{2\pi i}\left[\frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + i\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right]$$

y usando $z_0 = x_0 + iy_0$ y $z = x + iy$, debería poder reconocer que $f(z)$ es igual a

$$f(z) = \frac{K}{2\pi i}\frac{z - z_0}{|z - z_0|^2} \quad \text{o} \quad f(z) = \frac{K}{2\pi i}\frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_0}.$$

Por tanto, del teorema 5.6.1$(i)$, la función compleja $g(z) = \overline{f(z)}$ es una función racional,

$$g(z) = \overline{f(z)} = -\frac{K}{2\pi i}\frac{1}{z - z_0}, \quad K > 0,$$

y es analítica en un dominio $D$ del plano $z$ que no contenga a $z_0$. ❑

Cualquier función analítica $g(z)$ se puede interpretar como una representación compleja del campo de velocidades **F** de un flujo de un fluido planar. *Pero* de acuerdo con el teorema 5.6.1(*ii*), esta es la función $f$ definida como el conjugado de $g$, $f(z) = \overline{g(z)}$, que es una representación compleja de un campo de velocidad $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ del flujo planar de un *fluido ideal* en un dominio $D$ del plano.

**EJEMPLO 2 Una función analítica da un campo vectorial**

La función polinomial $g(z) = kz = k(x + iy)$, $k > 0$, es analítica en cualquier dominio $D$ del plano complejo. Del teorema 5.6.1(*ii*), $f(z) = \overline{g(z)} = k\bar{z} = kx - iky$ es la representación compleja de un campo de velocidades **F** de un fluido ideal en $D$. Con las identificaciones $P(x, y) = kx$ y $Q(x, y) = -ky$, tenemos que $\mathbf{F}(x, y) = k(x\mathbf{i} - y\mathbf{j})$. Una rápida inspección de (2) comprueba que $\text{div}\,\mathbf{F} = 0$ y $\text{rot}\,\mathbf{F} = 0$. ❑

**Repaso de líneas de corriente** Ahora podemos cerrar algunos cabos sueltos de la sección 2.7 y de la sección 3.4. En la sección 2.7, vimos que si $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ o $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ representan el campo de velocidades de *cualquier* flujo de un fluido planar, entonces la trayectoria real de $z(t) = x(t) + iy(t)$ de una partícula (como un corcho pequeño) colocado en el flujo debe cumplir el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y)\\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y).\end{aligned} \tag{5}$$

La familia de todas las soluciones de (5) se llamó **líneas de corriente** del flujo.

En la sección 3.4 vimos que en el caso de un flujo planar de un fluido ideal, el vector de velocidad **F** podría representarse por el gradiente de una función de valor real $\phi$ llamado **potencial de velocidad**. Las curvas de nivel $\phi(x, y) = c_1$ se llamaron **curvas equipotenciales**. Lo más importante es que la función $\phi$ es una solución de la ecuación de Laplace en un dominio $D$ y así también es armónica en $D$. Después se encuentra la armónica conjugada $\psi(x, y)$ de $\phi$, formamos una función

$$\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y), \tag{6}$$

que se llama **potencial de velocidad complejo**, que es analítica en $D$. En este contexto, llamamos a $\psi(x, y)$ una **función de corriente** y a sus curvas de nivel $\psi(x, y) = c_2$ **líneas de corriente**.

Vamos a demostrar que estamos hablando de lo mismo en (5) y en (6). Supongamos que $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ es el campo de velocidades del flujo de un fluido ideal en algún dominio $D$. Comenzamos revisando el párrafo que contiene a (6). Ya que $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ es un campo gradiente, existe una función escalar $\phi$ tal que

$$\mathbf{F}(x, y) = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j}, \tag{7}$$

por tanto

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = P(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = Q(x, y). \tag{8}$$

Ya que $\phi$ es armónica en $D$, lo llamamos una función potencial para **F**. Entonces, encontramos su armónica conjugada $\psi$ y lo utilizamos para formar

el potencial de velocidad complejo $\Omega(z) = \phi + i\psi$. Ya que $\Omega(z)$ es analítica en $D$, podemos utilizar las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{9}$$

para reescribir (8) como

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = P(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -Q(x, y). \tag{10}$$

Ahora permítanos volver a examinar el sistema de ecuaciones diferenciales en (5). Si dividimos la segunda ecuación en el sistema por la primera, se obtiene una sola ecuación diferencial de primer orden $dy/dx = Q(x, y)/P(x, y)$ o

$$-Q(x, y)\,dx + P(x, y)\,dy = 0. \tag{11}$$

Entonces por (2), vemos que $P$ y $Q$ están relacionados por $\partial P/\partial x = \partial(-Q)/\partial y = -\partial Q/\partial y$. Esta última condición demuestra que (11) es una ecuación diferencial **exacta** de primer orden. Más concretamente, las ecuaciones en (10) nos muestran que (11) es igual que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = 0. \tag{12}$$

Si usted no ha tomado un curso de ecuaciones diferenciales, entonces, las manipulaciones anteriores no lo impresionarán. Pero los lectores con algunos conocimientos sobre ese tema deberían reconocer que el resultado en (12) establece que (11) es equivalente a la diferencial exacta $d(\psi(x, y)) = 0$. *Nota* ➡ Integrando esta última ecuación se demuestra que todas las soluciones de (5) satisfacen que $\psi(x, y) = c_2$. En otras palabras, las líneas de corriente del campo de velocidad $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ obtenidas a partir de (5) son iguales a las curvas de nivel de la armónica conjugada $\psi$ de $\phi$ en (6).

**Repaso del potencial complejo** Suponga que $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ es el campo de velocidades del flujo de un fluido ideal en un dominio $D$ del plano y que $\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ es el potencial de velocidad complejo del flujo. Sabemos por el teorema 5.6.1($i$) que a partir de la representación compleja $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ de $\mathbf{F}$ podemos construir una función analítica $g(z) = \overline{f(z)} = P(x, y) - iQ(x, y)$. Las dos funciones analíticas $g$ y $\Omega$ están relacionadas. Para ver por qué esto es así, primero escribimos vector gradiente de $\mathbf{F}$ en (7) en la notación compleja equivalente como

$$f(z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\frac{\partial \phi}{\partial y}. \tag{13}$$

Ahora por (9) de la sección 3.2, la derivada de la función analítica $\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ es la función analítica

$$\Omega'(z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{14}$$

Ahora reemplace $\partial\psi/\partial x$ en (14) utilizando la segunda de las ecuaciones de Cauchy-Riemann en (9):

$$\Omega'(z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} - i\frac{\partial \phi}{\partial y}. \tag{15}$$

Al comparar (13) y (15) vemos de inmediato que $\overline{f(z)} = \Omega'(z)$ y, en consecuencia,

$$g(z) = \Omega'(z). \tag{16}$$

El conjugado de esta función analítica, $\overline{g(z)} = \overline{\overline{f(z)}} = f(z)$, es la representación compleja del campo vectorial **F** cuyo potencial compleja es $\Omega(z)$. En símbolos,

$$f(z) = \overline{\Omega'(z)}. \tag{17}$$

Debido a que $f(z)$ es una representación compleja del campo vectorial de velocidad, la cantidad $\overline{\Omega'(z)}$ en (17) a veces se conoce como la **velocidad compleja**.

Puede legítimamente preguntarse: ¿(17) sólo es interesante o útil? Respuesta: útil. He aquí una observación práctica: Cualquier función analítica en algún dominio $D$ se puede considerar como un potencial complejo para el flujo planar de un fluido ideal.

**EJEMPLO 3 Potenciales complejos**

(**a**) La función analítica $\Omega(z) = \frac{1}{2}kz^2$, $k > 0$, es un potencial complejo para el flujo del ejemplo 2. Por (16), la derivada $g(z) = \Omega'(z) = kz$ es una función analítica. Por (17), el conjugado $f(z) = \overline{\Omega'(z)}$ o $f(z) = k\bar{z} = kx - iky$ es la representación compleja del campo vectorial de velocidad **F** del flujo de un fluido ideal en un dominio $D$ del plano. El potencial complejo de **F** es $\Omega(z)$. De $\Omega(z) = \frac{1}{2}k(x^2 - y^2 + 2xyi)$, vemos que las líneas de corriente del flujo son $xy = c_2$.

(**b**) La función compleja $\Omega(z) = Az$, $A > 0$, es un potencial complejo para un tipo de flujo muy simple, pero importante. De

$$\Omega'(z) = A \quad \text{y} \quad \overline{\Omega'(z)} = A,$$

vemos que $\Omega(z)$ es el potencial complejo del campo vectorial **F** cuya representación compleja es $f(z) = A$. Ya que la rapidez $|f| = A$ es constante en cada punto, se dice que el campo de velocidad $\mathbf{F}(x, y) = A\mathbf{i}$ es un flujo *uniforme*. En otras palabras, en un dominio $D$ como el semiplano superior, una partícula en el fluido se mueve con una rapidez constante. De $\Omega(z) = Az = Ax + iAy$, vemos que la trayectoria de una partícula en movimiento, una línea de corriente para el flujo, es una recta horizontal de la familia definida por $y = c_2$. Observe que la frontera del dominio $D$, $y = 0$, es en sí misma una línea de corriente. Vea la figura 5.6.2. ❑

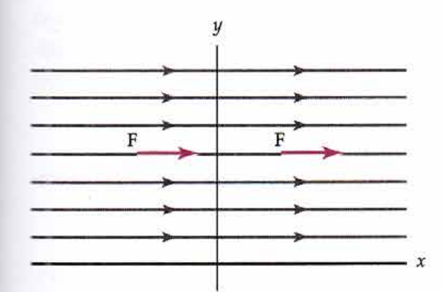


**Figura 5.6.2** Flujo uniforme

## Circulación y flujo neto

Dada una curva cerrada simple $C$ orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj en el plano y una función compleja $f$ que representa el campo de velocidades de un flujo de fluido planar, nos podemos hacer las dos siguientes preguntas:

($i$) ¿Hasta qué grado el fluido tiende a fluir alrededor de la curva $C$?

($ii$) ¿Cuál es la diferencia neta entre las tasas con las que el fluido entra y sale de la región acotada por la curva $C$?

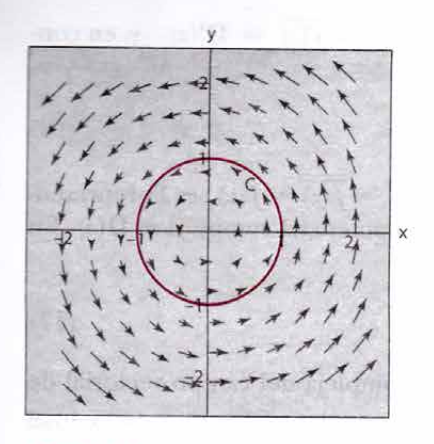


**Figura 5.6.3** Circulación positiva y flujo neto igual a cero

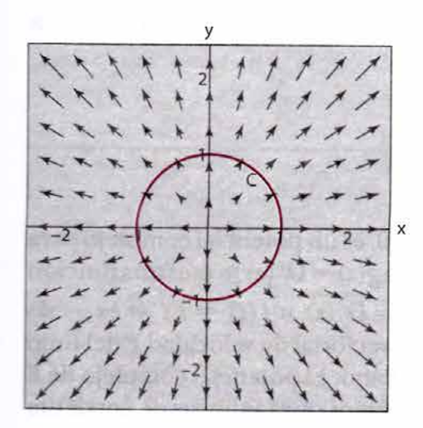


**Figura 5.6.4** Circulación cero y flujo neto positivo

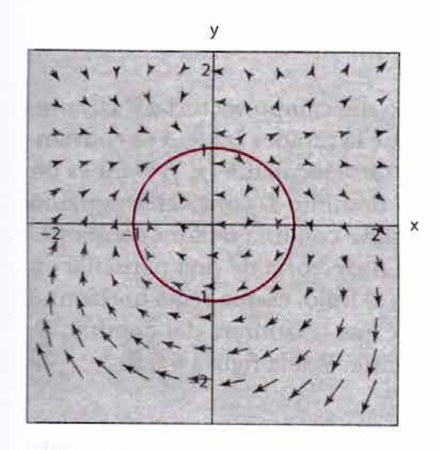


**Figura 5.6.5** Campo de velocidad para el inciso (a) del ejemplo 4

Las cantidades consideradas en las preguntas ($i$) y ($ii$) se llaman **circulación** en torno a $C$ y **flujo neto** a través de $C$, respectivamente. Una definición exacta de la circulación y del flujo depende del uso de una integral de contorno que involucra la representación compleja $f$ y se presentará en breve. Mientras tanto, podemos decidir si la circulación o flujo neto es positivo, negativo o 0 al graficar el campo vectorial de velocidad $f$ del flujo. Al igual que con los argumentos de los números complejos, se considera el sentido contra las manecillas del reloj de un flujo como la dirección "positiva". Así, un flujo tendrá una circulación positiva alrededor de $C$ si el fluido tiende a fluir en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de $C$. De manera similar, una circulación negativa significa que el fluido tiende a fluir en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de $C$, y una circulación 0 significa que el flujo es perpendicular a $C$. Por ejemplo, en la figura 5.6.3, la circulación es positiva ya que el fluido tiende a fluir en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de $C$, mientras que la circulación en la figura 5.6.4 es 0 ya que el flujo es perpendicular a la curva $C$. De la misma manera, consideramos que un flujo neto positivo significa que el fluido sale de la región delimitada por la curva $C$ con una velocidad mayor de lo que entra. Esto indica la presencia de una **fuente** dentro de $C$, es decir, un punto en el cual se produce el fluido. Por el contrario, un flujo neto negativo indica que el fluido entra en la región delimitada por $C$ con una velocidad mayor de lo que sale, y esto indica la presencia de un **sumidero** dentro de $C$, es decir, un punto en el cual desaparece el fluido. Si el flujo neto es 0, entonces el fluido entra y sale de $C$ con la misma velocidad. En la figura 5.6.3, el flujo es tangente a la circunferencia $C$. Por tanto, no cruza a $C$ el fluido, y esto implica que el flujo neto a través de $C$ es 0. Por otro lado, en la figura 5.6.4, el flujo neto a través de $C$ es positivo porque el flujo parece sólo salir de la región limitada por $C$.

---

**EJEMPLO 4 Circulación y flujo neto de un fluido**

Sea $C$ la circunferencia unitaria $|z| = 1$ en el plano complejo. Para cada flujo $f$ determine gráficamente si la circulación alrededor de $C$ es positiva, negativa o 0. También, determine si el flujo neto a través de $C$ es positivo, negativo o 0: (**a**) $f(z) = (z - i)^2$ (**b**) $f(z) = 1/z$.

**Solución** En cada inciso, hemos utilizado un sistema algebraico computarizado para trazar el campo vectorial de velocidad $f$ y la curva $C$.

(**a**) Se presenta en la figura 5.6.5 al campo de velocidades $f(z) = (z - i)^2$. Debido a que el campo vectorial $f$ muestra que el fluido fluye en el sentido de las manecillas del reloj sobre $C$, se concluye que la circulación es negativa. Además, ya que parece que ningún fluido cruza la curva $C$, el flujo neto es 0.

(**b**) El campo de velocidades $f(z) = 1/z$ de la figura 5.6.6 indica que el fluido fluye en sentido contrario a las manecillas del reloj en cantidad igual a como lo hace en el sentido de estas manecillas alrededor de $C$. Esto sugiere que la circulación es 0. Además, debido a que la misma cantidad de fluido que parece entrar en la región acotada por $C$, es la misma que sale de la región acotada por $C$, también tenemos que el flujo neto es 0.

## Repaso de la circulación y del flujo neto

Sea que $\mathbf{T}$ denote al vector tangente unitario orientado positivamente, en un contorno cerrado simple $C$. Si $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ representa un campo vectorial de velocidad del flujo de fluidos en dos dimensiones, se define la **circulación** de $\mathbf{F}$ a lo

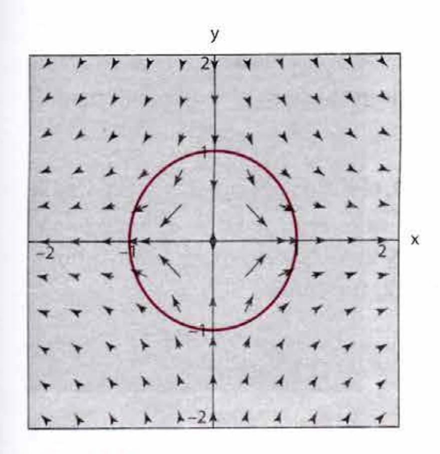



Figura 5.6.6 Campo de velocidad para el inciso (b) del ejemplo 4

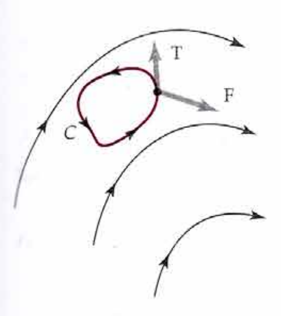



Figura 5.6.7 El flujo de fluido tiende a girar alrededor de $C$

largo de $C$, como la integral de línea real $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$. Ya que $d\mathbf{r}/dt = (d\mathbf{r}/ds)(ds/dt)$, donde $d\mathbf{r}/ds = (dx/ds)\mathbf{i} + (dy/ds)\mathbf{j} = \mathbf{T}$ es una tangente unitaria a $C$, la integral de línea se puede escribir en términos de la componente tangencial del vector de velocidad $\mathbf{F}$, es decir,

$$\text{circulación} = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds. \tag{18}$$

Como ya lo hemos analizado, la circulación de $\mathbf{F}$ es una medida de la cantidad por la cual el fluido tiende a girar, o a circular, alrededor de la curva $C$. Si $\mathbf{F}$ es perpendicular a $\mathbf{T}$ por cada $(x, y)$ en $C$, entonces $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = 0$ y la curva no se mueve en absoluto. Por otra parte, $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds > 0$ y $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds < 0$ significan que el fluido tiende a recorrer $C$ en contra y en sentido de las manecillas del reloj, respectivamente. Vea la figura 5.6.7.

Ahora si $\mathbf{N} = (dy/ds)\mathbf{i} - (dx/ds)\mathbf{j}$ denota al vector unitario normal a un contorno simple y cerrado orientado positivamente $C$, y si $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ de nuevo representa un campo de velocidad de flujo de fluidos en dos dimensiones, se define al **flujo neto** de $\mathbf{F}$ como la integral de línea real de la componente normal del vector de velocidad $\mathbf{F}$:

$$\text{flujo neto} = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, ds. \tag{19}$$

En concreto, (19) define la *tasa neta* con la que el fluido está cruzando la curva $C$ en la dirección de la normal $\mathbf{N}$ y se mide en unidades de área por unidad de tiempo. En otras palabras, el flujo neto a través de $C$ es la diferencia entre la tasa con la cual el fluido entra y la tasa con la que sale el fluido de la región acotada por $C$. Un valor distinto de cero de $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, ds$ indica la presencia de fuentes o sumideros para que el fluido dentro de la curva $C$.

Ahora si $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ es la representación compleja del campo de velocidades $\mathbf{F}$ de un fluido, las integrales de línea (18) y (19) se puede calcular de forma simultánea evaluando la integral de contorno simple $\oint_C \overline{f(z)}\, dz$. Para ver cómo se hace esto, primero observe:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \oint_C (P\,\mathbf{i} + Q\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j}\right) ds = \oint_C P\, dx + Q\, dy$$
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, ds = \oint_C (P\,\mathbf{i} + Q\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{dy}{ds}\mathbf{i} - \frac{dx}{ds}\mathbf{j}\right) ds = \oint_C P\, dy - Q\, dx,$$

y entonces:

$$\begin{aligned}\oint_C \overline{f(z)}\, dz &= \oint_C (P - iQ)\,(dx + idy) \\ &= \left(\oint_C P\, dx + Q\, dy\right) + i\left(\oint_C P\, dy - Q\, dx\right) \\ &= \left(\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds\right) + i\left(\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, ds\right).\end{aligned} \tag{20}$$

La ecuación (20) muestra que (18) y (19) se pueden encontrar calculando $\oint_C \overline{f(z)}\, dz$ e identificando las partes real e imaginaria del resultado. Es decir,

$$\text{circulación} = \operatorname{Re}\left(\oint_C \overline{f(z)}\, dz\right) \quad \text{y} \quad \text{flujo neto} = \operatorname{Im}\left(\oint_C \overline{f(z)}\, dz\right). \tag{21}$$

### *EJEMPLO 5* *Circulación y flujo neto*

*Use (21) para calcular la circulación y el flujo neto para el flujo y la curva C* en el inciso (a) del ejemplo 4.

**Solución** A partir del inciso (a) del ejemplo 4, el flujo es $f(z) = (z - i)^2$ y $C$ es la circunferencia $|z| = 1$. Entonces $\overline{f(z)} = \left(\overline{z - i}\right)^2 = (\bar{z} + i)^2 = \bar{z}^2 + 2i\bar{z} - 1$, y $C$ está parametrizada por $z(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Usando $dz = ie^{it}dt$ y el método de integración en (11) de la sección 5.2, tenemos:

$$\begin{aligned}\oint_C \overline{f(z)}\, dz &= \int_0^{2\pi} \left(e^{-2it} + 2ie^{-it} - 1\right) ie^{it}\, dt \\ &= i\int_0^{2\pi} \left(e^{-it} + 2i - e^{it}\right) dt \\ &= \left[-e^{-it} - 2t - e^{it}\right]_0^{2\pi} = -4\pi + 0i.\end{aligned} \tag{22}$$

En el último cálculo se utilizó $e^{-2\pi i} = e^{2\pi i} = e^0 = 1$. Ahora, comparando los resultados obtenidos de (22) a (21), vemos que la circulación alrededor de $C$ es $-4\pi$ y el flujo neto a través de $C$ es 0. La circulación negativa y el flujo neto cero son coherentes con nuestro análisis geométrico de la figura 5.6.5 para el flujo $f$ del inciso (a) del ejemplo 4. ❑

El análisis del flujo de $f$ del inciso (b) en el ejemplo 4 se deja como un ejercicio. Vea el problema 25 de los ejercicios 5.6.

### EJEMPLO 6 La circulación y el flujo neto

Supongamos que el campo de velocidades del flujo de fluidos es $f(z) = (1 + i)z$. Calcula la circulación y el flujo neto a través de $C$, donde $C$ es la circunferencia unitaria $|z| = 1$.

**Solución** Puesto que $\overline{f(z)} = (1 - i)\bar{z}$ y $z(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, tenemos de (21)

$$\oint_C \overline{f(z)}\, dz = \int_0^{2\pi} (1 - i)e^{-it}\, ie^{it}\, dt = (1 + i)\int_0^{2\pi} dt = 2\pi + 2\pi i.$$

Así, la circulación alrededor de $C$ es $2\pi$ y el flujo neto a través de $C$ también es $2\pi$. ❑

### EJEMPLO 7 Aplicación del teorema de Cauchy-Goursat

Supongamos que el campo de velocidades del flujo de fluidos es $f(z) = \overline{\cos \bar{z}}$. Calcule la circulación y el flujo neto a través de $C$, donde $C$ es el cuadrado con vértices $z = 1$, $z = i$, $z = -1$, y $z = -i$.

**Solución** Debemos calcular $\oint_C \overline{f(z)}\, dz = \oint_C \overline{\overline{\cos \bar{z}}}\, dz = \oint_C \cos z\, dz$, y después tomar la parte real e imaginaria de la integral para encontrar la circulación y el flujo neto, respectivamente. Pero como la función cos $z$ es analítica en todas partes, tenemos inmediatamente que $\oint_C \cos z\, dz = 0$ , por el teorema de Cauchy-Goursat. Por tanto, la circulación y el flujo neto son iguales a 0.

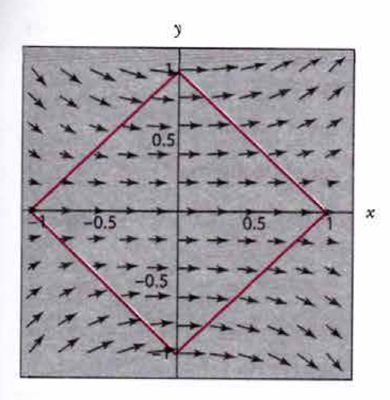



Figura 5.6.8 Campo de velocidades para el ejemplo 7

El campo de velocidades $f(z) = \overline{\cos z}$ y el contorno $C$ se muestran en la figura 5.6.8. Los resultados obtenidos sólo para la circulación y flujo neto son coherentes con nuestro análisis anterior en el ejemplo 4 acerca de la geometría de los flujos. ❑

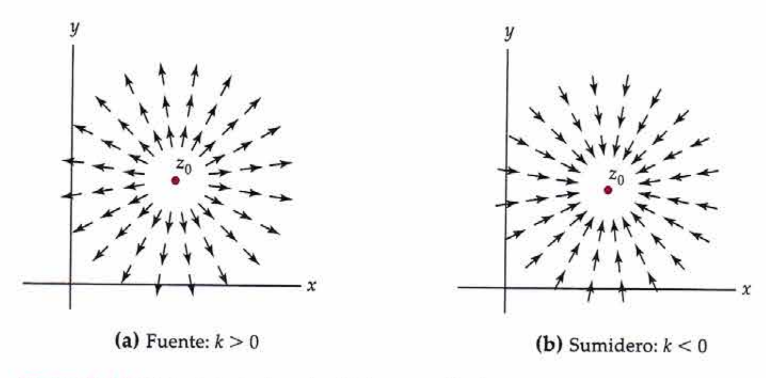
**EJEMPLO 8 Circulación y flujo neto**

La función compleja $f(z) = k/(\bar{z} - \bar{z}_0)$ donde $k = a + ib$ y $z_0$ son constantes complejas, da lugar a un flujo en el dominio definido para $z \neq z_0$. Si $C$ es un contorno simple cerrado con $z_0$ en su interior, entonces con la fórmula integral de Cauchy, (1) de la sección 5.5, se obtiene

$$\oint_C \overline{f(z)}\, dz = \oint_C \frac{a - ib}{z - z_0}\, dz = 2\pi i(a - ib) = 2\pi b + 2\pi ai.$$

De (21) vemos que la circulación alrededor de $C$ es $\text{Re}(2\pi b + 2\pi ai) = 2\pi b$ y el flujo neto a través de $C$ es $\text{Im}(2\pi b + 2\pi ai) = 2\pi a$. ❑

Nota en el ejemplo 8, si $z_0$ fuera un punto exterior de la región acotada por $C$, entonces se deduciría del teorema de Cauchy-Goursat que tanto la circulación como el flujo neto son cero. Además, cuando la constante $k$ es real ($a \neq 0$, $b = 0$), la circulación alrededor de $C$ es 0, pero el flujo neto a través de $C$ es $2\pi k$. De nuestro análisis anterior en esta sección, se deduce que el número complejo $z_0$ es una fuente para el flujo cuando $k > 0$ y un sumidero cuando $k < 0$. Los campos de velocidad correspondientes a estos dos casos se muestran en la figura 5.6.9. El flujo que se muestra en la figura 5.6.4 es del tipo que se muestra en la figura 5.6.9(a).




(a) Fuente: $k > 0$ (b) Sumidero: $k < 0$

Figura 5.6.9 Dos campos de velocidad normalizada

## EJERCICIOS 5.6

*Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-15.*

En los problemas 1 al 4, para el campo de velocidades $\mathbf{F}(x, y)$ dado, compruebe que $\text{div}\,\mathbf{F} = 0$ y $\text{rot}\,\mathbf{F} = 0$ en un dominio adecuado $D$.

1. $\mathbf{F}(x, y) = (\cos\theta_0)\mathbf{i} + (\text{sen}\,\theta_0)\mathbf{j}$, $\theta_0$ es una constante

2. $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$

3. $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + (3 - 2y)\mathbf{j}$

4. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \dfrac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$

En los problemas 5 a 8 obtenga la representación compleja $f(z)$ del campo de velocidad $\mathbf{F}(x, y)$. Exprese la función $g(z) = \overline{f(z)}$ en términos del símbolo $z$ y compruebe que $g(z)$ es una función analítica en un dominio adecuado $D$.

**5.** $\mathbf{F}(x, y)$ en el problema 1

**6.** $\mathbf{F}(x, y)$ en el problema 2

**7.** $\mathbf{F}(x, y)$ en el problema 3

**8.** $\mathbf{F}(x, y)$ en el problema 4

En los problemas 9 a 12 encuentra el campo de velocidades de $\mathbf{F}(x, y)$ del flujo de un fluido ideal determinado por la función analítica dada $g(z)$.

**9.** $g(z) = (1 + i)z^2$

**10.** $g(z) = \operatorname{sen} z$

**11.** $g(z) = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y$

**12.** $g(z) = x^3 - 3xy^2 + i\left(3x^2y - y^3\right)$

En los problemas 13 a 16 encuentre un potencial complejo de velocidad $\Omega(z)$ de la representación compleja $f(z)$ del campo indicado de velocidad $\mathbf{F}(x, y)$. Compruebe su respuesta usando (17). Describa las líneas equipotenciales y las líneas de corriente.

**13.** $\mathbf{F}(x, y)$ en el problema 1

**14.** $\mathbf{F}(x, y)$ en el problema 2

**15.** $\mathbf{F}(x, y)$ en el problema 3

**16.** $\mathbf{F}(x, y)$ en el problema 4

En los problemas 17 y 18 la función analítica dada $\Omega(z)$ es un potencial complejo de velocidad para el flujo de un fluido ideal. Encuentre el campo de velocidad $\mathbf{F}(x, y)$ del flujo.

**17.** $\Omega(z) = \frac{1}{3}iz^3$

**18.** $\Omega(z) = \frac{1}{4}z^4 + z$

**19.** Demuestre que

$$\mathbf{F}(x, y) = A\left[\left(1 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right)\mathbf{i} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\mathbf{j}\right], \quad A > 0,$$

es un campo de velocidades de un fluido ideal en cualquier dominio $D$ que no contiene al origen.

**20.** Compruebe que la función analítica $\Omega(z) = A\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ es un potencial complejo de velocidad para el flujo cuyo campo de velocidades es $\mathbf{F}(x, y)$ está en el problema 19.

**21.** **(a)** Considere el campo de velocidades del problema 19. Describa el campo $\mathbf{F}(x, y)$ en un punto $(x, y)$ lejos del origen.

**(b)** Para el potencial complejo de velocidad del problema 20, ¿cómo hace la observación de que $\Omega(z) \to Az$ cuando $|z|$ crece? Compruebe su respuesta del inciso (a).

**22.** Un **punto de estancamiento** en un flujo de fluido es un punto en que el campo de velocidad $\mathbf{F}(x, y) = 0$. Determine los puntos de estancamiento para:

**(a)** el flujo del ejemplo 3(a).

**(b)** el flujo del problema 19.

**23.** Para cualesquiera dos números reales $k$ y $x_1$, la función $\Omega(z) = k\text{Ln}(z - x_1)$ es analítica en el semiplano superior y por tanto es potencial complejo para el flujo de un fluido ideal. El número real $x_1$ es un sumidero cuando $k < 0$ y una fuente para el flujo cuando $k > 0$.

**(a)** Demuestre que las líneas de corriente son los rayos que salen de $x_1$.

**(b)** Demuestre que la representación compleja $f(z)$ del campo de velocidad $\mathbf{F}(x, y)$ del flujo es

$$f(z) = k\frac{z - x_1}{|z - x_1|^2}$$

y concluya que el flujo está dirigido directamente hacia $x_1$ exactamente cuando $k < 0$.

**24.** El potencial complejo $\Omega(z) = k\text{Ln}(z - 1) - k\text{Ln}(z + 1)$, $k > 0$, determine el flujo de un fluido ideal en la mitad superior del plano $y > 0$ con una fuente única en $z = 1$ y un sumidero simple en $z = -1$. Demuestre que las líneas de corriente son la familia de circunferencias $x^2 + (y - c_2)^2 = 1 + c_2^2$. Vea la figura 5.6.10.

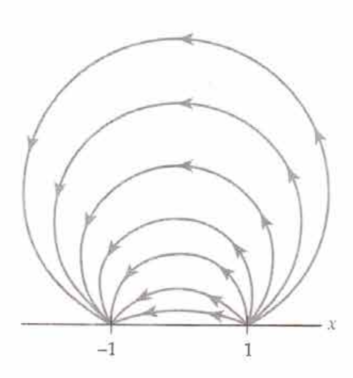


**Figura 5.6.19** Figura para el problema 24

En los problemas 25 al 30, calcule la circulación y el flujo neto para el flujo dado y el contorno cerrado $C$ que se indica.

**25.** $f(z) = \dfrac{1}{z}$; donde $C$ es la circunferencia $|z| = 1$

**26.** $f(z) = 2z$; donde $C$ es la circunferencia $|z| = 1$

**27.** $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$; donde $C$ es la circunferencia $|z - 1| = 2$

**28.** $f(z) = \bar{z}$; donde $C$ es el cuadrado con vértices $z = 0,\ z = 1,\ z = 1 + i,\ z = i$

**29.** $\mathbf{F}(x, y) = (4x + 3y)\mathbf{i} + (2x - y)\mathbf{j}$, donde $C$ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$

**30.** $\mathbf{F}(x, y) = (x + 2y)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}$, donde $C$ es el cuadrado con vértices $z = 0$, $z = 1 + i$, $z = 2i$, $z = -1 + i$

## Enfocando los conceptos

**31.** Suponga que $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ es una representación compleja de un campo de velocidad $\mathbf{F}$ del flujo de un fluido ideal en un dominio simplemente conexo $D$ del plano complejo. Suponga que $P$ y $Q$ tienen derivadas parciales continuas en toda $D$. Si $C$ es cualquier curva cerrada simple situada en $D$, demuestre que la circulación alrededor de $C$ y el flujo neto a través de $C$ son cero.

**32.** El flujo descrito por el campo de velocidades $f(z) = (a + ib)/\bar{z}$ se dice que tiene un **vórtice** en $z = 0$. La naturaleza geométrica de las líneas de corriente depende de la elección de $a$ y $b$.

**(a)** Demuestre que si $z(t) = x(t) + iy(t)$ es la trayectoria de una partícula en el flujo, entonces,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ax - by}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{bx + ay}{x^2 + y^2}.$$

**(b)** Las coordenadas rectangulares y las coordenadas polares están relacionadas por $r^2 = x^2 + y^2$, $\tan\theta = y/x$.

Utilice estas ecuaciones para demostrar que

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right), \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r^2}\left(-y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt}\right).$$

**(c)** Utilice las ecuaciones de los incisos (a) y (b) para demostrar que

$$\frac{dr}{dt} = \frac{a}{r}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{b}{r^2}.$$

**(d)** Utilice las ecuaciones del inciso (c) para concluir que las líneas de corriente del flujo son espirales logarítmicas $r = ce^{a\theta/b}$, $b \neq 0$. Use una herramienta de graficación para comprobar que una partícula recorre una trayectoria en una dirección en contra de las manecillas del reloj si y sólo si $a < 0$, y en dirección de las manecillas del reloj si y sólo si $b < 0$. ¿Cuál de estas direcciones corresponde al movimiento en espiral del vórtice?

## CAPÍTULO 5 PREGUNTAS DE REPASO

*Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-15.*

En los problemas 1 a 20 responda verdadero o falso. Si el enunciado es falso, justifique su respuesta ya sea demostrando que es falso o dando un contraejemplo; si el enunciado es verdadero, justifique su respuesta, ya sea demostrando el enunciado o citando un resultado apropiado en este capítulo.

1. Si $z(t)$, $a \leq t \leq b$, es una parametrización de un contorno $C$ y $z(a) = z(b)$, entonces $C$ es un contorno cerrado simple.

2. La integral de línea real $\int_C (x^2 + y^2)\, dx + 2xy\, dy$, donde $C$ está dada por $y = x^3$ de (0, 0) a (1, 1), tiene el mismo valor en la curva $y = x^6$ de (0, 0) a (1, 1).

3. El sector definido por $-\pi/6 < \arg(z) < \pi/6$ es un dominio simplemente conexo.

4. Si $f$ es analítica en $z_0$, entonces $f'''$ necesariamente existe en $z_0$.

5. Si $f$ es analítica dentro y sobre un contorno cerrado simple $C$ y $z_0$ es cualquier punto dentro de $C$, entonces el valor de $f(z_0)$ se determina por los valores de $f(z)$ sobre $C$.

6. Si $f$ es analítica en un contorno cerrado simple $C$, entonces $\oint_C f(z)\, dz = 0$.

7. Si $f$ es continua en un dominio $D$ y tiene una antiderivada $F$ en $D$, entonces una integral $\int_C f(z)\, dz$ tiene el mismo valor en todos los contornos $C$ en $D$ entre el punto inicial $z_0$ y el punto final $z_1$.

8. Si $\oint_C f(z)\, dz = 0$ para cada contorno cerrado simple $C$, entonces $f$ es analítica dentro y sobre $C$.

9. El valor de $\displaystyle\int_C \frac{z-2}{z}\, dz$ es el mismo para cualquier trayectoria $C$ en el semiplano derecho $\text{Re}(z) > 0$ entre $z = 1 + i$ y $z = 10 + 8i$.

10. Si $g$ es entera, entonces $\displaystyle\oint_C \frac{g(z)}{z-i}\, dz = \oint_{C_1} \frac{g(z)}{z-i}\, dz$, donde $C$ es la circunferencia $|z| = 3$ y $C_1$ es la elipse $x^2 + \frac{1}{9}y^2 = 1$.

11. $\displaystyle\oint_C \frac{1}{(z-z_0)(z-z_1)}\, dz = 0$ para todo contorno cerrado simple $C$ que encierre los puntos $z_0$ y $z_1$.

12. Si $f$ es analítica dentro y sobre el contorno cerrado $C$ simple y $z_0$ es un punto dentro de $C$, entonces $\displaystyle\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}\, dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\, dz.$

13. $\oint_C \text{Re}\,(z)\, dz$ es independiente de la trayectoria $C$ entre $z_0 = 0$ y $z_1 = 1 + i$.

14. $\int_C \left(4z^3 - 2z + 1\right) dz = \int_{-2}^{2} \left(4x^3 - 2x + 1\right) dx$, donde el contorno $C$ está compuesto por el segmento $C_1$ y $C_2$ que se muestran en la figura 5.R.1.

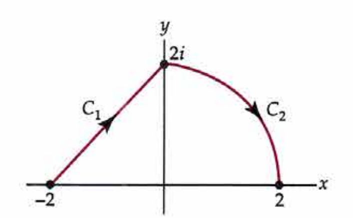


Figura 5.R.1 Figura para el problema 14

15. $\int_{C_1} z^n\, dz = \int_{C_2} z^n\, dz$ para todos los enteros $n$, donde $C_1$ es $z(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ y $C_2$ es $z(t) = Re^{it}$, $R > 1$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

16. Si $f$ es continua en el contorno $C$, entonces $\int_C f(z)\, dz + \int_{-C} f(z)\, dz = 0$.

17. Cualquier contorno $C$ con punto inicial $z_0 = -i$ y punto final de $z_1 = i$ que se encuentra en un dominio simplemente conexo $D$ que no contiene al origen o al eje real negativo, $\displaystyle\int_{-i}^{i} \frac{1}{z}\, dz = \text{Ln}(i) - \text{Ln}(-i) = \pi i.$

18. $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z^2+1}\, dz = 0$, donde $C$ es la elipse $x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$.

19. Si $p(z)$ es un polinomio en $z$, entonces la función $f(z) = 1/p(z)$ puede que nunca sea una función entera.

20. La función $f(z) = \cos z$ es entera y no una constante y, por lo tanto, no debe ser acotada.

En los problemas 21 a 40 intente llenar los espacios en blanco, sin consultar el libro.

21. $z(t) = e^{it^2}$, $0 \leq t \leq \sqrt{2\pi}$, es una parametrización de una ________.

22. $z(t) = z_0 + e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, es una parametrización de una ________.

**23.** La diferencia entre $z_1(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ y $z_2(t) = e^{i(2\pi - t)}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ es ________.

**24.** $\oint_C (2y + x - 6ix^2)\, dz =$ ________, donde $C$ es el triángulo con vértices 0, $i$, $1 + i$, recorrido en contra de las manecillas del reloj.

**25.** Si $f$ es una función polinomial y $C$ es un contorno simple cerrado, entonces $\oint_C f(z)\, dz =$ ________.

**26.** $\int_C z \operatorname{Im}(z)\, dz =$ ________, donde $C$ está dada por $z(t) = 2t + t^2 i$, $0 \leq t \leq 1$.

**27.** $\int_C |z|^2\, dz =$ ________ donde $C$ es el segmento de recta dado de $1 - i$ a $1 + i$.

**28.** $\oint_C (\bar{z})^n\, dz =$ ________, donde $n$ es un entero y $C$ es $z(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

**29.** $\int_C \operatorname{sen} \frac{z}{2}\, dz =$ ________, donde $C$ está dada por $z(t) = 2i + 4e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

**30.** $\oint_C \sec z\, dz =$ ________, donde $C$ es $|z| = 1$.

**31.** $\oint_C \frac{1}{z(z-1)}\, dz =$ ________, donde $C$ es $|z - 1| = \frac{1}{2}$.

**32.** Si $f(z) = \oint_C \frac{\xi^2 + 6\xi - 2}{\xi - z}\, d\xi$, donde $C$ es $|z| = 3$, entonces $f(1 + i) =$ ________.

**33.** Si $f(z) = z^3 + e^z$ y $C$ es el contorno $z = 8e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, entonces $\oint_C \frac{f(z)}{(z + \pi i)^3}\, dz =$ ________.

**34.** Si $|f(z)| \leq 2$ en la circunferencia $|z| = 3$, entonces $\left| \oint_C f(z)\, dz \right| \leq$ ________.

**35.** Si $n$ es un entero positivo y $C$ es el contorno $|z| = 2$, entonces $\oint_C z^{-n} e^z\, dz =$

**36.** En $|z| = 1$, la integral de contorno $\oint_C \frac{\cos z}{z^n}\, dz$ es igual a ________ para $n = 1$, es igual a ________ para $n = 2$, y es igual a ________ para $n = 3$.

**37.** $\oint_C z^n\, dz = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{________} \\ 2\pi i, & \text{si } n \text{________} \end{cases}$, donde $n$ es un entero y $C$ es la circunferencia $|z| = 1$.

**38.** El valor de la integral $\oint_C \frac{z}{z + i}\, dz$ en el contorno $C$ que se muestra en la figura 5.R.2 es ________.

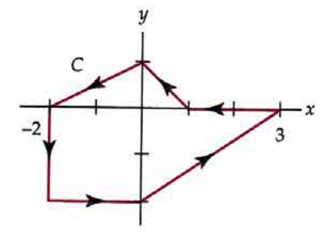



**Figura 5.R.2** Figura para el problema 38

**39.** El valor de la integral $\int_C (2z + 1)\,dz$ en el contorno $C$, compuesto de segmentos de recta $C_1, C_2, \ldots, C_{11}$ que se muestran en la figura 5.R.3 es ________.

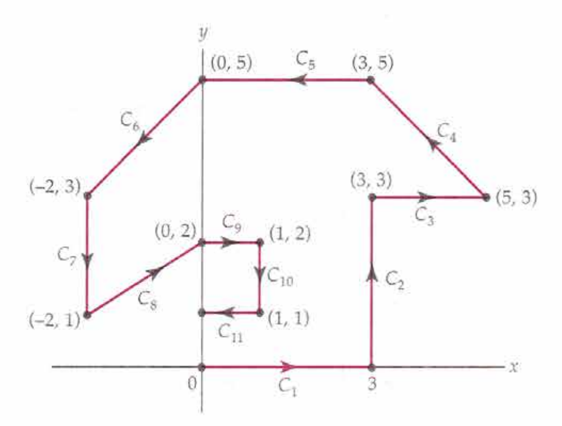



**Figura 5.R.3** Figura para el problema 39

**40.** El valor de la integral $\oint_C \frac{e^z}{z^2(z - \pi i)}\,dz$ en el contorno cerrado $C$ que se muestra en la figura 5.R.4 es ________.

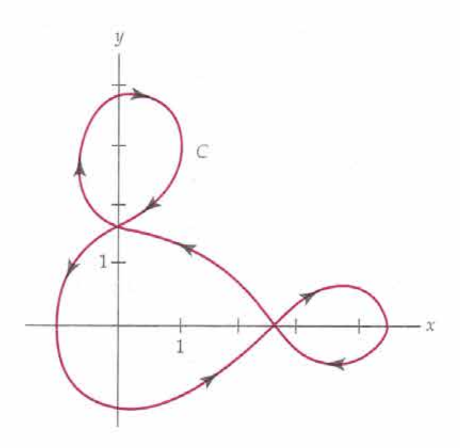


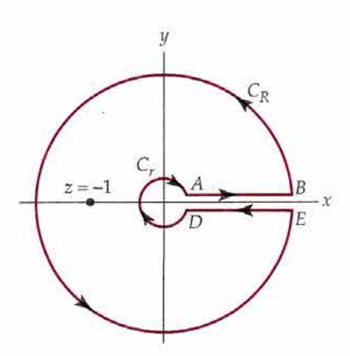

**Figura 5.R.4** Figura para el problema 40

# CAPÍTULO 6

# Series y residuos

## Contenido del capítulo






Contorno especial usado para evaluar una integral real. Vea la página 326.

**Introducción** La fórmula integral de Cauchy para derivadas indica que si una función $f$ es analítica en un punto $z_0$, entonces tiene derivadas de todos los órdenes en ese punto. Como consecuencia de este resultado, veremos que $f$ siempre se puede desarrollar en una serie de potencia centrada en ese punto. Por otra parte, si $f$ no es analítica en $z_0$, aún se puede desarrollar en un tipo diferente de serie conocida como *serie de Laurent*. La noción de serie de Laurent nos conduce al concepto de *residuo*, y esto, a su vez, conduce a una forma más de evaluación de integrales complejas y, en algunos casos, reales.

## 6.1 Sucesiones y Series

Gran parte de la teoría de sucesiones y series complejas es similar a la encontrada en el cálculo real. En esta sección se exploran las definiciones de convergencia y divergencia de sucesiones y series infinitas complejas. Además, damos algunas pruebas para la convergencia de series infinitas. Se le recomienda preste especial atención a lo que se dice acerca de las *series geométricas* ya que este tipo de series serán importantes en las siguientes secciones de este capítulo.

**Sucesiones** Una sucesión compleja $\{z_n\}$ es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos y cuyo rango es un subconjunto de los números complejos **C**. En otras palabras, a cada número entero $n = 1, 2, 3, \dots$ le asignamos un único número complejo $z_n$. Por ejemplo, la sucesión $\{1 + i^n\}$ es

$$\begin{array}{ccccc} 1+i, & 0, & 1-i, & 2, & 1+i, \dots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ n=1, & n=2, & n=3, & n=4, & n=5, \dots \end{array} \tag{1}$$

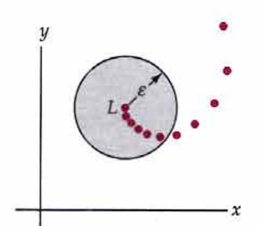



Figura 6.1.1 Si $\{z_n\}$ converge a $L$, todos excepto un número finito de términos están en cada vecindad $\varepsilon$ de $L$

Si $\lim_{n\to\infty} z_n = L$, se dice que la sucesión $\{z_n\}$ es **convergente**. En otras palabras, $\{z_n\}$ converge al número $L$ si para cada número real positivo $\varepsilon$ se puede encontrar un entero positivo $N$ tal que $|z_n - L| < \varepsilon$ siempre que $n > N$.

Ya que $|z_n - L|$ es la distancia, los términos $z_n$ de una sucesión que converge a $L$ se pueden hacer arbitrariamente cercanos a $L$. En otras palabras, cuando una sucesión $\{z_n\}$ converge a $L$, entonces, todos salvo un número finito de términos de la sucesión están dentro de cada vecindad $\varepsilon$ de $L$. Vea la figura 6.1.1. Una sucesión que no es convergente se dice que es **divergente**.

La sucesión $\{1 + i^n\}$ que se muestra en (1) es divergente ya que el término general de $z_n = 1 + i^n$ no se aproxima a un número complejo fijo conforme $n \to \infty$. De hecho, debe comprobar que los cuatro primeros términos de esta sucesión se repiten interminablemente conforme $n$ aumenta.

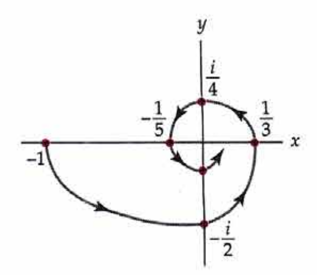



Figura 6.1.2 Los términos de la sucesión $\{i^{n+1}/n\}$ hacen una espiral hacia el 0

**EJEMPLO 1 Una sucesión convergente**

La sucesión $\left\{\dfrac{i^{n+1}}{n}\right\}$ converge ya que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{i^{n+1}}{n} = 0$. Como vemos en

$$-1, -\frac{i}{2}, \frac{1}{3}, \frac{i}{4}, -\frac{1}{5}, \dots,$$

y en la figura 6.1.2, los términos de la sucesión, marcados con puntos de colores en la figura, van en espiral hacia el punto $z = 0$ cuando $n$ aumenta. ❑

El siguiente teorema para las sucesiones es el análogo del teorema 2.6.1 en la sección 2.6.

**Teorema 6.1.1 Criterio para la convergencia**

Una sucesión $\{z_n\}$ converge a un número complejo $L = a + ib$ si y sólo si $\text{Re}(z_n)$ converge a $\text{Re}(L) = a$ e $\text{Im}(z_n)$ converge a $\text{Im}(L) = b$.

**EJEMPLO 2 Ilustración del teorema 6.1.1**

Considere la sucesión $\left\{ \dfrac{3 + ni}{n + 2ni} \right\}$. De

$$z_n = \frac{3 + ni}{n + 2ni} = \frac{(3 + ni)(n - 2ni)}{n^2 + 4n^2} = \frac{2n^2 + 3n}{5n^2} + i\frac{n^2 - 6n}{5n^2},$$

vemos que

$$\text{Re}(z_n) = \frac{2n^2 + 3n}{5n^2} = \frac{2}{5} + \frac{3}{5n} \to \frac{2}{5}$$

y

$$\text{Im}(z_n) = \frac{n^2 - 6n}{5n^2} = \frac{1}{5} - \frac{6}{5n} \to \frac{1}{5}$$

conforme $n \to \infty$. Del teorema 6.1.1, los últimos resultados son suficientes para concluir que la sucesión dada converge a $a + ib = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$. ❑

**Serie** Una **serie infinita** o **serie** de números complejos

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n + \cdots$$

es **convergente** si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$, donde

$$S_n = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n$$

converge. Si $S_n \to L$ conforme $n \to \infty$, se dice que la serie converge a $L$ o que la **suma** de la serie es $L$.

**Series geométricas** Una **serie geométrica** es cualquier serie de la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} az^{k-1} = a + az + az^2 + \cdots + az^{n-1} + \cdots. \tag{2}$$

Para (2), el $n$-ésimo término de la sucesión de sumas parciales es

$$S_n = a + az + az^2 + \cdots + az^{n-1}. \tag{3}$$

Cuando una serie infinita es una serie geométrica, siempre es posible encontrar una fórmula para $S_n$. Para demostrar por qué esto es así, se multiplica $S_n$ en (3) por $z$,

$$zS_n = az + az^2 + az^3 + \cdots + az^n,$$

y se resta este resultado a $S_n$. Se eliminan todos los términos excepto el primer término en $S_n$ y el último término de $zS_n$:

$$\begin{aligned} S_n - zS_n &= \left(a + az + az^2 + \cdots + az^{n-1}\right) \\ &\quad - \left(az + az^2 + az^3 + \cdots + az^{n-1} + az^n\right) \\ &= a - az^n \end{aligned}$$

o $(1 - z)S_n = a(1 - z^n)$. Resolviendo la última ecuación para $S_n$ se obtiene

$$S_n = \frac{a(1-z^n)}{1-z}. \tag{4}$$

Ahora $z^n \to 0$ conforme $n \to \infty$ siempre que $|z| < 1$, y así $S_n \to a/(1 - z)$. En otras palabras, para $|z| < 1$, la suma de una serie geométrica (2) es $a/(1 - z)$:

$$\frac{a}{1-z} = a + az + az^2 + \cdots + az^{n-1} + \cdots. \tag{5}$$

Una serie geométrica (2) diverge cuando $|z| \geq 1$.

**Series geométricas especiales** A continuación se presentan varias deducciones inmediatas de (4) y (5) que serán especialmente útiles en las dos secciones que siguen. Si hacemos $a = 1$, la igualdad en (5) es

Debe recordar (6) y (7).

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots. \tag{6}$$

Entonces si reemplazamos el símbolo $z$ por $-z$ en (6), obtenemos un resultado similar

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots. \tag{7}$$

Al igual que (5), la igualdad en (7) es válida para $|z| < 1$ ya que $|-z| = |z|$. Ahora, con $a = 1$, (4) nos da la suma de los $n$ primeros términos de la serie en (6):

$$\frac{1-z^n}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n-1}.$$

Si volvemos a escribir la parte izquierda de la ecuación anterior como $\dfrac{1-z^n}{1-z} = \dfrac{1}{1-z} + \dfrac{-z^n}{1-z}$, se obtiene una forma alternativa

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n-1} + \frac{z^n}{1-z} \tag{8}$$

que se utilizarán en la demostración de los dos teoremas principales de este capítulo.

---

**EJEMPLO 3 Series geométricas convergentes**

La serie infinita

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^k}{5^k} = \frac{1+2i}{5} + \frac{(1+2i)^2}{5^2} + \frac{(1+2i)^3}{5^3} + \cdots$$

es una serie geométrica. Tiene la forma dada en (2) con $a = \frac{1}{5}(1 + 2i)$ y $z = \frac{1}{5}(1 + 2i)$. Ya que $|z| = \sqrt{5}/5 < 1$, la serie es convergente y su suma está dada por (5):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^k}{5^k} = \frac{\dfrac{1+2i}{5}}{1 - \dfrac{1+2i}{5}} = \frac{1+2i}{4-2i} = \frac{1}{2}i.$$

❑

Pasamos ahora a algunos teoremas importantes sobre la convergencia y la divergencia de una serie infinita. Debe haber visto teoremas similares en un curso de cálculo elemental.

**Teorema 6.1.2 Una condición necesaria de la convergencia**

Si $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

**Demostración** Sea $L$ la suma de la serie. Entonces, $S_n \to L$ y $S_{n-1} \to L$ cuando $n \to \infty$. Al tomar el límite de ambos lados de $S_n - S_{n-1} = z_n$ cuando $n \to \infty$ se obtiene la conclusión deseada. ❑

**Una prueba para la divergencia** La contrapuesta* de la proposición en el teorema 6.1.2 es la conocida prueba del $n$-ésimo término para la divergencia de una serie infinita.

**Teorema 6.1.3 Prueba del $n$-ésimo término para la divergencia**

Si $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$, entonces, $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ diverge .

Por ejemplo, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (ik + 5)/k$ diverge ya que $z_n = (in + 5)/n \to i \neq 0$ conforme $n \to \infty$. La serie geométrica (2) diverge si $|z| \geq 1$ porque aún en el caso de que $\lim_{n\to\infty} |z^n|$ exista, el límite no es cero.

**Definición 6.1.1 Convergencia absoluta y condicional**

Una serie infinita $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ se dice que es **absolutamente convergente** si $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ converge. Una serie infinita $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ se dice que es **condicionalmente convergente** si converge, pero $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ diverge.

En el cálculo elemental una serie real de la forma $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ se llama **serie-$p$** y converge para $p > 1$ y diverge para $p \leq 1$. Usamos este resultado bien conocido en el siguiente ejemplo.

**EJEMPLO 4 Convergencia absoluta**

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k^2}$ es absolutamente convergente ya que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{i^k}{k^2}\right|$ es igual la serie-$p$ real convergente $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Aquí identificamos $p = 2 > 1$. ❑

Al igual que en el cálculo real:

*Convergencia absoluta implica convergencia.*

---

*Vea el pie de la página 139.

Vea el problema 47 de los ejercicios 6.1. Podemos concluir que la serie en el ejemplo 4,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k^2} = i - \frac{1}{2^2} - \frac{i}{3^2} + \cdots$$

converge ya que se demostró que es absolutamente convergente.

**Pruebas para la convergencia** Dos de las pruebas más frecuentemente utilizadas para la convergencia de las series infinitas se dan en los teoremas siguientes.

**Teorema 6.1.4 Prueba de la razón**

Supongamos que $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ es una serie de términos complejos distintos de cero tal que

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = L. \tag{9}$$

(*i*) Si $L < 1$, entonces la serie converge absolutamente.

(*ii*) Si $L > 1$ o $L = \infty$, entonces la serie diverge.

(*iii*) Si $L = 1$, la prueba no es concluyente.

**Teorema 6.1.5 Prueba de la raíz**

Supongamos $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ es una serie de términos complejos, tal que

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L. \tag{10}$$

(*i*) Si $L < 1$, entonces la serie converge absolutamente.

(*ii*) Si $L > 1$ o $L = \infty$, entonces la serie diverge.

(*iii*) Si $L = 1$, la prueba no es concluyente.

La demostración de pruebas de la razón y de la raíz son similares a las de sus contrapartes reales. Vea el problema 48 de los ejercicios 6.1. Estamos interesados principalmente en la aplicación de las pruebas 6.1.4 y 6.1.5 en la serie de potencias.

**Serie de potencias** El concepto de serie de potencias es importante en el estudio de las funciones analíticas. Una serie infinita de la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \cdots, \tag{11}$$

donde los coeficientes $a_k$ son constantes complejas, se llama una **serie de potencias** de $z - z_0$. La serie de potencias (11) se dice que está **centrada en** $z_0$; el punto complejo $z_0$ se conoce como el **centro** de la serie. En (11) también es conveniente definir $(z - z_0)^0 = 1$, incluso cuando $z = z_0$.

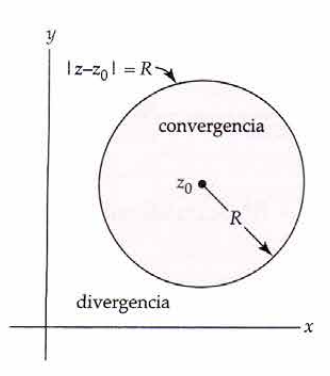



**Figura 6.1.3** No se puede establecer un enunciado general concerniente a la convergencia para puntos dentro del círculo $|z - z_0| = R$

**Círculo de convergencia** Cada serie de potencias complejas (11) tiene un **radio de convergencia.** Análogo al concepto de un intervalo de convergencia para la serie de potencias reales, una serie de potencias complejas (11) tiene un **círculo de convergencia**, que es el círculo centrado en $z_0$ de mayor radio $R > 0$ para el cual (11) converge en todo punto dentro del círculo $|z - z_0| = R$. Una serie de potencias converge absolutamente en todos los puntos $z$ dentro de su círculo de convergencia, es decir, para todo $z$ que satisface que $|z - z_0| < R$ y diverge en todos los puntos $z$ exteriores al círculo, esto es, para todo $z$ que satisface $|z - z_0| > R$. El radio de convergencia puede ser:

(*i*) $R = 0$ (en cuyo caso (11) converge sólo en su centro $z = z_0$),

(*ii*) $R$ un número finito positivo (en cuyo caso (11) converge en todos los puntos del interior del círculo $|z - z_0| = R$), o

(*iii*) $R = \infty$ (en cuyo caso (11) converge para todo $z$).

Una serie de potencias puede converger en todos, algunos o en ninguno de los puntos en el círculo de convergencia. Vea la figura 6.1.3 y el siguiente ejemplo.

---

### EJEMPLO 5 Círculo de convergencia

Considere la serie de potencias $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{z^{k+1}}{k}$. Mediante la prueba de la razón (9),

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{z^{n+2}}{n+1}}{\dfrac{z^{n+1}}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}|z| = |z|.$$

Así, la serie converge absolutamente para $|z| < 1$. El círculo de convergencia es $|z| = 1$ y el radio de convergencia es $R = 1$. Observe que en el círculo de convergencia $|z| = 1$, la serie no converge absolutamente ya que $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$ es la conocida serie armónica que es divergente. Considere que *esto no dice* que la serie diverge en el círculo de convergencia. De hecho, en $z = -1$, $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$ es una serie armónica alternante convergente. Además, se puede demostrar que la serie converge en todos los puntos en el círculo $|z| = 1$, *excepto* en $z = 1$. ❑

Debe quedar claro del teorema 6.1.4 y del ejemplo 5 que para una serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$, el límite (9) sólo depende de los coeficientes $a_k$. Así, si

(*i*) $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \neq 0$, el radio de convergencia es $R = \dfrac{1}{L}$; (12)

(*ii*) $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$ , el radio de convergencia es $R = \infty$; (13)

(*iii*) $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, el radio de convergencia es $R = 0$. (14)

Conclusiones similares se pueden hacer para la prueba de la raíz (10) utilizando

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \tag{15}$$

Por ejemplo, si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \neq 0$, entonces $R = 1/L$.

**EJEMPLO 6 Radio de convergencia**

Considere la serie de potencias $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}(z-1-i)^k$. Identificando $a_n = (-1)^{n+1}/n!$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)!}}{\frac{(-1)^{n+1}}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Entonces, por (13) el radio de convergencia es $\infty$; la serie de potencias con centro en $z_0 = 1 + i$ converge absolutamente para todo $z$, es decir, para $|z - 1 - i| < \infty$. ❑

**EJEMPLO 7 Radio de convergencia**

Considere la serie de potencias $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{6k+1}{2k+5}\right)^k (z-2i)^k$. Con $a_n = \left(\frac{6n+1}{2n+5}\right)^n$, la prueba de raíz en la forma (15) da

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{6n+1}{2n+5} = 3.$$

Por un razonamiento similar al que conduce a (12), se concluye que el radio de convergencia de la serie es $R = \frac{1}{3}$. El círculo de convergencia es $|z - 2i| = \frac{1}{3}$, la serie de potencias converge absolutamente para $|z - 2i| < \frac{1}{3}$. ❑

**La aritmética de las series de potencias** *A veces puede ser ventajoso* realizar ciertas *operaciones aritméticas* en una o más series de potencias. A pesar de que nos llevaría demasiado lejos profundizar en las propiedades de las series de potencias de una manera formal (establecer y demostrar teoremas), será útil puntualizar en este capítulo lo que podemos (o no podemos) hacer con las series de potencias. Por lo que a continuación se presentan algunos hechos.

- Una serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ se puede multiplicar por una constante compleja $c$ distinta de cero, sin afectar su convergencia o divergencia.
- Una serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ converge absolutamente dentro de su círculo de convergencia. Como consecuencia de ello, dentro del círculo de convergencia los términos de la serie se pueden reordenar y reorganizar de manera que la serie reorganizada tenga la misma suma $L$ que la serie original.
- Dos series de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ y $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k$ se pueden sumar y restar sumando o restando los términos semejantes. Simbólicamente:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \pm \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k)(z - z_0)^k.$$

Si ambas series tienen el mismo radio de convergencia $R$ distinto de cero, el radio de convergencia de $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k \pm b_k)(z-z_0)^k$ es $R$. Infinitamente se ve que, si una serie tiene un radio de convergencia $r > 0$ y el otro tiene radio de convergencia, que si $R > 0$, donde $r \neq R$, entonces el radio de convergencia de $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k \pm b_k)(z-z_0)^k$ es el menor de los dos números $r$ y $R$.

- Se pueden (con cuidado) multiplicar y dividir dos series de potencias.

## Observaciones

(*i*) Si $z_n = a_n + ib_n$ entonces el $n$-ésimo término de la sucesión de sumas parciales para $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ se puede escribir $S_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k + ib_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + i\sum_{k=1}^{n} b_k$. Similar al teorema 6.1.2 $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ converge a un número $L = a + ib$ si y sólo si $\text{Re}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k$ converge a $a$ e $\text{Im}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} b_k$ converge a $b$. Vea el problema 35 de los ejercicios 6.1.

(*ii*) Cuando se escribe en términos de la notación de suma, una serie geométrica puede no ser inmediatamente reconocible como equivalente a (2). En notación de suma una serie geométrica no tiene que comenzar en $k = 1$ ni el término general tiene que aparecer precisamente como $az^{k-1}$. A primera vista $\sum_{k=3}^{\infty} 40\,\frac{i^{k+2}}{2^{k-1}}$ no parece coincidir con la forma general $\sum_{k=1}^{\infty} az^{k-1}$ de una serie geométrica. Sin embargo, al escribir tres términos,

$$\sum_{k=3}^{\infty} 40\frac{i^{k+2}}{2^{k-1}} = \overbrace{40\frac{i^5}{2^2}}^{a} + \overbrace{40\frac{i^6}{2^3}}^{az} + \overbrace{40\frac{i^7}{2^4}}^{az^2} + \cdots$$

podemos hacer las identificaciones $a = 40\ (i^5/2^2)$ y $z = i/2$ en el lado derecho de la igualdad. Ya que $|z| = \frac{1}{2} < 1$ la suma de la serie está dada por (5):

$$\sum_{k=3}^{\infty} 40\frac{i^{k+2}}{2^{k-1}} = \frac{40\dfrac{i^5}{2^2}}{1-\dfrac{i}{2}} = -4 + 8i.$$

(*iii*) A pesar de que no se ha demostrado, vale la pena repetirlo: Una serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$, $z \neq z_0$, *siempre* tiene un radio de convergencia $R$ que puede ser positivo, 0 o $\infty$. Hemos visto en el análisis anterior al ejemplo 6 que la prueba de la razón y de la raíz conducen a

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad \text{y} \quad \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

suponiendo que existe el límite correspondiente. Dado que estas fórmulas sólo dependen de los coeficientes, es fácil hacer ejemplos en los que ni $\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n|$ ni $\lim_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}$ existen. ¿Cuál es R si ninguno de estos límites existe? Véanse los problemas 45 y 46 de los ejercicios 6.1,

## EJERCICIOS 6.1 *Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-16.*

En los problemas 1 a 4 escriba los cinco primeros términos de la sucesión dada.

**1.** $\{5i^n\}$ **2.** $\{2 + (-i)^n\}$

**3.** $\{1 + e^{n\pi i}\}$ **4.** $\{(1 + i)^n\}$ [*Sugerencia:* Escriba en forma polar.]

En los problemas 5 a 10 determine si la sucesión dada converge o diverge.

**5.** $\left\{\dfrac{3ni + 2}{n + ni}\right\}$ **6.** $\left\{\dfrac{ni + 2^n}{3ni + 5^n}\right\}$

**7.** $\left\{\dfrac{(ni + 2)^2}{n^2 i}\right\}$ **8.** $\left\{\dfrac{n(1 + i^n)}{n + 1}\right\}$

**9.** $\left\{\dfrac{n + i^n}{\sqrt{n}}\right\}$ **10.** $\left\{e^{1/n} + 2(\tan^{-1} n)i\right\}$

En los problemas 11 y 12 demuestre que la sucesión dada $\{z_n\}$ converge a un número complejo $L$ calculando $\lim_{n\to\infty} \text{Re}(z_n)$ y $\lim_{n\to\infty} \text{Im}(z_n)$.

**11.** $\left\{\dfrac{4n + 3ni}{2n + i}\right\}$ **12.** $\left\{\left(\dfrac{1 + i}{4}\right)^n\right\}$

En los problemas 13 y 14 utilice la sucesión de sumas parciales para demostrar que la serie dada es convergente.

**13.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k + 2i} - \frac{1}{k + 1 + 2i}\right]$ **14.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i}{k(k + 1)}$

En los problemas 15 a 20 determine si la serie geométrica dada es convergente o divergente. Si es convergente, encuentre su suma.

**15.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(1 - i)^k$ **16.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}4i\left(\tfrac{1}{3}\right)^{k-1}$

**17.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^k$ **18.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{1}{2}i^k$

**19.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}3\left(\frac{2}{1 + 2i}\right)^k$ **20.** $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{i^k}{(1 + i)^{k-1}}$

En los problemas 21 a 30 encuentre el círculo y el radio de convergencia de la serie de potencias.

**21.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1 - 2i)^{k+1}}(z - 2i)^k$ **22.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{i}{1 + i}\right)z^k$

**23.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k2^k}(z - 1 - i)^k$ **24.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(3 + 4i)^k}(z + 3i)^k$

**25.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(1 + 3i)^k(z - i)^k$ **26.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^k}$

**27.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z - 4 - 3i)^k}{5^{2k}}$ **28.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1 + 2i}{2}\right)^k(z + 2i)^k$

**29.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{(k + 2)(k!)^2}(z - i)^{2k}$ **30.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!}{(2k)^k}z^{3k}$

**31.** Demuestre que la serie de potencias $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(z - i)^k}{k2^k}$ no es absolutamente convergente en su círculo de convergencia. Determine al menos un punto en el círculo de convergencia en el que la serie de potencias es convergente.

**32.** Demuestre que la serie de potencias $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^2}$ converge en cada punto de su círculo de convergencia.

**33.** Vuelva a leer el teorema 6.1.3. ¿Qué conclusión se puede sacar, en su caso, cuando $\lim_{n\to\infty}|z_n| \neq 0$?

**34.** Demuestre que la serie de potencias $\sum_{k=1}^{\infty} kz^k$ diverge en cada punto de su círculo de convergencia.

## Enfocando los conceptos

**35.** Considerando la serie $\sum_{k=0}^{\infty} r^k e^{ik\theta}$, $0 < r < 1$, demuestre que

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k \cos k\theta = \frac{1 - r\cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{\infty} r^k \operatorname{sen} k\theta = \frac{r\operatorname{sen}\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.$$

**36.** Supongamos que $\{z_n + w_n\}$ converge. Analice: ¿Se deduce que al menos una de las sucesiones $\{z_n\}$ o $\{w_n\}$ converge?

**37.** Una sucesión $\{z_n\}$ se dice que es **acotada** si el conjunto $S$ que consiste de sus términos es un conjunto acotado (vea la sección 1.5). La sucesión en el ejemplo 1 es acotada.

(**a**) Demuestre que la sucesión en el ejemplo 2 es acotada.

(**b**) Dé un ejemplo más de una sucesión que consiste de términos complejos que está acotada.

(**c**) Dé un ejemplo de una sucesión que consiste de términos complejos que no está acotada.

**38.** Analice: ¿Es toda sucesión $\{z_n\}$ convergente acotada? (Vea el problema 37). ¿Toda sucesión acotada consistente es convergente? Defienda sus respuestas con argumentos matemáticos.

**39.** ¿La sucesión $\left\{ i^{1/n} \right\}$, donde $i^{1/n}$ denota la $n$-ésima vez raíz principal de $i$, converge?

**40.** Hemos visto que la igualdad en (6) es válida para $|z| < 1$. Demuestre que

$$\frac{1}{1-z} = -z^{-1} - z^{-2} - z^{-3} - \cdots$$

y de los valores de $z$ para los que la igualdad es válida.

**41.** Considere (6) con el símbolo $z$ remplazado por $e^{iz}$:

$$\frac{1}{1-e^{iz}} = e^{iz} + e^{2iz} + e^{3iz} + \cdots.$$

Dé la región en el plano complejo para la que converge la serie anterior.

**42.** Dibuje la región en el plano complejo para el que $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{z+2}\right)^k$ converge.

**43.** Considere la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - 1 + 2i)^k$. Analice: ¿Puede la serie ser convergente en $-3 + i$ y divergente en $5 - 3i$?

**44.** Utilice un dibujo en el plano complejo que muestre la validez de cada uno de los teoremas siguientes:

($i$) Si una serie de potencias centrada en $z_0$ converge en $z_1 \neq z_0$, entonces la serie converge para toda $z$ para la cual $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$.

($ii$) Si una serie de potencias centrada en $z_0$ diverge en $z_2$, entonces la serie diverge para toda $z$ para la cual $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$.

**45.** Considere la serie de potencias $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ donde

$$a_k = \begin{cases} 2^k, & k = 0, 2, 4, \ldots \\ \dfrac{1}{7^k} & k = 1, 3, 5, \ldots . \end{cases}$$

(**a**) Demuestre que ni $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$ ni $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$ existen.

(**b**) Halle el radio de convergencia de cada serie de potencias:

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{2k} z^{2k} \quad \text{y} \quad f_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{7^{2k+1}} z^{2k+1}.$$

(**c**) Compruebe que $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$. Analice: ¿Cómo se puede determinar el radio de convergencia $R$ para la serie de potencias original a partir de la observación anterior? ¿A qué es igual $R$?

**46.** Proceda como en el problema 45 para encontrar el radio de convergencia $R$ de la serie de potencias

$$1 + 3z + z^2 + 27z^3 + z^4 + 243z^5 + z^6 + \cdots .$$

**47.** En este problema se le guiará para la demostración de la proposición:

*Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ converge absolutamente, entonces la serie converge.*

**Demostración** Partimos de la hipótesis de que $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ converge. Si $z_k = a_k + ib_k$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \le \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$.

(**a**) Primero, explique por qué la desigualdad anterior es verdadera. Después, explique por qué esta desigualdad demuestra que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge.

(**b**) Explique cómo su razonamiento del inciso (a) también demuestra que $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ converge.

(**c**) Explique cómo los incisos (a) y (b) demuestran que $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ converge.

**48.** En este problema se le guiará para la demostración del inciso (*i*), de la prueba de la razón (9).

**Demostración** Partimos de la hipótesis de que el $\lim_{n\to\infty} |z_{n+1}/z_n| = L < 1$.

(**a**) Primero, explique por qué hay un número entero $N$ y un número real positivo $r < 1$ tal que $|z_{n+1}/z_n| < r$ siempre que $n > N$. Después, explique por qué esto implica que $|z_{N+j}| < r^j |z_N|$ para $j = 0, 1, 2, \ldots$ .

(**b**) Utilice la prueba de comparación del análisis real y el inciso (a) para demostrar que $\sum_{j=0}^{\infty} |z_{N+j}|$ converge.

(**c**) Explique por qué el inciso (b) demostró que $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ converge absolutamente.

## 6.2 Serie de Taylor

La correspondencia entre un número complejo $z$ en el círculo de convergencia y el número en el que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ convergente es univaluada. En este sentido, una serie de potencia, *define* o *representa* una función $f$, para una $z$ determinada dentro del círculo de convergencia, el número $L$ al que la serie de potencias converge se define como el valor de $f$ en $z$, es decir, $f(z) = L$. En esta sección presentamos algunos hechos importantes sobre la naturaleza de esta función $f$.

En la sección anterior vimos que toda serie de potencias tiene un radio de convergencia $R$. A lo largo del análisis en esta sección vamos a suponer que una serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ tiene un radio $R$ de convergencia ya sea positivo o infinito.

**Derivación e integración de la serie de potencias** Los siguientes tres teoremas indican que una función $f$ que se define por una serie de potencias es continua, derivable, e integrable dentro de su círculo de convergencia.

**Teorema 6.2.1 Continuidad**

Una serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ representa una función continua $f$ dentro de su círculo de convergencia $|z - z_0| = R$.

**Teorema 6.2.2 Derivación término a término**

Una serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ puede derivarse término a término dentro de su círculo de convergencia $|z - z_0| = R$.

Derivando una serie de potencias término a término se obtiene,

$$\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{d}{dz}(z - z_0)^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (z - z_0)^{k-1}.$$

Observe que el índice de la suma en la última serie comienza con $k = 1$, porque el término correspondiente a $k = 0$ es cero. Es fácil demostrar con la prueba de la razón que la serie original y la serie derivada,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (z - z_0)^{k-1}$$

tienen el mismo círculo de convergencia $|z - z_0| = R$. Ya que la derivada de una serie de potencias es otra serie de potencias, la primera serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ se puede derivar tantas veces como queramos. En otras palabras, se sigue como un corolario al teorema 6.2.2 que *una serie de potencias define una función infinitamente derivable* dentro de su círculo de convergencia y cada serie derivada tiene el mismo radio de convergencia $R$ que la serie de potencias original.

*Importante* ➡

**Teorema 6.2.3 Integración término a término**

Una serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ se puede integrar término a término dentro de su círculo de convergencia $|z - z_0| = R$, para cada contorno $C$ situado totalmente dentro del círculo de convergencia.

El teorema establece que

$$\int_C \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \, dz = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_C (z - z_0)^k \, dz$$

siempre que $C$ se encuentre en el interior de $|z - z_0| = R$. También se puede realizar integración indefinida término a término:

$$\begin{aligned}\int \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \, dz &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int (z - z_0)^k \, dz \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \text{constante.}\end{aligned}$$

*La prueba de la razón dada en el teorema 6.1.4 se puede utilizar para demostrar que tanto*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(z - z_0)^{k+1}$$

tienen el mismo círculo de convergencia $|z - z_0| = R$.

**Serie de Taylor** Supongamos que una serie de potencias representa una función $f$ dentro de $|z - z_0| = R$, es decir,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + a_3 (z - z_0)^3 + \cdots. \qquad (1)$$

Por lo que se deduce del teorema 6.2.2 que las derivadas de $f$ son las series

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (z - z_0)^{k-1} = a_1 + 2a_2 (z - z_0) + 3a_3 (z - z_0)^2 + \cdots, \qquad (2)$$

$$f''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)(z - z_0)^{k-2} = 2 \cdot 1a_2 + 3 \cdot 2a_3 (z - z_0) + \cdots, \qquad (3)$$

$$f'''(z) = \sum_{k=3}^{\infty} a_k k(k-1)(k-2)(z - z_0)^{k-3} = 3 \cdot 2 \cdot 1a_3 + \cdots, \qquad (4)$$

*Importante* ➡ y así sucesivamente. Puesto que la serie de potencias (1) representa una función derivable $f$ dentro de su círculo de convergencia $|z - z_0| = R$, donde $R$ es ya sea un número positivo o infinito, se concluye que *una serie de potencias representa una función analítica dentro de su círculo de convergencia.*

Existe una relación entre los coeficientes $a_k$ en (1) y las derivadas de $f$. Evaluando (1), (2), (3) y (4) en $z = z_0$ se obtiene

$$f(z_0) = a_0, \; f'(z_0) = 1!a_1, \; f''(z_0) = 2!a_2 \quad \text{y} \quad f'''(z_0) = 3!a_3,$$

respectivamente. En general, $f^{(n)}(z_0) = n!a_n$, o

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \; n \geq 0. \qquad (5)$$

Cuando $n = 0$ en (5), podemos interpretar la derivada de orden cero como $f(z_0)$ y $0! = 1$, de modo que la fórmula da $a_0 = f(z_0)$. Sustituyendo (5) en (1) se obtiene

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k. \qquad (6)$$

Esta serie se llama la **serie de Taylor** de $f$ centrada en $z_0$. Una serie de Taylor con centro en $z_0 = 0$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k, \qquad (7)$$

se conoce como una **serie de Maclaurin**.

Acabamos de ver que una serie de potencias con un radio de convergencia $R$ distinto de cero representa una función analítica. Por otra parte nos preguntamos:

**Pregunta**

*Si se tiene una función $f$ que es analítica en algún dominio $D$, ¿podemos representarla por una serie de potencias de la forma* (6) *o* (7)?

Dado que una serie de potencias converge en un dominio circular, y un dominio $D$ es por lo general no circular, la pregunta se reduce a: ¿Podemos representar $f$ en una o más series de potencias que son *válidas*, es decir, una serie de potencias que converge en $z$ y el número al que la serie converge es $f(z)$, en los dominios circulares que están contenidos en $D$? La pregunta se responde afirmativamente por el siguiente teorema.

**Teorema 6.2.4 Teorema de Taylor**

Sea $f$ analítica en un dominio $D$ y sea $z_0$ un punto en $D$. Entonces $f$ tiene la representación en serie

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k \tag{8}$$

que es válida para el mayor círculo $C$ con centro en $z_0$ y radio $R$ que se encuentra totalmente dentro de $D$.

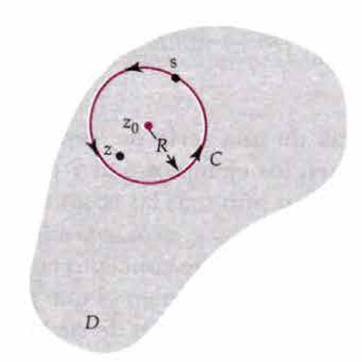



Figura 6.2.1 Contorno para la demostración del teorema 6.2.4

**Demostración** Sea $z$ un punto fijo dentro del círculo $C$ y sea $s$ la variable de integración. El círculo $C$ es entonces descrito por $|s - z_0| = R$. Vea la figura 6.2.1. Para empezar, usamos la fórmula de la integral de Cauchy para obtener el valor de $f$ en $z$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(s)}{s - z}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(s)}{(s - z_0) - (z - z_0)}\,ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(s)}{(s - z_0)}\left\{\frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{s - z_0}}\right\} ds. \tag{9}$$

Al sustituir $z$ por $(z - z_0)/(s - z_0)$ en (8) de la sección 6.1, tenemos

$$\frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{s - z_0}} = 1 + \frac{z - z_0}{s - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{s - z_0}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z - z_0}{s - z_0}\right)^{n-1} + \frac{(z - z_0)^n}{(s - z)(s - z_0)^{n-1}},$$

y así (9) se convierte en

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(s)}{s - z_0}\,ds + \frac{z - z_0}{2\pi i}\oint_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^2}\,ds$$

$$+ \frac{(z - z_0)^2}{2\pi i}\oint_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^3}\,ds + \cdots + \frac{(z - z_0)^{n-1}}{2\pi i}\oint_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^n}\,ds \tag{10}$$

$$+ \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i}\oint_C \frac{f(s)}{(s - z)(s - z_0)^n}\,ds.$$

Utilizando la fórmula de la integral de Cauchy para las derivadas, (6) de la sección 5.5, podemos escribir (10),

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}(z - z_0)^{n-1} + R_n(z), \quad (11)$$

donde
$$R_n(z) = \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i}\oint_C \frac{f(s)}{(s - z)(s - z_0)^n}\, ds.$$

La ecuación (11) se llama la fórmula de Taylor con residuo $R_n$. Ahora queremos demostrar que $R_n(z) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Esto se puede lograr al demostrar que $|R_n(z)| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Como $f$ es analítica en $D$, por el teorema 5.5.8 sabemos que $|f(z)|$ tiene un valor máximo $M$ sobre el contorno $C$. Además, puesto que $z$ está dentro de $C$, $|z - z_0| < R$ y, en consecuencia,

$$|s - z| = |s - z_0 - (z - z_0)| \geq |s - z_0| - |z - z_0| = R - d,$$

donde $d = |z - z_0|$ es la distancia de $z$ a $z_0$. Entonces con la desigualdad $ML$ se obtiene

$$|R_n(z)| = \left|\frac{(z - z_0)^n}{2\pi i}\oint_C \frac{f(s)}{(s - z)(s - z_0)^n}\, ds\right| \leq \frac{d^n}{2\pi}\cdot\frac{M}{(R - d)R^n}\cdot 2\pi R = \frac{MR}{R - d}\left(\frac{d}{R}\right)^n.$$

Debido a que $d < R$, $(d/R)^n \to 0$ conforme $n \to \infty$, concluimos que $|R_n(z)| \to 0$ conforme $n \to \infty$. Por lo que se deduce que la serie infinita

$$f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots$$

converge a $f(z)$. En otras palabras, el resultado en (8) es válido para cualquier punto $z$ en el interior de $C$. ❑

Podemos encontrar el radio de convergencia de una serie de Taylor exactamente de la misma manera que se ilustra en los ejemplos 5 al 7 de la sección anterior. Sin embargo, podemos simplificar aún más las cosas al observar que *el radio de convergencia $R$ es la distancia del centro $z_0$ de la serie a la más cercana* ***singularidad aislada*** *de $f$.* Vamos a elaborar más este concepto en la siguiente sección, pero una singularidad aislada es un punto en el que $f$ no es analítica, pero es, sin embargo, analítica en todos los puntos de *cierta* vecindad del punto. Por ejemplo, $z = 5i$ es una singularidad aislada de $f(z) = 1/(z - 5i)$. Si la función $f$ es entera; entonces el radio de convergencia de una serie de Taylor con centro en cualquier punto $z_0$ es necesariamente $R = \infty$. Utilizando (8) y el último hecho, podemos decir que las siguientes representaciones de las series de Maclaurin son válidas para toda $z$, es decir, para $|z| < \infty$.

*Nota* ➡

### *Algunas series de Maclaurin importantes*

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} \quad (12)$$

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (13)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad (14)$$

**EJEMPLO 1 Radio de convergencia**

Supongamos que la función $f(z) = \dfrac{3-i}{1-i+z}$ se desarrolla en una serie de Taylor con centro $z_0 = 4 - 2i$. ¿Cuál es su radio de convergencia $R$?

**Solución** Observe que la función es analítica en todos los puntos excepto en $z = -1 + i$, que es una singularidad aislada de $f$. La distancia de $z = -1 + i$ a $z_0 = 4 - 2i$ es

$$|z - z_0| = \sqrt{(-1-4)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{34}.$$

Este último número es el radio de convergencia $R$ para la serie de Taylor centrada en $4 - 2i$. ❑

Si dos series de potencias con centro en $z_0$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k$$

representan la misma función $f$ y tienen el mismo radio de convergencia $R$ distinto de cero, entonces,

$$a_k = b_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

*Nota:* Por lo general, la fórmula en (8) se utiliza como un último recurso.

Dicho de otra manera, el desarrollo en serie de potencias de una función, con centro en $z_0$, es *único*. En un nivel práctico, esto significa que un desarrollo en serie de potencias de una función $f$ analítica con centro en $z_0$, con independencia del método utilizado para obtenerlo, es *el* desarrollo en serie de Taylor de la función. Por ejemplo, podemos obtener (14) simplemente derivando (13) término a término. La serie de Maclaurin para $e^{z^2}$ se puede obtener sustituyendo el símbolo $z$ en (12) por $z^2$.

**EJEMPLO 2 Serie de Maclaurin**

Encuentre el desarrollo de Maclaurin de $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}$.

**Solución** Podríamos, por supuesto, empezar por calcular los coeficientes usando (8). Sin embargo, recuerde de (6) de la sección 6.1 que para $|z| < 1$,

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots . \tag{15}$$

Si derivamos ambos lados del último resultado respecto a $z$, entonces

$$\frac{d}{dz}\frac{1}{1-z} = \frac{d}{dz}1 + \frac{d}{dz}z + \frac{d}{dz}z^2 + \frac{d}{dz}z^3 + \cdots$$

o

$$\frac{1}{(1-z)^2} = 0 + 1 + 2z + 3z^2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1}. \tag{16}$$

Puesto que estamos utilizando el teorema 6.2.2, el radio de convergencia de la última serie de potencias es la misma que la serie original, $R = 1$. ❑

Podemos con frecuencia construir sobre resultados tales como (16). Por ejemplo, si queremos la expansión de Maclaurin de $f(z) = \dfrac{z^3}{(1-z)^2}$, simplemente multiplicamos (16) por $z^3$:

$$\frac{z^3}{(1-z)^2} = z^3 + 2z^4 + 3z^5 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k+2}.$$

El radio de convergencia de la última serie sigue siendo $R = 1$.

## EJEMPLO 3 Serie de Taylor

Desarrolle $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ en una serie de Taylor con centro en $z_0 = 2i$.

**Solución** En esta solución se utiliza de nuevo la serie geométrica (15). Sumando y restando $2i$ en el denominador de $1/(1-z)$, podemos escribir

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-z+2i-2i} = \frac{1}{1-2i-(z-2i)} = \frac{1}{1-2i}\frac{1}{1-\dfrac{z-2i}{1-2i}}.$$

Ahora escribimos $\dfrac{1}{1-\dfrac{z-2i}{1-2i}}$ como una serie de potencias usando (15) con el símbolo $z$ sustituido por la expresión $\dfrac{z-2i}{1-2i}$:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-2i}\left[1 + \frac{z-2i}{1-2i} + \left(\frac{z-2i}{1-2i}\right)^2 + \left(\frac{z-2i}{1-2i}\right)^3 + \cdots\right]$$

o

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-2i} + \frac{1}{(1-2i)^2}(z-2i) + \frac{1}{(1-2i)^3}(z-2i)^2 + \frac{1}{(1-2i)^4}(z-2i)^3 + \cdots. \quad (17)$$

Debido a que la distancia desde el centro $z_0 = 2i$ a la singularidad más cercana en $z = 1$ es $\sqrt{5}$, concluimos que el círculo de convergencia para (17) es $|z-2i| = \sqrt{5}$. Esto se puede comprobar con la prueba de la razón de la sección anterior. ❑

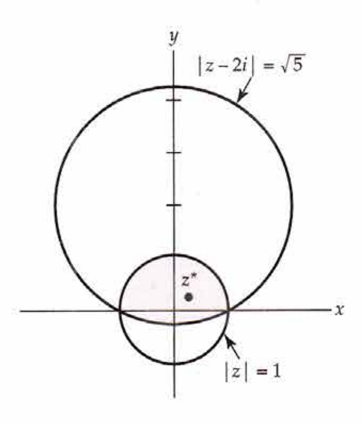



Figura 6.2.2 Las dos series (15) y (17) convergen en la región sombreada

En (15) y (17) representamos la misma función $f(z) = 1/(1-z)$ por dos series de potencias diferentes. La primera serie (15) tiene centro en $z_0 = 0$ y radio de convergencia $R = 1$. La segunda serie (17) tiene centro en $z_0 = 2i$ y radio de convergencia $R = \sqrt{5}$. En la figura 6.2.2 se muestran los dos círculos de convergencia diferentes. El interior de la intersección de los dos círculos, que se muestra a color, es la región donde convergen *ambas* series, es decir, en un punto específico $z^*$ en esta región, ambas series convergen al mismo valor $f(z^*) = 1/(1-z^*)$. Fuera de la región a color al menos una de las dos series diverge.

**Observaciones** *Comparación con el análisis real*

($i$) Como una consecuencia del teorema 5.5.3, sabemos que una función analítica $f$ es infinitamente derivable. Como una consecuencia del Teorema 6.2.4, sabemos que una función analítica $f$ se puede siempre desarrollar en una serie de potencias con un radio de convergencia $R$ distinto de cero. En el análisis real, una función $f$ se puede derivar infinitamente, pero puede ser imposible representarla con una serie de potencias. Vea el problema 51 de los ejercicios 6.2.

($ii$) Si no lo ha observado, los resultados en (6), (7), (12), (13) y (14) son de forma idéntica a sus análogos del cálculo elemental.

## EJERCICIOS 6.2 *Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-16.*

En los problemas 1 a 12 utilice resultados conocidos para desarrollar la función dada en una serie de Maclaurin. Dé el radio de convergencia $R$ de cada serie.

**1.** $f(z) = \dfrac{z}{1+z}$

**2.** $f(z) = \dfrac{1}{4-2z}$

**3.** $f(z) = \dfrac{1}{(1+2z)^2}$

**4.** $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^3}$

**5.** $f(z) = e^{-2z}$

**6.** $f(z) = ze^{-z^2}$

**7.** $f(z) = \operatorname{senh} z$

**8.** $f(z) = \cosh z$

**9.** $f(z) = \cos\dfrac{z}{2}$

**10.** $f(z) = \operatorname{sen} 3z$

**11.** $f(z) = \operatorname{sen} z^2$

**12.** $f(z) = \cos^2 z$ [*Sugerencia*: Utilice una identidad trigonométrica.]

En los problemas 13 y 14 utilice la serie de Maclaurin para $e^z$ para desarrollar la función dada en una serie de Taylor centrada en el punto $z_0$ indicado. [*Sugerencia:* $z = z - z_0 + z_0$.]

**13.** $f(z) = e^z,\ z_0 = 3i$

**14.** $f(z) = (z-1)e^{-3z},\ z_0 = 1$

En los problemas 15 a 22 desarrolle la función dada en una serie de Taylor centrada en el punto $z_0$ indicado. Dé el radio de convergencia $R$ de cada serie.

**15.** $f(z) = \dfrac{1}{z},\ z_0 = 1$

**16.** $f(z) = \dfrac{1}{z},\ z_0 = 1 + i,$

**17.** $f(z) = \dfrac{1}{3-z},\ z_0 = 2i$

**18.** $f(z) = \dfrac{1}{1+z},\ z_0 = -i,$

**19.** $f(z) = \dfrac{z-1}{3-z},\ z_0 = 1$

**20.** $f(z) = \dfrac{1+z}{1-z},\ z_0 = i$

**21.** $f(z) = \cos z,\ z_0 = \pi/4$

**22.** $f(z) = \operatorname{sen} z,\ z_0 = \pi/2$

En los problemas 23 y 24 utilice (7) para encontrar los tres primeros términos diferentes de cero de la serie de Maclaurin de la función dada.

**23.** $f(z) = \tan z$

**24.** $f(z) = e^{1/(1+z)}$

En los problemas 25 y 26 utilice fracciones parciales como una ayuda para obtener la serie de Maclaurin de la función dada. Dé el radio de convergencia $R$ de la serie.

**25.** $f(z) = \dfrac{i}{(z-i)(z-2i)}$

**26.** $f(z) = \dfrac{z-7}{z^2-2z-3}$

En los problemas 27 y 28, sin tener que desarrollar, determine el radio de convergencia $R$ de la serie de Taylor de la función dada centrada en el punto indicado.

**27.** $f(z) = \dfrac{4 + 5z}{1 + z^2}$, $z_0 = 2 + 5i$

**28.** $f(z) = \cot z$, $z_0 = \pi i$

**29.** ¿Cuál es el radio de convergencia $R$ de la serie de Maclaurin en el problema 23?

**30.** ¿Cuál es el radio de convergencia $R$ de la serie de Maclaurin en el problema 24?

En los problemas 31 y 32, desarrolle la función dada en serie de Taylor centrada en cada uno de los puntos indicados. Dé el radio de convergencia $R$ de cada serie. Dibuje la región en la que ambas series convergen.

**31.** $f(z) = \dfrac{1}{2 + z}$, $z_0 = -1$, $z_0 = i$

**32.** $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $z_0 = 1 + i$, $z_0 = 3$

En los problemas 33 y 34, utilice los resultados obtenidos en esta sección para encontrar la suma de la serie de potencias.

**33.** $\sum_{k=0}^{\infty} 3^k z^k$

**34.** $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^2}{k!}$

**35.** Encuentre la serie de Maclaurin (14) derivando la serie de Maclaurin (13).

**36.** La **función error** erf $(z)$ se define como la integral $\operatorname{erf}(z) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^z e^{-t^2} dt$ .

Encuentre una serie de Maclaurin para erf $(z)$ integrando la serie de Maclaurin para $e^{-t^2}$.

En los problemas 37 y 38, aproxime el valor de la expresión dada utilizando el número indicado de términos de una serie de Maclaurin.

**37.** $e^{(1+i)/10}$, tres términos

**38.** $\operatorname{sen}\left(\dfrac{1+i}{10}\right)$, dos términos

## Enfocando los conceptos

**39.** Cada función $f$ tiene un dominio de definición. Describa con palabras el dominio de la función $f$ definida por una serie de potencias con centro en $z_0$.

**40.** Si $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ y $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ entonces el **producto de Cauchy** de $f$ y $g$ está dado por

$$f(z)g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad \text{donde} \quad c_k = \sum_{n=0}^{k} a_n b_{k-n}.$$

Escriba los primeros cinco términos de la serie de potencias de $f(z)g(z)$.

**41.** Use el problema 40, (12) de esta sección, y (6) de la sección 6.1 para encontrar los cuatro primeros términos distintos de cero de la serie de Maclaurin de $e^z/(1 - z)$. ¿Cuál es el radio de convergencia $R$ de la serie?

**42.** Use el problema 40, y (13) y (14) de esta sección para encontrar los cuatro primeros términos distintos de cero de la serie de Maclaurin de sen $z$ cos $z$. ¿Puede pensar otra forma de obtener esta serie?

**43.** La función $f(z) = \sec z$ es analítica en $z = 0$ y por tanto, tiene una representación en serie de Maclaurin. Podríamos, por supuesto, usar (7), pero hay varias formas alternativas de obtener los coeficientes de la serie

$$\sec z = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots .$$

Una forma es igualar los coeficientes en ambos lados de la identidad $1 = (\sec z)\cos z$ o

$$1 = \left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots\right)\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right).$$

Busque los tres primeros términos distintos de cero de la serie de Maclaurin de $f$. ¿Cuál es el radio de convergencia $R$ de la serie?

**44.** (**a**) Utilice la definición $f(z) = \sec z = 1/\cos z$ y la división larga para obtener los tres primeros términos distintos de cero de la serie de Maclaurin del problema 43.

(**b**) Utilice $f(z) = \csc z = 1/\text{sen } z$ y la división larga para obtener los tres primeros términos distintos de cero de una serie infinita. ¿Es esta serie una serie de Maclaurin?

**45.** Suponga que una función compleja $f$ es analítica en un dominio $D$ que contiene a $z_0 = 0$ y $f$ satisface que $f'(z) = 4z + f^2(z)$. Suponga además que $f(0) = 1$.

(**a**) Calcule $f'(0), f''(0), f'''(0), f^{(4)}(0)$ y $f^{(5)}(0)$.

(**b**) Determine los seis primeros términos del desarrollo de Maclaurin de $f$.

**46.** Encuentre una forma alternativa para encontrar los tres primeros términos distintos de cero de la serie de Maclaurin para $f(z) = \tan z$ (vea el problema 23):

(**a**) tomando como base la identidad $\tan z = \text{sen } z \sec z$ y los problemas 42 y 43

(**b**) tomando como base el problema 44(a)

(**c**) tomando como base el problema 45. [*Sugerencia*: $f'(z) = \sec^2 z = 1 + \tan^2 z$.]

**47.** Vimos en el problema 34 de los ejercicios 1.3 que la fórmula de De Moivre se puede utilizar para obtener las identidades trigonométricas para $\cos 3\theta$ y $\text{sen } 3\theta$. Analice cómo se pueden utilizar estas identidades para obtener series de Maclaurin para $\text{sen}^3 z$ y $\cos^3 z$. [*Sugerencia*: Es posible que desee simplificar sus respuestas del problema 34. Por ejemplo, el $\cos^2\theta \text{ sen } \theta = (1 - \text{sen}^2\theta) \text{ sen } \theta$.]

**48.** (**a**) Supongamos que el valor principal del logaritmo $\text{Ln } z = \log_e|z| + i\text{Arg}(z)$ se desarrolla en una serie de Taylor con centro en $z_0 = -1 + i$. Explique por qué $R = 1$ es el radio del mayor círculo centrado en $z_0 = -1 + i$ en la que $f$ es analítica.

(**b**) Demuestre que dentro de la circunferencia $|z - (-1 + i)| = 1$, la serie de Taylor para $f$ es

$$\text{Ln } z = \frac{1}{2}\log_e 2 + \frac{3\pi}{4}i - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1+i}{2}\right)^k (z + 1 - i)^k.$$

(**c**) Demuestre que el radio de convergencia de la serie de potencias en el inciso (b) es $R = \sqrt{2}$. Explique por qué esto no se contradice con el resultado del inciso (a).

**49.** (**a**) Considere la función $\text{Ln}(1 + z)$. ¿Cuál es el radio del círculo más grande centrado en el origen en el que $f$ es analítica?

(**b**) Desarrolle $f$ en una serie de Maclaurin. ¿Cuál es el radio de convergencia de esta serie?

(**c**) Utilice el resultado del inciso (b) para encontrar una serie de Maclaurin para $\text{Ln }(1 - z)$.

(**d**) Encuentre una serie de Maclaurin para $\text{Ln}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$.

**50.** En el teorema 3.1.3 vimos que la regla de *L'*Hôpital se transfiere al análisis complejo.

En el problema 33 de los ejercicios 3.1 fue guiado a través de una demostración de la siguiente proposición usando la definición de derivada:

*Si las funciones $f$ y $g$ son analíticas en un punto $z_0$ y $f(z_0) = 0$, $g(z_0) = 0$, pero $g'(z_0) \neq 0$, entonces* $\displaystyle\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$.

Esta vez, demuestre la proposición sustituyendo $f(z)$ y $g(z)$ por su serie de Taylor centrada en $z_0$.

## Proyectos

**51.** (**a**) Encontrará la siguiente función real en la mayoría de los libros de cálculo más antiguos:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Lea algo en estos libros de cálculo que le ayude a demostrar que $f$ es infinitamente derivable en todos los valores de $x$. Demuestre que $f$ no se puede representar por un desarrollo de Maclaurin en cualquier valor de $x \neq 0$.

(**b**) Investigue si el complejo análogo de la función real en el inciso (a),

$$f(z) = \begin{cases} e^{-1/z^2}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

es infinitamente derivable en $z = 0$.

## 6.3 Serie de Laurent

Si una función compleja $f$ no es analítica en un punto $z = z_0$, entonces este punto se dice que es una **singularidad** o **punto singular** de la función. Por ejemplo, los números complejos $z = 2i$ y $z = -2i$ son singularidades de la función $f(z) = z/(z^2 + 4)$ porque $f$ es discontinua en cada uno de estos puntos. Recuerde de la sección 4.1 que el valor principal del logaritmo, Ln $z$, es analítica en todos los puntos excepto los puntos del corte de rama que consiste en el eje $x$ no positivo; es decir, el punto de rama $z = 0$, así como todos los números reales negativos son puntos singulares de Ln $z$.

En esta sección nos dedicaremos a una nueva clase de desarrollo de "serie de potencias" de $f$ alrededor de una **singularidad aislada** $z_0$. Esta nueva serie implicará tanto potencias enteras negativas, como potencias enteras no negativas de $z - z_0$.

**Singularidades aisladas** Supongamos que $z = z_0$ es una singularidad de una función compleja $f$. El punto $z = z_0$ se dice que es una **singularidad aislada** de la función $f$ si existe *alguna* vecindad excluida o disco abierto perforado, $0 < |z - z_0| < R$, de $z_0$ en la que $f$ es analítica. Por ejemplo, acabamos de ver que $z = 2i$ y $z = -2i$ son singularidades de $f(z) = z/(z^2 + 4)$. Tanto $2i$ como $-2i$ son singularidades aisladas ya que $f$ es analítica en cada punto de la vecindad definida por $|z - 2i| < 1$, excepto en $z = 2i$, y en cada punto de la vecindad definida por $|z - (-2i)| < 1$, excepto en $z = -2i$. En otras palabras, $f$ es analítica en las vecindades excluidas $0 < |z - 2i| < 1$ y $0 < |z + 2i| < 1$. Por otro lado, el punto rama $z = 0$ *no* es una singularidad aislada de Ln $z$ ya que toda vecindad de $z = 0$ debe contener puntos del eje $x$ negativo. Decimos que un punto singular $z = z_0$ de una función $f$ **no está aislado**, si *todas* las vecindades de $z_0$ contienen al menos otra singularidad de $f$, distinta de $z_0$. Por ejemplo, el punto rama $z = 0$ es una singularidad no aislada de Ln $z$.

**Una nueva clase de serie** Si $z = z_0$ es una singularidad de una función $f$, entonces, ciertamente, $f$ no se puede desarrollar en una serie de potencias con $z_0$ como centro. Sin embargo, alrededor de una singularidad aislada

$z = z_0$, es posible representar a $f$ por una serie que involucra potencias enteras de $z - z_0$ tanto negativas como no negativas, es decir,

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots. \quad (1)$$

Como un ejemplo *muy* simple de (1), consideremos la función $f(z) = 1/(z-1)$. Como se puede ver, el punto $z = 1$ es una singularidad aislada de $f$ y, por consiguiente la función no se puede desarrollar en una serie de Taylor centrada en ese punto. Sin embargo, $f$ se puede desarrollar en una serie de la forma dada en (1) que es válida para todo $z$, *cerca* de 1:

$$f(z) = \cdots + \frac{0}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-1} + 0 + 0\cdot(z-1) + 0\cdot(z-1)^2 + \cdots. \quad (2)$$

La representación en serie en (2) es válida para $0 < |z-1| < \infty$.

Usando la notación de suma, podemos escribir (1) como la suma de dos series

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z-z_0)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k. \quad (3)$$

A las dos series del lado derecho en (3) se les dan nombres especiales. La parte con las potencias negativas de $z - z_0$, es decir,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z-z_0)^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} \quad (4)$$

se llama **parte principal** de la serie (1) y convergerá para $|1/(z-z_0)| < r^*$ o equivalentemente para $|z-z_0| > 1/r^* = r$. La parte consistente de las potencias no negativas de $z - z_0$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k, \quad (5)$$

se llama **parte analítica** de la serie (1) y convergerá para $|z-z_0| < R$. Por tanto, la suma de (4) y (5) converge cuando $z$ satisface tanto $|z-z_0| > r$ y $|z-z_0| < R$, es decir, cuando $z$ es un punto en un dominio anular definido por $r < |z-z_0| < R$.

Sumando sobre los enteros negativos y no negativos, (1) se puede escribir de forma compacta como

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k.$$

La parte principal de la serie (2) consiste de exactamente un término distinto de cero, mientras que su parte analítica consiste en todos los términos cero. Nuestro siguiente ejemplo muestra una serie de la forma (1) en la que la parte principal de la serie también consta de un número finito de términos distintos de cero, pero esta vez la parte analítica consiste de un número infinito de términos distintos de cero.

---

**EJEMPLO 1 Serie de la forma dada en (1)**

La función $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z^4}$ no es analítica en la singularidad aislada $z = 0$ y por tanto, no se puede desarrollar en una serie de Maclaurin. Sin embargo, sen $z$ es una función entera, y de (13) de la sección 6.2, sabemos que su serie de Maclaurin es,

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} - \cdots,$$

converge para $|z| < \infty$. Dividiendo esta serie de potencias entre $z^4$ obtenemos una serie para $f$ con potencias enteras positivas y negativas de $z$:

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^4} = \overbrace{\frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!\,z}}^{\text{parte principal}} + \overbrace{\frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \frac{z^5}{9!} - \cdots}^{\text{parte analítica}} . \tag{6}$$

La parte analítica de la serie en (6) converge para $|z| < \infty$. (Compruebe). La parte principal es válida para $|z| > 0$. Por tanto, (6) converge para toda $z$, excepto en $z = 0$, es decir, la representación en serie es válida para $0 < |z| < \infty$. ❑

Una representación de serie de una función $f$ que tiene la forma dada en (1) y (2) y (6) son ejemplos de la llamada **serie de Laurent** o **expansión de Laurent** de $f$ alrededor de $z_0$ sobre el anillo $r < |z - z_0| < R$.

**Teorema 6.3.1 Teorema de Laurent**

Sea $f$ analítica en el dominio del anillo $D$ definido por $r < |z - z_0| < R$. Entonces $f$ tiene la representación en serie

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \tag{7}$$

válida para $r < |z - z_0| < R$. Los coeficientes $a_k$ están dados por

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^{k+1}}\,ds, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{8}$$

donde $C$ es una curva simple cerrada que se encuentra totalmente dentro de $D$ y que tiene a $z_0$ en su interior. Vea la figura 6.3.1.

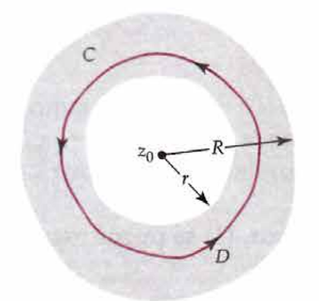



Figura 6.3.1 Contorno para el teorema 6.3.1

**Demostración** Sean $C_1$ y $C_2$ circunferencias concéntricas con centro en $z_0$ y radios $r_1$ y $R_2$, donde $r < r_1 < R_2 < R$. Sea $z$ un punto fijo en $D$, que también satisface la desigualdad $r_1 < |z - z_0| < R_2$. Vea la figura 6.3.2. Introduciendo un corte transversal entre $C_2$ y $C_1$ se deduce de la fórmula integral de Cauchy que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(s)}{s - z}\,ds - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(s)}{s - z}\,ds. \tag{9}$$

Figura 6.3.2 $C_1$ y $C_2$ son circunferencias concéntricas

Al igual que en la demostración del teorema 6.2.4, podemos escribir

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(s)}{s - z}\,ds = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \tag{10}$$

donde $$a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(s)}{(s - z_0)^{k+1}}\,ds, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{11}$$

Entonces procedemos de manera similar a (9) de la sección 6.2:

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(s)}{s-z}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(s)}{(z-z_0)-(s-z_0)}\,ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(s)}{z-z_0}\left\{\frac{1}{1-\dfrac{s-z_0}{z-z_0}}\right\}ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(s)}{z-z_0}\left\{1+\frac{s-z_0}{z-z_0}+\left(\frac{s-z_0}{z-z_0}\right)^2+\cdots+\left(\frac{s-z_0}{z-z_0}\right)^{n-1}+\frac{(s-z_0)^n}{(z-s)(z-z_0)^{n-1}}\right\}ds \quad (12)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}+R_n(z),$$

donde $$a_{-k} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(s)}{(s-z_0)^{-k+1}}\,ds,\quad k=1,\,2,\,3,\,\ldots, \quad (13)$$

y $$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i(z-z_0)^n}\oint_{C_1}\frac{f(s)(s-z_0)^n}{z-s}\,ds.$$

Ahora sea $d$ la distancia de $z$ a $z_0$, es decir, $|z-z_0| = d$, y sea $M$ el valor máximo de $|f(z)|$ sobre el contorno $C_1$. Usando $|s-z_0| = r_1$ y la desigualdad (10) de la sección 1.2,

$$|z-s| = |z-z_0-(s-z_0)| \geq |z-z_0|-|s-z_0| = d-r_1.$$

Entonces la desigualdad $ML$ da

$$|R_n(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i(z-z_0)^n}\oint_{C}\frac{f(s)(s-z_0)^n}{z-s}\,ds\right| \leq \frac{1}{2\pi d^n}\cdot\frac{Mr_1^n}{d-r_1}\cdot 2\pi r_1$$

$$= \frac{Mr_1}{d-r_1}\left(\frac{r_1}{d}\right)^n.$$

Ya que $r_1 < d$, $(r_1/d)^n \to 0$ conforme $n\to\infty$, y así $|R_n(z)| \to 0$ conforme $n\to\infty$. Por tanto, hemos demostrado que

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(s)}{s-z}\,ds = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}, \quad (14)$$

donde los coeficientes $a_{-k}$ están dados en (13). Combinando (14) y (10), vemos que con (9) se obtiene

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}+\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k. \quad (15)$$

Por último, sumando sobre los enteros no negativos y negativos, (15) puede escribirse como $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$. Por otra parte, (11) y (13) se puede escribir como una sola integral:

$$a_k = \oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots,$$

donde, considerando (5) de la sección 5.3, hemos sustituido los contornos $C_1$ y $C_2$ por cualquier contorno cerrado simple $C$ en $D$ con $z_0$ en su interior. ❑

En el caso de $a_{-k} = 0$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$, la parte principal (4) es cero y la serie de Laurent (7) se reduce a una serie de Taylor. Por tanto, un desarrollo de Laurent se puede considerar como una generalización de una serie de Taylor.

El dominio anular en el teorema 6.3.1 definido por $r < |z - z_0| < R$ no necesita tener la forma de "anillo" ilustrada en la figura 6.3.2. Éstos son algunos otros dominios anulares posibles:

$$(i)\ r = 0,\ R \text{ finito},\ (ii)\ r \neq 0,\ R = \infty, \text{ y } (iii)\ r = 0,\ R = \infty.$$

En el primer caso, la serie converge en el dominio anular definido por $0 < |z - z_0| < R$. Este es el interior de la circunferencia $|z - z_0| = R$ excepto el punto $z_0$, es decir, el dominio es un disco abierto perforado. En el segundo caso, el dominio anular está definido por $r < |z - z_0|$ y se compone de todos los puntos exteriores a la circunferencia $|z - z_0| = r$. En el tercer caso, el dominio se define por $0 < |z - z_0|$. Esto representa todo el plano complejo excepto el punto $z_0$. Las serie de Laurent en (2) y (6) son válidas en este último tipo de dominio.

Los coeficientes definidos por (8) se usan muy poco. Vea (*ii*) en las observaciones al final de esta sección.

La fórmula integral en (8) para los coeficientes de una serie de Laurent rara vez se utilizan en la práctica. Como consecuencia, la determinación de la serie de Laurent de una función en un dominio específico anular generalmente no es una tarea fácil. Pero no es tan desalentador como parece. En muchos casos, podemos obtener la serie de Laurent deseada ya sea mediante el empleo de un desarrollo en serie de potencias de una función conocida (como hicimos en el ejemplo 1) o por la manipulación creativa de la serie geométrica (como lo hicimos en el ejemplo 2 de la sección 6.2). El siguiente ejemplo muestra una vez más el uso de series geométricas.

## EJEMPLO 2 Cuatro desarrollos de Laurent

Desarrolle $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ en una serie de Laurent válida para los siguientes dominios anulares.

(**a**) $0 < |z| < 1$ (**b**) $1 < |z|$ (**c**) $0 < |z - 1| < 1$ (**d**) $1 < |z - 1|$

**Solución** Los cuatro dominios anulares especificados se muestran en la figura 6.3.3. Los puntos negros en cada figura representan las dos singularidades aisladas, $z = 0$, $z = 1$, de $f$. En los incisos (a) y (b) queremos representar a $f$ con una serie que involucre sólo potencias enteras negativas y no negativas de $z$: mientras que en los incisos (c) y (d) queremos representar a $f$ con una serie que involucre potencias enteras no negativas y negativas de $z - 1$.

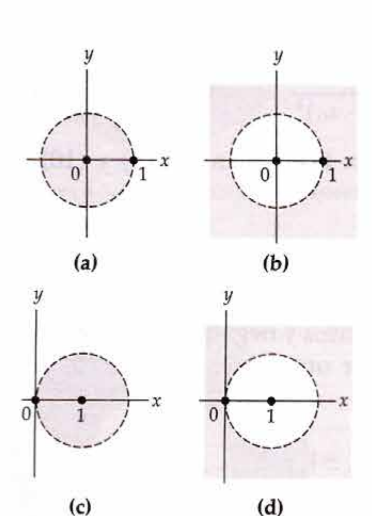


**Figura 6.3.3** Dominios anulares para el ejemplo 2

(**a**) Al escribir

$$f(z) = -\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-z},$$

podemos utilizar (6) de la sección 6.1 para escribir $1/(1 - z)$ como una serie:

$$f(z) = -\frac{1}{z}\left[1 + z + z^2 + z^3 + \cdots\right].$$

La serie infinita dentro de los corchetes converge para $|z| < 1$, pero después de multiplicar esta expresión por $1/z$, la serie resultante

$$f(z) = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - z^3 - \cdots$$

converge para $0 < |z| < 1$.

**(b)** Para obtener una serie que converja para $1 < |z|$, empezamos con la construcción de una serie que converge para $|1/z| < 1$. Para ello escribimos la función $f$ dada como

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\,\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}$$

y de nuevo usamos (6) de la sección 6.1 con $z$ sustituido por $1/z$:

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\left[1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots\right].$$

La serie en los corchetes converge para $|1/z| < 1$ o equivalentemente para $1 < |z|$. Así, la serie de Laurent necesaria es

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^5} + \dots .$$

**(c)** Este es básicamente el mismo problema que en el inciso (a), salvo que queremos todas las potencias de $z - 1$. Para esto, sumamos y restamos 1 en el denominador y usamos (7) de la sección 6.1 con $z$ sustituida por $z - 1$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(1-1+z)(z-1)} \\ &= \frac{1}{z-1}\,\frac{1}{1+(z-1)} \\ &= \frac{1}{z-1}\left[1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\cdots\right] \\ &= \frac{1}{z-1} - 1 + (z-1) - (z-1)^2 + \cdots . \end{aligned}$$

El requisito de que $z \neq 1$ es equivalente a $0 < |z-1|$, y la serie geométrica entre corchetes converge para $|z-1| < 1$. Así, la última serie converge para $z$ que satisface $0 < |z-1|$ y $|z-1| < 1$, es decir, para $0 < |z-1| < 1$.

**(d)** Procediendo como en el inciso (b), escribimos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-1}\,\frac{1}{1+(z-1)} = \frac{1}{(z-1)^2}\,\frac{1}{1+\dfrac{1}{z-1}} \\ &= \frac{1}{(z-1)^2}\left[1 - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{(z-1)^3} + \cdots\right] \\ &= \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{(z-1)^4} - \frac{1}{(z-1)^5} + \cdots . \end{aligned}$$

Debido a la serie dentro de los corchetes converge para $|1/(z-1)| < 1$, la serie final converge para $1 < |z-1|$. ❑

**EJEMPLO 3 Desarrollos de Laurent**

Desarrolle $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z-3)}$ en una serie de Laurent válida para **(a)** $0 < |z-1| < 2$ y **(b)** $0 < |z-3| < 2$.

**Solución**

(**a**) Como en los incisos (c) y (d) del ejemplo 2, sólo queremos potencias de $z - 1$ y así necesitamos expresar a $z - 3$ en términos de $z - 1$. Esto se puede hacer al escribir

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} = \frac{1}{(z-1)^2}\,\frac{1}{-2+(z-1)} = \frac{-1}{2(z-1)^2}\,\frac{1}{1-\dfrac{z-1}{2}}$$

y después usando (6) de la sección 6.1 con el símbolo $z$ sustituido por $(z-1)/2$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{-1}{2(z-1)^2}\left[1 + \frac{z-1}{2} + \frac{(z-1)^2}{2^2} + \frac{(z-1)^3}{2^3} + \cdots\right] \\ &= -\frac{1}{2(z-1)^2} - \frac{1}{4(z-1)} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16}(z-1) - \cdots. \end{aligned} \qquad (16)$$

(**b**) Para obtener potencias de $z - 3$, escribimos $z - 1 = 2 + (z - 3)$ y

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} = \frac{1}{z-3}\,\overbrace{[2+(z-3)]^{-2}}^{\text{Ahora se factoriza 2 de esta expresión}} \\ &= \frac{1}{4(z-3)}\left[1 + \frac{z-3}{2}\right]^{-2}. \end{aligned}$$

En este punto podemos obtener una serie de potencias para $\left[1 + \dfrac{z-3}{2}\right]^{-2}$ usando la expansión binomial,*

$$f(z) = \frac{1}{4(z-3)}\left[1 + \frac{(-2)}{1!}\left(\frac{z-3}{2}\right) + \frac{(-2)(-3)}{2!}\left(\frac{z-3}{2}\right)^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}\left(\frac{z-3}{2}\right)^3 + \cdots\right].$$

La serie binomial en corchetes es válida para $|(z-3)/2| < 1$ o $|z-3| < 2$. Multiplicando esta serie por $\dfrac{1}{4(z-3)}$ se obtiene una serie de Laurent que es válida para $0 < |z-3| < 2$:

$$f(z) = \frac{1}{4(z-3)} - \frac{1}{4} + \frac{3}{16}(z-3) - \frac{1}{8}(z-3)^2 + \cdots.$$

❑

**EJEMPLO 4 Un desarrollo de Laurent**

Desarrolle $f(z) = \dfrac{8z+1}{z(1-z)}$ en una serie de Laurent válida para $0 < |z| < 1$.

---

*Para $\alpha$ real, la serie binomial $(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3 + \ldots$ es válida para $|z| < 1$.

**Solución** Por fracciones parciales podemos reescribir $f$ como

$$f(z) = \frac{8z+1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{9}{1-z}.$$

Entonces por (6) de la sección 6.1,

$$\frac{9}{1-z} = 9 + 9z + 9z^2 + \cdots.$$

La serie geométrica anterior converge para $|z| < 1$, pero después de agregar el término $1/z$ a ésta, la serie de Laurent resultante

$$f(z) = \frac{1}{z} + 9 + 9z + 9z^2 + \cdots$$

es válida para $0 < |z| < 1$. ❑

En los ejemplos anteriores el punto en el centro del dominio anular de validez para cada serie de Laurent fue una singularidad aislada de la función $f$. Un nuevo examen del teorema 6.3.1 muestra que éste no es necesariamente el caso.

## EJEMPLO 5 Un desarrollo de Laurent

Desarrolle $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ en una serie de Laurent válida para $1 < |z-2| < 2$.

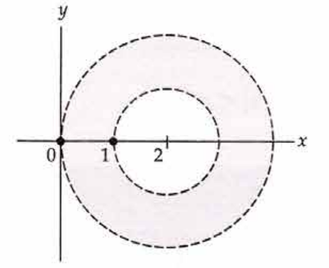


Figura 6.3.4 Dominio anular para el ejemplo 5

**Solución** El dominio anular especificado se muestra en la figura 6.3.4. El centro de este dominio, $z = 2$, es el punto de analiticidad de la función $f$. Nuestro objetivo ahora es encontrar dos series que involucren potencias enteras de $z - 2$, una converge para $1 < |z - 2|$ y la otra converge para $|z - 2| < 2$. Para lograr esto, se procede como en el último ejemplo por la descomposición de $f$ en fracciones parciales:

$$f(z) = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} = f_1(z) + f_2(z). \tag{17}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} f_1(z) &= -\frac{1}{z} = -\frac{1}{2+z-2} \\ &= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\dfrac{z-2}{2}} \\ &= -\frac{1}{2}\left[1 - \frac{z-2}{2} + \frac{(z-2)^2}{2^2} - \frac{(z-2)^3}{2^3} + \cdots\right] \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{z-2}{2^2} - \frac{(z-2)^2}{2^3} + \frac{(z-2)^3}{2^4} - \cdots. \end{aligned}$$

Esta serie converge para $|(z-2)/2| < 1$ o $|z-2| < 2$. Además,

$$\begin{aligned} f_2(z) &= \frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+z-2} = \frac{1}{z-2}\,\frac{1}{1+\dfrac{1}{z-2}} \\ &= \frac{1}{z-2}\left[1 - \frac{1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2} - \frac{1}{(z-2)^3} + \cdots\right] \\ &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{(z-2)^2} + \frac{1}{(z-2)^3} - \frac{1}{(z-2)^4} + \cdots \end{aligned}$$

converge para $|1/(z-2)| < 1$ o $1 < |z-2|$. Entonces sustituyendo estos resultados en (17) se obtiene

$$f(z) = \cdots - \frac{1}{(z-2)^4} + \frac{1}{(z-2)^3} - \frac{1}{(z-2)^2} + \frac{1}{z-2} - \frac{1}{2} + \frac{z-2}{2^2} - \frac{(z-2)^2}{2^3} + \frac{(z-2)^3}{2^4} - \cdots.$$

Esta representación es válida para $z$ que satisface $|z-2| < 2$ y $1 < |z-2|$; es decir, para $1 < |z-2| < 2$. ❑

**EJEMPLO 6 Un desarrollo de Laurent**

Desarrolle $f(z) = e^{3/z}$ en una serie de Laurent válida para $0 < |z| < \infty$.

**Solución** A partir de (12) de la sección 6.2, sabemos que para toda $z$ finita, es decir, $|z| < \infty$,

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots. \tag{18}$$

Obtenemos la serie de Laurent para $f$ por una simple sustitución de $z$ en (18) por $3/z$, $z \neq 0$,

$$e^{3/z} = 1 + \frac{3}{z} + \frac{3^2}{2!z^2} + \frac{3^3}{3!z^3} + \cdots. \tag{19}$$

Esta serie (19) es válida para $z \neq 0$, es decir, para $0 < |z| < \infty$. ❑

## Observaciones

(*i*) En conclusión, podemos indicar un resultado que será de especial interés para nosotros en las secciones 6.5 y 6.6. Sustituyendo la variable compleja $s$ con el símbolo habitual $z$, vemos que cuando $k = -1$, la fórmula (8) para los coeficientes de la serie de Laurent produce $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz$, o más importante,

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\, a_{-1}. \tag{20}$$

(*ii*) Con respecto a cómo el desarrollo de Laurent de una función $f$ se obtiene en un dominio anular determinado es *la* serie de Laurent, es decir, la serie que se obtiene es única.

## EJERCICIOS 6.3

*Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-17.*

En los problemas 1 a 6 desarrolle la función dada en una serie de Laurent válida para el dominio anular dado.

**1.** $f(z) = \dfrac{\cos z}{z}$, $0 < |z|$

**2.** $f(z) = \dfrac{z - \operatorname{sen} z}{z^5}$, $0 < |z|$

**3.** $f(z) = e^{-1/z^2}$, $0 < |z|$

**4.** $f(z) = \dfrac{1 - e^z}{z^2}$, $0 < |z|$

**5.** $f(z) = \dfrac{e^z}{z-1}$, $0 < |z-1|$

**6.** $f(z) = z\cos\dfrac{1}{z}$, $0 < |z|$

En los problemas 7 a 12 desarrolle $f(z) = \dfrac{1}{z(z-3)}$ en una serie de Laurent válida para el dominio anular indicado.

**7.** $0 < |z| < 3$ **8.** $|z| > 3$

**9.** $0 < |z-3| < 3$ **10.** $|z-3| > 3$

**11.** $1 < |z-4| < 4$ **12.** $1 < |z+1| < 4$

En los problemas 13 a 16 desarrolle $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ en una serie de Laurent válida para el dominio anular dado.

**13.** $1 < |z| < 2$ **14.** $|z| > 2$

**15.** $0 < |z-1| < 1$ **16.** $0 < |z-2| < 1$

En los problemas 17 a 20 desarrolle $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z-2)}$ en una serie de Laurent válida para el dominio anular dado.

**17.** $0 < |z+1| < 3$ **18.** $|z+1| > 3$

**19.** $1 < |z| < 2$ **20.** $0 < |z-2| < 3$

En los problemas 21 y 22 desarrolle $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)^2}$ en una serie de Laurent válida para el dominio anular dado.

**21.** $0 < |z| < 1$ **22.** $|z| > 1$

En los problemas 23 y 24 desarrolle $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z-1)^3}$ en una serie de Laurent válida para el dominio anular dado.

**23.** $0 < |z-2| < 1$ **24.** $0 < |z-1| < 1$

En los problemas 25 y 26 desarrolle $f(z) = \dfrac{7z-3}{z(z-1)}$ en una serie de Laurent válida para el dominio anular dado.

**25.** $0 < |z| < 1$ **26.** $0 < |z-1| < 1$ [*Sugerencia*: $\dfrac{7z-3}{z} = \dfrac{7(z-1)+4}{1+(z-1)}$].

En los problemas 27 y 28 desarrolle $f(z) = \dfrac{z^2-2z+2}{z-2}$ en una serie de Laurent válida para el dominio anular dado.

**27.** $1 < |z-1|$ **28.** $0 < |z-2|$

En los problemas 29 y 30 utilice $\cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - \cdots$, $\operatorname{sen} z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \cdots$, y la división larga para encontrar los tres primeros términos distintos de cero de una serie de Laurent de la función $f$ válida para $0 < |z| < \pi$.

**29.** $f(z) = \csc z$ **30.** $f(z) = \cot z$

## Enfocando los conceptos

**31.** La función $f(z) = \dfrac{1}{(z+2)(z-4i)}$ tiene una serie de Laurent $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z+2)^k$ válida en el anillo $r < |z+2| < R$. ¿A qué son iguales $r$ y $R$?

**32.** Considere la función $f(z) = \dfrac{e^{-2z}}{(z+1)^2}$. Utilice (7) para encontrar la parte principal del desarrollo de la serie de Laurent de $f$ alrededor de $z_0 = -1$ que es válida en el anillo $0 < |z+1| < \infty$.

**33.** Considere la función $f(z) = \dfrac{1}{(z-5)^3}$. ¿Cuál es el desarrollo en serie de Laurent de $f$ alrededor de $z_0 = 5$ que es válida en el anillo $0 < |z - 5| < \infty$?

**34.** Considere la función $f(z) = e^{(\alpha/2)(z-1/z)}$ donde $\alpha$ es una constante real.

(**a**) Utilice (8) para demostrar que el desarrollo en serie de Laurent de $f$ alrededor de $z_0 = 0$ es:

$$e^{(\alpha/2)(z-1/z)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\alpha) z^k$$

donde

$$J_k(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{(\alpha/2)(s-1/s)}}{s^{k+1}}\,ds$$

y $C$ es la circunferencia unitaria.

(**b**) Utilice la parametrización $s(\theta) = e^{i\theta}$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$ de $C$ para demostrar que

$$J_k(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha \operatorname{sen}(\theta) - k\theta)\,d\theta + \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(\alpha \operatorname{sen}(\theta) - k\theta)\,d\theta.$$

(**c**) Utilizando las propiedades de las integrales de las funciones pares e impares simplifique el resultado del inciso (b) para obtener:

$$J_k(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(k\theta - \alpha \operatorname{sen}\theta)\,d\theta.$$

Las funciones $J_k(\alpha)$ se llaman **funciones de Bessel** de primera clase de orden $k$ y son soluciones a ciertas ecuaciones diferenciales que aparecen frecuentemente en las matemáticas aplicadas.

## 6.4 Ceros y polos

Supongamos que $z = z_0$ es una singularidad aislada de una función compleja $f$ y que

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z-z_0)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \tag{1}$$

es la representación en serie de Laurent de $f$ válida para el disco perforado abierto $0 < |z - z_0| < R$. Vimos en la sección anterior que una serie de Laurent (1) que consta de dos partes. La parte de la serie en (1) con potencias negativas $z - z_0$, a saber,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z-z_0)^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} \tag{2}$$

es la parte principal de la serie. En el análisis siguiente vamos a asignar nombres diferentes a la singularidad aislada $z = z_0$ de acuerdo con el número de términos en la parte principal.

**Clasificación de los puntos singulares aislados** Un punto singular aislado $z = z_0$ de una función compleja $f$, da una clasificación dependiendo de si la parte principal (2) de su desarrollo de Laurent (1) contiene cero, un número finito, o un número infinito de términos.

($i$) Si la parte principal es cero, es decir, *todos* los coeficientes $a_{-k}$ en (2) son cero, entonces $z = z_0$ se llama **singularidad removible**.

($ii$) Si la parte principal contiene un número finito de términos distintos de cero, entonces $z = z_0$ se llama **polo**. Si, en este caso, el último coeficiente

distinto de cero en (2) es $a_{-n}$, $n \geq 1$, entonces decimos que $z = z_0$ es un **polo de orden** $n$. Si $z = z_0$ es un polo de orden 1, entonces la parte principal (2) contiene exactamente un término con coeficiente $a_{-1}$. Un polo de orden 1 comúnmente se llama **polo simple**.

(*iii*) Si la parte principal (2) contiene un número infinito de términos distintos de cero, entonces $z = z_0$ se llama **singularidad esencial**.

La tabla 6.4.1 resume la forma de una serie de Laurent de una función $f$ cuando $z = z_0$ es uno de los tipos anteriores de las singularidades aisladas. Por supuesto, $R$ en la tabla podría ser $\infty$.

| $z = z_0$ | **Serie de Laurent para** $0 < \lvert z - z_0 \rvert < R$ |
|---|---|
| Singularidad removible | $a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$ |
| Polo de orden $n$ | $\dfrac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dfrac{a_{-(n-1)}}{(z - z_0)^{n-1}} + \cdots + \dfrac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$ |
| Polo simple | $\dfrac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$ |
| Singularidad esencial | $\cdots + \dfrac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dfrac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$ |

**Tabla 6.4.1** Formas de la serie de Laurent

### EJEMPLO 1 Singularidad removible

Procediendo como lo hicimos en el ejemplo 1 de la sección 6.3 dividiendo la serie de Maclaurin para sen $z$ por $z$, vemos de

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots \tag{3}$$

que todos los coeficientes de la parte principal de la serie de Laurent son cero. Por tanto, $z = 0$ es una singularidad removible de la función $f(z) = (\operatorname{sen} z)/z$. ❑

Párrafo importante. Léalo varias veces. ➡

Si una función $f$ tiene una singularidad removible en el punto $z = z_0$, entonces siempre tenemos una definición adecuada para el valor de $f(z_0)$ de manera que $f$ sea analítica en $z = z_0$. Por ejemplo, ya que el lado derecho de (3) es 1 cuando hacemos $z = 0$, tiene sentido *definir* $f(0) = 1$. Por tanto, la función $f(z) = (\operatorname{sen} z)/z$, dada en (3), es ahora definida y continua en todo número complejo $z$. De hecho, $f$ también es analítica en $z = 0$, ya que está representada por la serie de Taylor $1 - z^2/3! + z^4/5! - \cdots$ centrada en 0 (una serie de Maclaurin).

### EJEMPLO 2 Polos y singularidad esencial

**(a)** Dividiendo los términos de $\operatorname{sen} z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \cdots$ entre $z^2$ se muestra que

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z^2} = \overbrace{\frac{1}{z}}^{\text{parte principal}} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \cdots$$

para $0 < |z| < \infty$. De esta serie se ve que $a_{-1} \neq 0$ y así $z = 0$ es un polo simple de la función $f(z) = (\text{sen } z)/z^2$. De la misma manera, vemos que $z = 0$ es un polo de orden 3 de la función $f(z) = (\text{sen } z)/z^4$ considerada en el ejemplo 1 de la sección 6.3.

**(b)** En el ejemplo 3 de la sección 6.3 hemos demostrado que el desarrollo de Laurent de $f(z) = 1/(z-1)^2(z-3)$ válida para $0 < |z-1| < 2$ es

$$f(z) = \overbrace{-\frac{1}{2(z-1)^2} - \frac{1}{4(z-1)}}^{\text{parte principal}} - \frac{1}{8} - \frac{z-1}{16} - \cdots.$$

Ya que $a_{-2} = -\frac{1}{2} \neq 0$, se concluye que $z = 1$ es un polo de orden 2.

**(c)** En el ejemplo 6 de la sección 6.3 vemos de (19) que la parte principal del desarrollo de Laurent de la función $f(z) = e^{3/z}$ válida para $0 < |z| < \infty$ contiene un número infinito de términos distintos de cero. Esto demuestra que $z = 0$ es una singularidad esencial de $f$. ❑

## Ceros

Recuerde, un número $z_0$ es **cero** de una función $f$ si $f(z_0) = 0$. Decimos que una función analítica $f$ tiene un **cero de orden** $n$ en $z = z_0$ si

$$\overbrace{f(z_0) = 0,\ f'(z_0) = 0,\ f''(z_0) = 0,\ \ldots,\ f^{(n-1)}(z_0) = 0,}^{z_0 \text{ es un cero de } f \text{ y de sus primeras } n-1 \text{ derivadas}} \quad \text{pero } f^{(n)}(z_0) \neq 0. \tag{4}$$

Un cero de orden $n$ también se conoce como un **cero de multiplicidad** $n$. Por ejemplo, para $f(z) = (z-5)^3$ vemos que $f(5) = 0, f'(5) = 0, f''(5) = 0$, pero $f'''(5) = 6 \neq 0$. Así, $f$ tiene un cero de orden (o multiplicidad) 3 en $z_0 = 5$. Un cero de orden 1 se llama un **cero simple**.

El siguiente teorema es una consecuencia de (4).

**Teorema 6.4.1 Cero de orden $n$**

Una función $f$ que es analítica en algún disco $|z - z_0| < R$ tiene un cero de orden $n$ en $z = z_0$ si y sólo si $f$ se puede escribir como

$$f(z) = (z - z_0)^n \phi(z), \tag{5}$$

donde $\phi$ es analítica en $z = z_0$ y $\phi(z_0) \neq 0$.

**Demostración parcial** Vamos a establecer la parte "sólo si" del teorema. Puesto que $f$ es analítica en $z_0$, se puede desarrollar en una serie de Taylor que está centrada en $z_0$ y es convergente para $|z - z_0| < R$. Ya que los coeficientes de una serie de Taylor $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ son $a_k = f^{(k)}(z_0)/k!$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, se deduce de (4) que los primeros $n$ términos de la serie son cero, por lo que el desarrollo debe tener la forma

$$\begin{aligned} f(z) &= a_n (z - z_0)^n + a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + a_{n+2}(z - z_0)^{n+2} + \cdots \\ &= (z - z_0)^n \left[a_n + a_{n+1}(z - z_0) + a_{n+2}(z - z_0)^2 + \cdots\right]. \end{aligned}$$

Identificando la serie de potencias

$$\phi(z) = a_n + a_{n+1}(z - z_0) + a_{n+2}(z - z_0)^2 + \cdots$$

concluimos que $\phi$ es una función analítica y que $\phi(z_0) = a_n \neq 0$ ya que $a_n = f^{(n)}(z_0)/n! \neq 0$ de (4). ❑

**EJEMPLO 3 Orden de un cero**

La función analítica $f(z) = z \operatorname{sen} z^2$ tiene un cero en $z = 0$. Si sustituimos $z$ por $z^2$ en (13) de la sección 6.2, obtenemos el desarrollo de Maclaurin

$$\operatorname{sen} z^2 = z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} - \cdots.$$

Entonces factorizando $z^2$ de la serie anterior podemos reescribir $f$ como

$$f(z) = z \operatorname{sen} z^2 = z^3\phi(z) \qquad \text{donde} \qquad \phi(z) = 1 - \frac{z^4}{3!} + \frac{z^8}{5!} - \cdots \tag{6}$$

donde $\phi(0) = 1$. Cuando se compara con (5), el resultado en (6) demuestra que $z = 0$ es un cero de orden 3 de $f$. ❑

**Polos** Podemos caracterizar a un polo de orden $n$ de una manera análoga a (5).

**Teorema 6.4.2 Polo de orden $n$**

Una función $f$ analítica en un disco perforado $0 < |z - z_0| < R$ tiene un polo de orden $n$ en $z = z_0$ si y sólo si $f$ se puede escribir como

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^n}, \tag{7}$$

donde $\phi$ es analítica en $z = z_0$ y $\phi(z_0) \neq 0$.

**Demostración parcial** Como en la demostración de (5), vamos a establecer la parte "sólo si" de la frase anterior. Ya que se supone que $f$ tiene un polo de orden $n$ en $z_0$, se puede desarrollar en una serie de Laurent

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots, \tag{8}$$

válida en el disco $0 < |z - z_0| < R$. Factorizando a $1/(z - z_0)^n$, (8) confirma que $f$ se puede escribir en la forma $\phi(z)/(z - z_0)^n$. Aquí identificamos

$$\phi(z) = a_{-n} + \cdots + a_{-2}(z - z_0)^{n-2} + a_{-1}(z - z_0)^{n-1} + a_0(z - z_0)^n + a_1(z - z_0)^{n+1} + \cdots, \tag{9}$$

como una serie de potencias válida para el disco abierto $|z - z_0| < R$. Suponiendo que, $z = z_0$ es un polo de orden $n$ de $f$, debemos tener $a_{-n} \neq 0$. Si definimos $\phi(z_0) = a_{-n}$, entonces se sigue de (9) que $\phi$ es analítica en todo el disco $|z - z_0| < R$. ❑

**De nuevo ceros** Un cero $z = z_0$ de una función analítica $f$ está *aislada* en el sentido de que existe una vecindad de $z_0$ para la que $f(z) \neq 0$ en todo punto $z$ de esa vecindad, excepto en $z = z_0$. Como consecuencia, si $z_0$ es un cero

de una función analítica no trivial $f$, entonces la función de $1/f(z)$ tiene una singularidad aislada en el punto $z = z_0$.

El siguiente resultado nos permite, en algunas circunstancias, determinar los polos de una función por inspección.

**Teorema 6.4.3 Polo de orden $n$**

Si las funciones $g$ y $h$ son analíticas en $z = z_0$ y h tiene un cero de orden $n$ en $z = z_0$ y $g(z_0) \neq 0$, entonces la función $f(z) = g(z)/h(z)$ tiene un polo de orden $n$ en $z = z_0$.

**Demostración** Ya que la función $h$ tiene un cero de orden $n$, (5) da $h(z) = (z - z_0)^n\phi(z)$, donde $\phi$ es analítica en $z = z_0$ y $\phi(z_0) \neq 0$. Por tanto, $f$ se puede escribir como

$$f(z) = \frac{g(z)/\phi(z)}{(z - z_0)^n}. \tag{10}$$

Como $g$ y $\phi$ son analíticas en $z = z_0$ y $\phi(z_0) \neq 0$, se deduce que la función $g/\phi$ es analítica en $z_0$. Además, $g(z_0) \neq 0$ implica que $g(z_0)/\phi(z_0) \neq 0$. Concluimos del teorema 6.4.2 que la función $f$ tiene un polo de orden $n$ en $z_0$. ❑

Cuando $n = 1$ en (10), vemos que un cero de orden 1, o un cero simple, en el denominador $h$ de $f(z) = g(z)/h(z)$ corresponde a un polo simple de $f$.

**EJEMPLO 4 Orden de los polos**

(**a**) La inspección de la función racional

$$f(z) = \frac{2z + 5}{(z - 1)(z + 5)(z - 2)^4}$$

muestra que el denominador tiene ceros de orden 1 en $z = 1$ y $z = -5$, y un cero de orden 4 en $z = 2$. Ya que el numerador no es cero en cualquiera de estos puntos, se deduce del teorema 6.4.3 y (10) que $f$ tiene polos simples en $z = 1$ y $z = -5$, y un polo de orden 4 en $z = 2$.

(**b**) En el ejemplo 3 vimos que $z = 0$ es un cero de orden 3 de $z \operatorname{sen} z^2$. Del teorema 6.4.3 y (10) se concluye que la función recíproca $f(z) = 1/(z \operatorname{sen} z^2)$ tiene un polo de orden 3 en $z = 0$. ❑

## Observaciones

(*i*) Del análisis anterior, debe intuitivamente ser claro que si una función $f$ tiene un polo en $z = z_0$, entonces $|f(z)| \to \infty$ conforme $z \to z_0$ por cualquier dirección. De (*i*) de las observaciones de la sección 2.6 podemos escribir $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

(*ii*) Si usted hojea otros libros de variable compleja, y se le pide que lo haga, puede encontrar el término *meromorfa*. Una función $f$ es **meromorfa** si es analítica en un dominio $D$, con la posible excepción en los polos en $D$. Se puede demostrar que una función meromorfa puede tener a lo más un número finito de polos en $D$. Por ejemplo, la función racional $f(z) = 1/(z^2 + 1)$ es meromorfa en el plano complejo.

## EJERCICIOS 6.4

*Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-17.*

En los problemas 1 a 4 se demuestra que $z = 0$ es una singularidad removible de la función dada. Dé una definición de $f(0)$, de modo que $f$ es analítica en $z = 0$.

1. $f(z) = \dfrac{e^{2z} - 1}{z}$
2. $f(z) = \dfrac{z^3 - 4z^2}{1 - e^{z^2/2}}$
3. $f(z) = \dfrac{\text{sen}4z - 4z}{z^2}$
4. $f(z) = \dfrac{1 - \frac{1}{2}z^{10} - \cos z^5}{\text{sen}\, z^2}$

En los problemas 5 a 10 determine los ceros y el orden para la función dada.

5. $f(z) = (z + 2 - i)^2$
6. $f(z) = z^4 - 16$
7. $f(z) = z^4 + z^2$
8. $f(z) = \text{sen}^2 z$
9. $f(z) = e^{2z} - e^z$
10. $f(z) = ze^z - z$

En los problemas 11 a 14 el número indicado es un cero de la función dada. Use una serie de Taylor o Maclaurin para determinar el orden del cero.

11. $f(z) = z(1 - \cos^2 z);\ z = 0$
12. $f(z) = z - \text{sen}\, z;\ z = 0$
13. $f(z) = 1 - e^{z-1};\ z = 1$
14. $f(z) = 1 - \pi i + z + e^z;\ z = \pi i$

En los problemas 15 a 26 determine el orden de los polos de la función dada.

15. $f(z) = \dfrac{3z - 1}{z^2 + 2z + 5}$
16. $f(z) = 5 - \dfrac{6}{z^2}$
17. $f(z) = \dfrac{1 + 4i}{(z + 2)(z + i)^4}$
18. $f(z) = \dfrac{z - 1}{(z + 1)(z^3 + 1)}$
19. $f(z) = \tan z$
20. $f(z) = \dfrac{\cot \pi z}{z^2}$
21. $f(z) = \dfrac{1 - \cosh z}{z^4}$
22. $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2}$
23. $f(z) = \dfrac{1}{1 + e^z}$
24. $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^2}$
25. $f(z) = \dfrac{\text{sen}\, z}{z^2 - z}$
26. $f(z) = \dfrac{\cos z - \cos 2z}{z^6}$

En los problemas 27 y 28 demuestre que el número indicado es una singularidad esencial de la función dada.

27. $f(z) = z^3\, \text{sen}\left(\dfrac{1}{z}\right);\ z = 0$
28. $f(z) = (z - 1)\cos\left(\dfrac{1}{z + 2}\right);\ z = -2$

29. Determine si $z = 0$ es una singularidad esencial de $f(z) = e^{z + 1/z}$.

30. Determine si $z = 0$ es una singularidad aislada o no aislada de $f(z) = \tan(1/z)$.

## Enfocando los conceptos

**31.** En el inciso (b) del ejemplo 2 en la sección 6.3, hemos demostrado que la representación en serie de Laurent de $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ válida para $|z| > 1$ es

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^5} + \cdots.$$

El punto $z = 0$ es una singularidad aislada de $f$, y la serie de Laurent contiene un número infinito de términos que contienen potencias enteras negativas de $z$. Analice: ¿Quiere esto decir que $z = 0$ es una singularidad esencial de $f$? Defienda su respuesta con argumentos matemáticos.

**32.** Supongamos que $f$ y $g$ son funciones analíticas y $f$ tiene un cero de orden $m$ y $g$ tiene un cero de orden $n$ en $z = z_0$. Analice: ¿Cuál es el orden del cero de $fg$ en $z_0$? ¿y de $f + g$ en $z_0$?

**33.** Un teorema interesante, conocido como el **teorema de Picard**, establece que en cualquier vecindad arbitrariamente pequeña de una singularidad esencial aislada $z_0$, una función analítica $f$ toma *todos* los valores complejos finitos, con *una* excepción, un número infinito de veces. Ya que $z = 0$ es una singularidad aislada esencial de $f(z) = e^{1/z}$, encuentre un número infinito de $z$ en cualquier vecindad de $z = 0$ para la que $f(z) = i$. ¿Cuál es la única excepción? Es decir, ¿cuál es el valor que no toma $f(z) = e^{1/z}$?

**34.** Suponga que $|f(z)|$ está acotada en una vecindad excluida de una singularidad aislada $z_0$. Clasifique $z_0$ con una de las tres clases de singularidades aisladas que se presentan en la página 303. Justifique su respuesta con argumentos matemáticos.

**35.** Suponga que la función analítica $f(z)$ tiene un cero de orden $n$ en $z = z_0$. Demuestre que la función $|f(z)|^m$, $m$ es un entero positivo, tiene un cero de orden $mn$ en $z = z_0$.

**36.** En este problema se le guiará a través del inicio de la demostración de la proposición:

*Las únicas singularidades aisladas de una función racional f son polos o singularidades removibles.*

**Demostración** Partimos de la hipótesis de que $f$ es una función racional, es decir, $f(z) = p(z)/q(z)$, donde $p$ y $q$ son polinomios. Sabemos que $f$ es analítica para toda $z$, excepto en los ceros de $q$. Suponga que $z_0$ es un cero de $q$ pero no de $p$. Entonces el teorema 6.4.1 nos dice que existe un entero positivo $n$ tal que $q(z) = (z - z_0)^n Q(z)$, donde $Q$ es un polinomio y $Q(z_0) \neq 0$. Ahora usando el teorema 6.4.2. Considere un caso más para terminar la prueba.

# 6.5 Residuos y teorema del residuo

Vimos en la última sección que si una función compleja $f$ tiene una singularidad aislada en un punto $z_0$, entonces $f$ tiene una representación en serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \cdots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1 (z - z_0) + \cdots,$$

que converge para todo $z$ *cerca* de $z_0$. Más precisamente, la representación es válida en una vecindad excluida de $z_0$ o disco perforado abierto $0 < |z - z_0| < R$. En esta sección todo nuestro objetivo será el coeficiente $a_{-1}$ y su importancia en el cálculo de las integrales de contorno.

**Residuo** El coeficiente $a_{-1}$ de $1/(z - z_0)$ en la serie de Laurent anterior se llama el **residuo** de la función $f$ en la singularidad aislada $z_0$. Usaremos la notación

$$a_{-1} = \text{Res}(f(z),\ z_0)$$

para denotar el residuo de $f$ en $z_0$. Recuerde, si la parte principal de la serie de Laurent válida para $0 < |z - z_0| < R$ contiene un número finito de términos donde $a_{-n}$ es el último coeficiente distinto de cero, entonces $z_0$ es un polo de orden $n$, si la parte principal de la serie contiene un número infinito de términos con coeficientes distintos de cero, entonces $z_0$ es una singularidad esencial.

**EJEMPLO 1 Residuos**

(**a**) En el inciso (b) del ejemplo 2 en la sección 6.4 vimos que $z = 1$ es un polo de orden dos de la función $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z-3)}$. De la serie de Laurent obtenida en ese ejemplo válida para la vecindad excluida de $z = 1$ definida por $0 < |z - 1| < 2$,

$$f(z) = \frac{-1/2}{(z-1)^2} + \overbrace{\frac{-1/4}{z-1}}^{a_{-1}} - \frac{1}{8} - \frac{z-1}{16} - \cdots$$

vemos que el coeficiente de $1/(z - 1)$ es $a_{-1} = \text{Res}(f(z), 1) = -\frac{1}{4}$.

(**b**) En el ejemplo 6 de la sección 6.3 vimos que $z = 0$ es una singularidad esencial de $f(z) = e^{3/z}$. La inspección de la serie de Laurent obtenida en ese ejemplo,

$$e^{3/z} = 1 + \overbrace{\frac{3}{z}}^{a_{-1}} + \frac{3^2}{2!z^2} + \frac{3^3}{3!z^3} + \cdots,$$

$0 < |z| < \infty$, muestra que el coeficiente de $1/z$ es $a_{-1} = \text{Res}(f(z), 0) = 3$. ❑

Vamos a ver por qué el coeficiente de $a_{-1}$ es muy importante más adelante en esta sección. Mientras tanto, examinaremos la forma de obtener este número complejo cuando $z_0$ es un *polo* de una función $f$ sin la necesidad de desarrollar $f$ en una serie de Laurent en $z_0$. Comenzamos con el residuo en un polo simple.

**Teorema 6.5.1 Residuo en un polo simple**

Si $f$ tiene un polo simple en $z = z_0$, entonces,

$$\text{Res}(f(z), z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z). \tag{1}$$

**Demostración** Puesto que $f$ tiene un polo simple en $z = z_0$, su desarrollo de Laurent convergente en un disco perforado $0 < |z - z_0| < R$ tiene la forma

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0) + \cdots,$$

donde $a_{-1} \neq 0$. Al multiplicar ambos lados de esta serie por $z - z_0$ y luego tomando el límite cuando $z \to z_0$ obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_{z \to z_0} (z - z_0)f(z) &= \lim_{z \to z_0} [a_{-1} + a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + \cdots] \\ &= a_{-1} = \operatorname{Res}(f(z), z_0).\end{aligned}$$

❑

**Teorema 6.5.2 Residuo en un polo de orden $n$**

Si $f$ tiene un polo de orden $n$ en $z = z_0$, entonces,

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \Big[(z - z_0)^n f(z)\Big]. \tag{2}$$

**Demostración** Debido a que se supone que $f$ tiene polo de orden $n$ en $z = z_0$, su desarrollo de Laurent convergente en un disco perforado $0 < |z - z_0| < R$ debe tener la forma

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots,$$

donde $a_{-n} \neq 0$. Multiplicamos la última expresión por $(z - z_0)^n$,

$$(z - z_0)^n f(z) = a_{-n} + \cdots + a_{-2}(z - z_0)^{n-2} + a_{-1}(z - z_0)^{n-1} + a_0(z - z_0)^n + a_1(z - z_0)^{n+1} + \cdots$$

y después derivando $n - 1$ veces ambos lados de la igualdad:

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \Big[(z - z_0)^n f(z)\Big] = (n-1)!a_{-1} + n!a_0(z - z_0) + \cdots. \tag{3}$$

Ya que todos los términos del lado derecho después del primero involucran potencias enteras positivas de $z - z_0$, el límite de (3), cuando $z \to z_0$ es

$$\lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \Big[(z - z_0)^n f(z)\Big] = (n-1)!a_{-1}.$$

Resolviendo la última ecuación para $a_{-1}$ se obtiene (2). ❑

Note que (2) se reduce a (1) cuando $n = 1$.

**EJEMPLO 2 Residuos en un polo**

La función $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z-3)}$ tiene un polo simple en $z = 3$ y un polo de orden 2 en $z = 1$. Use los teoremas 6.5.1 y 6.5.2 para encontrar los residuos.

**Solución** Puesto que $z = 3$ es un polo simple, usamos (1):

$$\operatorname{Res}(f(z), 3) = \lim_{z \to 3}(z - 3)f(z) = \lim_{z \to 3} \frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{4}.$$

Ahora en el polo de orden 2, el resultado en (2) da

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f(z),1) &= \frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2 f(z)\right]\\ &= \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\frac{1}{z-3}\\ &= \lim_{z\to 1}\frac{-1}{(z-3)^2} = -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$ ❑

Cuando $f$ no es una función racional, el cálculo de los residuos por medio de (1) o (2) a veces puede ser tedioso. Es posible idear fórmulas alternativas de residuos. En particular, suponga que una función $f$ se puede escribir como un cociente de $f(z) = g(z)/h(z)$, donde $g$ y $h$ son analíticas en $z = z_0$. Si $g(z_0) \neq 0$ y si la función $h$ tiene un cero de orden 1 en $z_0$, entonces $f$ tiene un polo simple en $z = z_0$ y

Un método alternativo para calcular un residuo en un polo simple ➡

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}. \tag{4}$$

Para obtener este resultado vamos a utilizar la definición de un cero de orden 1, la definición de una derivada y después a (1). Primero, ya que la función $h$ tiene un cero de orden 1 en $z_0$, debemos tener $h(z_0) = 0$ y $h'(z_0) \neq 0$. Segundo, por definición de la derivada dada en (12) de la sección 3.1,

$$h'(z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{h(z) - \overbrace{h(z_0)}^{0}}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0}\frac{h(z)}{z - z_0}.$$

Entonces combinando los dos hechos anteriores de la siguiente manera en (1):

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)\frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z\to z_0}\frac{g(z)}{\dfrac{h(z)}{z - z_0}} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Hay varias formas alternativas de obtener la fórmula (4). Por ejemplo, se puede obtener con una sola aplicación de la regla de *L'*Hôpital (página 133), pero se le pide en el problema 40 de los ejercicios 6.5 deducir (4) usando (5) de la sección 6.4. Las fórmulas de residuos para los polos de orden superior a 1 son mucho más complicadas que (4) y no se presentan aquí. Como uso práctico, una deducción de una de estas fórmulas de orden superior proporciona la oportunidad de revisar y utilizar los conceptos importantes. Vea el problema 41 de los ejercicios 6.5.

## EJEMPLO 3 Uso de (4) para calcular los residuos

El polinomio $z^4 + 1$ se puede factorizar como $(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$, donde $z_1$, $z_2$, $z_3$ y $z_4$ son los cuatro ceros distintos de la ecuación $z^4 + 1 = 0$ (o equivalentemente, los cuatro ceros cuarticos de $-1$). Del teorema 6.4.3 se deduce que la función

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$$

tiene cuatro polos simples. Ahora, de (4) de la sección 1.4 tenemos $z_1 = e^{\pi i/4}$, $z_2 = e^{3\pi i/4}$, $z_3 = e^{5\pi i/4}$, y $z_4 = e^{7\pi i/4}$. Para calcular los residuos, usamos (4) de esta sección, junto con la fórmula de Euler (6) de la sección 1.6:

$$\text{Res}(f(z), z_1) = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{1}{4}e^{-3\pi i/4} = -\frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}i$$

$$\text{Res}(f(z), z_2) = \frac{1}{4z_2^3} = \frac{1}{4}e^{-9\pi i/4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}i$$

$$\text{Res}(f(z), z_3) = \frac{1}{4z_3^3} = \frac{1}{4}e^{-15\pi i/4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}i$$

$$\text{Res}(f(z), z_4) = \frac{1}{4z_4^3} = \frac{1}{4}e^{-21\pi i/4} = -\frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}i.$$ ❑

Por supuesto, podríamos haber calculado cada uno de los residuos en el ejemplo 3 usando la fórmula (1). Pero el procedimiento en este caso habría requerido mucho más álgebra. Por ejemplo, podemos utilizar primero la factorización de $z^4 + 1$ para escribir a $f$ como:

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)}.$$

Por (1) el residuo, por ejemplo, en el polo $z_1$ es

$$\begin{aligned}\text{Res}(f(z), z_1) &= \lim_{z\to z_1}(z - z_1)\frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)} \\ &= \frac{1}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)} \\ &= \frac{1}{(e^{\pi i/4} - e^{3\pi i/4})(e^{\pi i/4} - e^{5\pi i/4})(e^{\pi i/4} - e^{7\pi i/4})}.\end{aligned}$$

Luego nos enfrentamos a la difícil tarea de simplificar el denominador de la última expresión. Por último, tenemos que hacer este proceso tres veces más.

**Teorema del residuo** Llegamos ahora a la razón por la cual el concepto de residuo es importante. El siguiente teorema establece que bajo algunas circunstancias podemos evaluar las integrales complejas $\oint_C f(z)\,dz$ sumando los residuos en las singularidades aisladas de $f$ dentro del contorno cerrado $C$.

**Teorema 6.5.3 Teorema del residuo de Cauchy**

Sea $D$ un dominio simplemente conexo y $C$ un contorno simple y cerrado que se encuentra en el interior de $D$. Si una función $f$ es analítica sobre y dentro de $C$, excepto en un número finito de singularidades aisladas $z_1, z_2, \ldots, z_n$ dentro de $C$, entonces

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\text{Res}\,(f(z), z_k). \tag{5}$$

**Demostración** Supongamos que $C_1$, $C_2$, ..., $C_n$ son circunferencias con centro en $z_1$, $z_2$, ... , $z_n$, respectivamente. Además que cada circunferencia $C_k$ tiene un radio $r_k$ suficientemente pequeño tal que $C_1$, $C_2$, ... , $C_n$

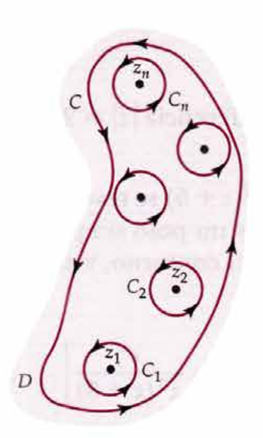



**Figura 6.5.1** *n* puntos singulares dentro del contorno *C*

son mutuamente disjuntas y están en el interior de la curva cerrada simple *C*. Vea la figura 6.5.1. Ahora en (20) de la sección 6.3 vimos que $\oint_{C_k} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_k)$, y así por el teorema 5.3.2 tenemos

$$\oint_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f(z), z_k). \qquad \square$$

**EJEMPLO 4 Evaluación por el teorema del residuo**

Evalúe $\oint_C \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}\,dz$, donde

(**a**) el contorno *C* es el rectángulo definido por $x = 0$, $x = 4$, $y = -1$, $y = 1$,

(**b**) y el contorno *C* es la circunferencia $|z| = 2$.

**Solución**

(**a**) Ya que tanto $z = 1$ como $z = 3$ son polos dentro del rectángulo tenemos de (5) que

$$\oint_C \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}\,dz = 2\pi i[\operatorname{Res}(f(z), 1) + \operatorname{Res}(f(z), 3)]$$

Hemos encontrado estos residuos en el ejemplo 2. Por tanto,

$$\oint_C \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}\,dz = 2\pi i\left[\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\right] = 0.$$

(**b**) Puesto que solamente el polo $z = 1$ se encuentra dentro de la circunferencia $|z| = 2$, tenemos de (5)

$$\oint_C \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), 1) = 2\pi i\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}i.$$

$\square$

**EJEMPLO 5 Evaluación con el teorema del residuo**

Evalúe $\oint_C \frac{2z+6}{z^2+4}\,dz$, donde el contorno *C* es la circunferencia $|z - i| = 2$.

**Solución** Factorizando el denominador como $z^2 + 4 = (z - 2i)(z + 2i)$, vemos que el integrando tiene polos simples en $-2i$ y $2i$. Debido a que sólo $2i$ se encuentra dentro del contorno *C*, se deduce de (5) que

$$\oint_C \frac{2z+6}{z^2+4}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), 2i).$$

Pero,
$$\operatorname{Res}(f(z), 2i) = \lim_{z\to 2i} (z-2i)\frac{2z+6}{(z-2i)(z+2i)} = \frac{6+4i}{4i} = \frac{3+2i}{2i}.$$

Por lo tanto,
$$\oint_C \frac{2z+6}{z^2+4}\,dz = 2\pi i\left(\frac{3+2i}{2i}\right) = \pi(3+2i). \qquad \square$$

**EJEMPLO 6 Evaluación con el teorema del residuo**

Evalúe $\oint_C \frac{e^z}{z^4 + 5z^3}\, dz$, donde el contorno $C$ es la circunferencia $|z| = 2$.

**Solución** Al escribir el denominador como $z^4 + 5z^3 = z^3(z + 5)$ se revela que el integrando $f(z)$ tiene un polo de orden 3 en $z = 0$ y un polo simple en $z = -5$. Pero sólo el polo $z = 0$ se encuentra dentro del contorno, y así de (5) y (2) tenemos que,

$$\oint_C \frac{e^z}{z^4 + 5z^3}\, dz = 2\pi i \text{Res}(f(z), 0) = 2\pi i \frac{1}{2!} \lim_{z \to 0} \frac{d^2}{dz^2}\left[z^3 \cdot \frac{e^z}{z^3(z+5)}\right]$$
$$= \pi i \lim_{z \to 0} \frac{(z^2 + 8z + 17)e^z}{(z+5)^3} = \frac{17\pi}{125} i.$$

❑

**EJEMPLO 7 Evaluación con el teorema del residuo**

Evalúe $\oint_C \tan z\, dz$, donde el contorno $C$ es la circunferencia $|z| = 2$.

**Solución** El integrando $f(z) = \tan z = \text{sen}\, z/\cos z$ tiene polos simples en los puntos donde $\cos z = 0$. Hemos visto en (21) de la sección 4.3 que los únicos ceros de $\cos z$ son los números reales $z = (2n + 1)\pi/2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Ya que sólo $-\pi/2$ y $\pi/2$, están dentro de la circunferencia $|z| = 2$, tenemos

$$\oint_C \tan z\, dz = 2\pi i\left[\text{Res}\left(f(z), -\frac{\pi}{2}\right) + \text{Res}\left(f(z), \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Identificando $g(z) = \text{sen}\, z$, $h(z) = \cos z$, y $h'(z) = -\text{sen}\, z$, vemos de (4) que

$$\text{Res}\left(f(z), -\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\text{sen}(-\pi/2)}{-\text{sen}(-\pi/2)} = -1$$

y

$$\text{Res}\left(f(z), \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\text{sen}(\pi/2)}{-\text{sen}(\pi/2)} = -1.$$

Por tanto,

$$\oint_C \tan z\, dz = 2\pi i[-1 - 1] = -4\pi i.$$

❑

El teorema 6.5.3 es aplicable en una singularidad esencial.

Aunque no existe una fórmula amigable análoga a (1), (2) o (4), para calcular el residuo en una singularidad esencial $z_0$, el siguiente ejemplo muestra que el teorema 6.5.3 aún es aplicable en $z_0$.

**EJEMPLO 8 Evaluación con el teorema del residuo**

Evalúe $\oint_C e^{3/z}\, dz$, donde el contorno $C$ es la circunferencia $|z| = 1$.

**Solución** Como hemos visto, $z = 0$ es una singularidad esencial del integrando $f(z) = e^{3/z}$, y ni las fórmulas (1) y (2) son aplicables para encontrar el

residuo de $f$ en este punto. Sin embargo, vimos en el ejemplo 1 que la serie de Laurent de $f$ en $z = 0$ da $\text{Res}(f(z), 0) = 3$. Por tanto, de (5) tenemos

$$\oint_C e^{3/z}\, dz = 2\pi i \text{Res}(f(z), 0) = 2\pi i(3) = 6\pi i.$$

## EJERCICIOS 6.5 *Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-18.*

En los problemas 1 a 6 utilice una serie de Laurent adecuada para encontrar el residuo indicado.

**1.** $f(z) = \dfrac{2}{(z-1)(z+4)}$; $\text{Res}(f(z), 1)$

**2.** $f(z) = \dfrac{1}{z^3(1-z)^3}$; $\text{Res}(f(z), 0)$

**3.** $f(z) = \dfrac{4z-6}{z(2-z)}$; $\text{Res}(f(z), 0)$

**4.** $f(z) = (z+3)^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{2}{z+3}\right)$; $\text{Res}(f(z), -3)$

**5.** $f(z) = e^{-2/z^2}$; $\text{Res}(f(z), 0)$

**6.** $f(z) = \dfrac{e^{-z}}{(z-2)^2}$; $\text{Res}(f(z), 2)$

En los problemas 7 a 16 use (1), (2) o (4) para encontrar el residuo en cada polo de la función dada.

**7.** $f(z) = \dfrac{z}{z^2+16}$

**8.** $f(z) = \dfrac{4z+8}{2z-1}$

**9.** $f(z) = \dfrac{1}{z^4+z^3-2z^2}$

**10.** $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-2z+2)^2}$

**11.** $f(z) = \dfrac{5z^2-4z+3}{(z+1)(z+2)(z+3)}$

**12.** $f(z) = \dfrac{2z-1}{(z-1)^4(z+3)}$

**13.** $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2(z-\pi)^3}$

**14.** $f(z) = \dfrac{e^z}{e^z-1}$

**15.** $f(z) = \sec z$

**16.** $f(z) = \dfrac{1}{z \operatorname{sen} z}$

En los problemas 17 a 20 utilice el teorema de Cauchy del residuo, donde sea apropiado, para evaluar la integral a lo largo del contorno indicado.

**17.** $\displaystyle\oint_C \frac{1}{(z-1)(z+2)^2}\, dz$ **(a)** $|z| = \frac{1}{2}$ **(b)** $|z| = \frac{3}{2}$ **(c)** $|z| = 3$

**18.** $\displaystyle\oint_C \frac{z+1}{z^2(z-2i)}\, dz$ **(a)** $|z| = 1$ **(b)** $|z-2i| = 1$ **(c)** $|z-2i| = 4$

**19.** $\displaystyle\oint_C z^3 e^{-1/z^2}\, dz$ **(a)** $|z| = 5$ **(b)** $|z+i| = 2$ **(c)** $|z-3| = 1$

**20.** $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z \operatorname{sen} z}\, dz$ **(a)** $|z-2i| = 1$ **(b)** $|z-2i| = 3$ **(c)** $|z| = 5$

En los problemas 21 al 34 utilice el teorema de Cauchy del residuo para evaluar la integral a lo largo del contorno indicado.

**21.** $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z^2+4z+13}\, dz$, $C$: $|z-3i| = 3$

**22.** $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z^3(z-1)^4}\, dz$, $C$: $|z-2| = \frac{3}{2}$

**23.** $\oint_C \frac{z}{z^4 - 1}\, dz,\ C\colon |z| = 2$

**24.** $\oint_C \frac{z}{(z+1)(z^2+1)}\, dz,\ C\colon 16x^2 + y^2 = 4$

**25.** $\oint_C \frac{ze^z}{z^2 - 1}\, dz,\ C\colon |z| = 2$

**26.** $\oint_C \frac{e^z}{z^3 + 2z^2}\, dz,\ C\colon |z| = 3$

**27.** $\oint_C \frac{\tan z}{z}\, dz,\ C\colon |z - 1| = 2$

**28.** $\oint_C \frac{\cot \pi z}{z^2}\, dz,\ C\colon |z| = \frac{1}{2}$

**29.** $\oint_C \cot \pi z\, dz$, $C$ es el rectángulo definido por $x = \frac{1}{2}$, $x = \pi$, $y = -1$, $y = 1$

**30.** $\oint_C \frac{2z - 1}{z^2(z^3 + 1)}\, dz$, $C$ es el rectángulo definido por $x = -2$, $x = 1$, $y = -\frac{1}{2}$, $y = 1$

**31.** $\oint_C \left(z^2 e^{1/\pi z} + \frac{ze^z}{z^4 - \pi^4}\right) dz,\ C: 4x^2 + y^2 = 16$

**32.** $\oint_C \frac{\cos z}{(z-1)^2(z^2+9)}\, dz,\ C: |z - 1| = 1$

**33.** $\oint_C \frac{1}{z^6 + 1}\, dz$, $C$ es la semicircunferencia definida por $y = 0$, $y = \sqrt{4 - x^2}$

**34.** $\oint_C e^{4/(z-2)}\, dz,\ C: |z - 1| = 3$

## Enfocando los conceptos

**35.** **(a)** Use series para demostrar que $z = 0$ es un cero de orden 2 de $1 - \cos z$.

**(b)** Considerando el inciso (a), $z = 0$ es un polo de orden dos de la función $f(z) = e^z/(1 - \cos z)$ y por tanto, tiene una serie de Laurent

$$f(z) = \frac{e^z}{1 - \cos z} = \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

válida para $0 < |z| < 2\pi$. Utilice series para $e^z$ y $1 - \cos z$ e iguale los coeficientes en el producto

$$e^z = (1 - \cos z)\left(\frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + \cdots\right)$$

para determinar $a_{-2}$, $a_{-1}$, y $a_0$.

**(c)** Evalúe $\oint_C \frac{e^z}{1 - \cos z}\, dz$, donde $C$ es $|z| = 1$.

**36.** Analice la forma de evaluar $\oint_C e^{1/z} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right) dz$, donde $C$ es $|z| = 1$. Lleve a cabo sus ideas.

**37.** Considere la función $f(z) = z^4/(1 - z^{1/2})$, donde $z^{1/2}$ representa la rama principal de la función raíz cuadrada. Analice y justifique su respuesta: ¿Tiene $f$ un polo en $z = 1$? Si es así, encuentre $\operatorname{Res}(f(z), 1)$.

**38.** Los residuos se pueden utilizar para encontrar coeficientes en las descomposiciones en fracciones parciales de funciones racionales. Suponga que $p(z)$ es un polinomio de grado $\leq 2$, y que $z_1$, $z_2$ y $z_3$ son distintos números complejos que no son ceros de $p(z)$. Entonces

$$f(z) = \frac{p(z)}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)} = \frac{A}{z-z_1} + \frac{B}{z-z_2} + \frac{C}{z-z_3}.$$

(**a**) Use (1) para demostrar

$$A = \operatorname{Res}(f(z), z_1) = \frac{p(z_1)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}$$

$$B = \operatorname{Res}(f(z), z_2) = \frac{p(z_2)}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)}$$

$$C = \operatorname{Res}(f(z), z_3) = \frac{p(z_3)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)}.$$

(**b**) Ahora use una serie de Laurent para demostrar que $A = \operatorname{Res}(f(z), z_1)$. [*Sugerencia*: El segundo y el tercer término, $B/(z-z_2)$ y $C/(z-z_3)$, respectivamente, son analíticas en $z_1$. Vea también (3) y (4) de la sección 6.4.]

**39.** Use el problema 38 para encontrar la descomposición en fracciones parciales de $f(z) = \dfrac{5z^2 - z + 2}{z(z+1)(z-i)}$.

**40.** Si $h(z)$ tiene un cero de orden 1, se deduce de (5) de la sección 6.4 que $h(z) = (z-z_0)\phi(z)$, donde $\phi$ es analítica en $z = z_0$ y $\phi(z_0) \neq 0$. Con $f(z) = g(z)/h(z)$, use (1) para deducir (4):

$$\operatorname{Res}\Big(f(z), z_0\Big) = \frac{g(z_0)}{\phi(z_0)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

**41.** Si $h(z)$ tiene un cero de orden 2, se deduce de (5) de la sección 6.4 que $h(z) = (z-z_0)^2\phi(z)$, donde $\phi$ es analítica en $z = z_0$ y $\phi(z_0) \neq 0$. Con $f(z) = g(z)/h(z)$, use (2) con $n = 2$ para deducir una fórmula análoga a (4) para $\operatorname{Res}(f(z), z_0)$ en un polo de orden 2 en $z = z_0$.

**42.** Sea $f(z) = 1/[p(z)]^2$, donde $p(z)$ tiene un cero de orden 1 en $z = z_0$.

(**a**) Use el problema 41 para deducir la fórmula $\operatorname{Res}(f(z), z_0) = -\dfrac{p''(z_0)}{[p'(z_0)]^3}$.

(**b**) Utilice el inciso (b) para determinar el residuo de $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-z)^2}$ en $z = 0$.

## 6.6 Algunas consecuencias del teorema del residuo

En esta sección veremos cómo la teoría del residuo puede usarse para evaluar integrales reales de las formas

$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\, d\theta, \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx, \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos\alpha x\, dx \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen}\alpha x\, dx, \tag{3}$$

donde $F$ en (1) y $f$ en (2) y (3) son funciones racionales. Para la función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ en (2) y (3), suponemos que los polinomios $p$ y $q$ no tienen factores comunes.

Además para evaluar las tres integrales que acabamos de dar, demostraremos cómo usar los residuos para evaluar las integrales reales impropias que requieren integración a lo largo de un corte de rama.

El análisis termina con la relación entre la teoría del residuo y los ceros de una función analítica y una consideración de cómo se pueden en algunos casos utilizar los residuos para encontrar la suma de una serie infinita.

### 6.6.1 Evaluación de integrales reales trigonométricas

**Integrales de la forma $\int_0^{2\pi} F(\cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta)\,d\theta$** La idea básica aquí es convertir una integral trigonométrica real de la forma (1) en una integral compleja, donde el contorno $C$ es la circunferencia unitaria $|z| = 1$ centrada en el origen. Para esto partimos de (10) de la sección 2.2 para parametrizar este contorno por $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Podemos entonces escribir

$$dz = ie^{i\theta}\,d\theta,\ \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2},\quad \operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Las dos últimas expresiones son consecuencia de (2) y (3) de la sección 4.3. Dado que $dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta$ y $z^{-1} = 1/z = e^{-i\theta}$, estas tres cantidades son equivalentes a

$$d\theta = \frac{dz}{iz},\quad \cos\theta = \frac{1}{2}(z + z^{-1}),\quad \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2i}(z - z^{-1}). \tag{4}$$

La conversión de la integral en (1) en una integral de contorno se logra sustituyendo, a su vez, $d\theta$, $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ con las expresiones en (4):

$$\oint_C F\left(\frac{1}{2}(z + z^{-1}), \frac{1}{2i}(z - z^{-1})\right)\frac{dz}{iz},$$

donde $C$ es la circunferencia unitaria $|z| = 1$.

---

**EJEMPLO 1 Una integral real trigonométrica**

Evalúe $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2 + \cos\theta)^2}\,d\theta.$

**Solución** Cuando usamos las sustituciones dadas en (4), la integral trigonométrica se convierte en la integral de contorno

$$\oint_C \frac{1}{\left(2 + \frac{1}{2}(z + z^{-1})\right)^2}\frac{dz}{iz} = \oint_C \frac{1}{\left(2 + \dfrac{z^2+1}{2z}\right)^2}\frac{dz}{iz}.$$

Realizando la simplificación algebraica del integrando entonces se obtiene

$$\frac{4}{i}\oint_C \frac{z}{(z^2 + 4z + 1)^2}\,dz.$$

De la fórmula cuadrática se puede factorizar el polinomio $z^2 + 4z + 1$ como $z^2 + 4z + 1 = (z - z_1)(z - z_2)$, donde $z_1 = -2 - \sqrt{3}$ y $z_2 = -2 + \sqrt{3}$. Por tanto, el integrando se puede escribir

$$\frac{z}{(z^2 + 4z + 1)^2} = \frac{z}{(z - z_1)^2(z - z_2)^2}.$$

Ya que sólo $z_2$ está dentro de la circunferencia unitaria $C$, tenemos

$$\oint_C \frac{z}{(z^2+4z+1)^2}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_2).$$

Para calcular el residuo, observamos primero que $z_2$ es un polo de orden 2 y utilizamos (2) de la sección 6.5:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f(z), z_2) &= \lim_{z\to z_2} \frac{d}{dz}\left[(z-z_2)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to z_2} \frac{d}{dz}\frac{z}{(z-z_1)^2}\\ &= \lim_{z\to z_2}\frac{-z-z_1}{(z-z_1)^3} = \frac{1}{6\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Por tanto, $\displaystyle \frac{4}{i}\oint_C \frac{z}{(z^2+4z+1)}\,dz = \frac{4}{i}\cdot 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_1) = \frac{4}{i}\cdot 2\pi i\cdot\frac{1}{6\sqrt{3}}$

y, por último, $\displaystyle \int_0^{2\pi}\frac{1}{(2+\cos\theta)^2}\,d\theta = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$ ❑

## 6.6.2 Evaluación de integrales reales impropias

**Integrales de la forma $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$** Supongamos que $y = f(x)$ es una función real que está definida y es continua en el intervalo $[0, \infty)$. En cálculo elemental la integral impropia $I_1 = \int_0^{\infty} f(x)\,dx$ se define como el límite

$$I_1 = \int_0^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R f(x)\,dx. \tag{5}$$

Si el límite existe, se dice que la integral $I_1$ es **convergente**, de lo contrario, es **divergente**. La integral impropia $I_2 = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ se define de manera similar:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{0} f(x)\,dx. \tag{6}$$

Por último, si $f$ es continua en $(-\infty, \infty)$, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ se define como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{\infty} f(x)\,dx = I_1 + I_2, \tag{7}$$

siempre que *ambas* integrales $I_1$ y $I_2$ sean convergentes. Si cualquiera de ellas, $I_1$ o $I_2$, es divergente, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ es divergente. Es importante recordar que el lado derecho de (7) *no* es igual que

$$\lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{0} f(x)\,dx + \int_0^R f(x)\,dx\right] = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx. \tag{8}$$

Para que la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ sea convergente, los límites (5) y (6) deben existir independientemente uno del otro. *Pero*, en caso de que conozcamos (*a priori*) que una integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ converja, entonces se puede evaluar por medio del proceso al límite dado en (8):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx. \tag{9}$$

Por otro lado, el límite simétrico en (9) puede existir aun cuando la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ sea divergente. Por ejemplo, la integral $\int_{-\infty}^{\infty} x\, dx$ es divergente ya que $\lim_{R\to\infty} \int_0^R x\, dx = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2}R^2 = \infty$. Sin embargo, con (9) se obtiene

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} x\, dx = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2}[R^2 - (-R)^2] = 0. \tag{10}$$

El límite en (9), si existe, se llama **valor principal de Cauchy** (V.P.) de la integral y se escribe como

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx. \tag{11}$$

En (10) hemos demostrado que V.P. $\int_{-\infty}^{\infty} x\, dx = 0$. En resumen:

### *Valor principal de Cauchy*

*Cuando una integral de la forma* (2) *converge, su valor principal de Cauchy es igual que el valor de la integral. Si la integral diverge, aún puede tener un valor principal de Cauchy* (11).

Observación importante relacionada con funciones pares

Un último punto sobre el valor principal de Cauchy: Supongamos que $f(x)$ es continua en $(-\infty, \infty)$ y es una función *par*, es decir, $f(-x) = f(x)$. Entonces su gráfica es simétrica con respecto al eje $y$, y como una consecuencia

$$\int_{-R}^{0} f(x)\, dx = \int_{0}^{R} f(x)\, dx \tag{12}$$

y
$$\int_{-R}^{R} f(x)\, dx = \int_{-R}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{R} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{R} f(x)\, dx. \tag{13}$$

De (12) y (13) concluimos que *si* el valor principal de Cauchy (11) existe, entonces tanto $\int_0^{\infty} f(x)\, dx$ como $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ convergen. Los valores de las integrales son

$$\int_0^{\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{2}\, \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx.$$

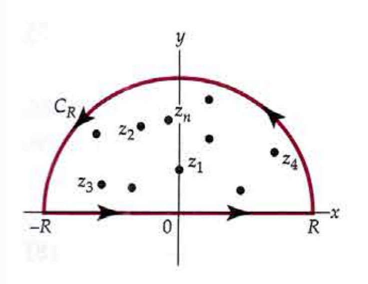



**Figura 6.6.1** Contorno semicircular

Para evaluar una $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$, donde la función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ es continua en $(-\infty, \infty)$, por la teoría de los residuos reemplazamos $x$ por la variable compleja $z$ y se integra la función compleja $f$ en un contorno cerrado $C$ que consiste en el intervalo $[-R, R]$ en el eje real y en una semicircunferencia $C_R$ de radio suficiente grande para incluir todos los polos de $f(z) = p(z)/q(z)$ en el semiplano superior $\text{Im}(z) > 0$. Vea la figura 6.6.1. De acuerdo con el teorema 6.5.3 de la sección 6.5 tenemos

$$\oint_C f(z)\, dz = \int_{C_R} f(z)\, dz + \int_{-R}^{R} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}(f(z), z_k),$$

donde $z_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ denota polos en el semiplano superior. Si podemos demostrar que la integral $\int_{C_R} f(z)\, dz \to 0$ cuando $R \to \infty$, entonces tenemos

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}(f(z), z_k). \tag{14}$$

**EJEMPLO 2 V.P. de Cauchy de una integral impropia**

Evalúe el valor principal de Cauchy de $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx$.

**Solución** Sea $f(z) = 1/(z^2+1)(z^2+9)$. Ya que

$$(z^2+1)(z^2+9) = (z-i)(z+i)(z-3i)(z+3i),$$

tomamos el contorno cerrado $C$ que consiste en el intervalo $[-R, R]$ en el eje $x$ y la semicircunferencia de radio $C_R$ de radio $R > 3$. Como se observa en la figura 6.6.2,

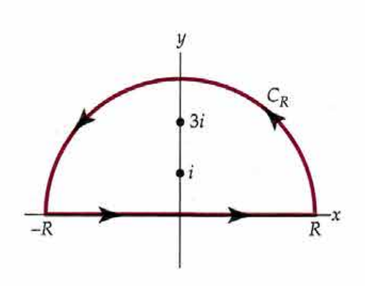
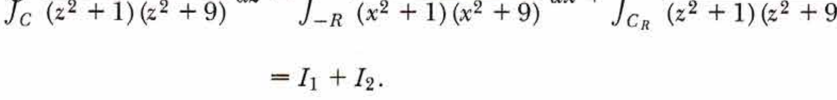



Figura 6.6.2 Contorno para el ejemplo 2



$$\oint_C \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx + \int_{C_R} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}\,dz$$

$$= I_1 + I_2.$$

Sin embargo, por el teorema del residuo, tenemos:

$$I_1 + I_2 = 2\pi i[\operatorname{Res}(f(z), i) + \operatorname{Res}(f(z), 3i)].$$

En los polos simples $z = i$, $z = 3i$ encontramos, respectivamente,

$$\operatorname{Res}(f(z),\ i) = \frac{1}{16i} \quad \text{y} \quad \operatorname{Res}(f(z),\ 3i) = -\frac{1}{48i},$$

de modo que $$I_1 + I_2 = 2\pi i\left[\frac{1}{16i} + \left(-\frac{1}{48i}\right)\right] = \frac{\pi}{12}. \tag{15}$$

Ahora queremos hacer que $R \to \infty$ en (15). Antes de hacer esto, usamos la desigualdad (8) de la sección 1.2 observando que sobre el contorno $C_R$,

$$|(z^2+1)(z^2+9)| = |z^2+1| \cdot |z^2+9| \ge \left||z^2| - 1\right| \cdot \left||z^2| - 9\right| = (R^2-1)(R^2-9).$$

Puesto que la longitud $L$ de la semicircunferencia es $\pi R$, se deduce de la desigualdad $ML$, teorema 5.2.3 de la sección 5.2, que

$$|I_2| = \left|\int_{C_R} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}\,dz\right| \le \frac{\pi R}{(R^2-1)(R^2-9)}.$$

Este último resultado demuestra que $|I_2| \to 0$ cuando $R \to \infty$, y así concluimos que $\lim_{R\to\infty} I_2 = 0$. Se deduce de (15) que $\lim_{R\to\infty} I_1 = \pi/12$, es decir,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx = \frac{\pi}{12} \quad \text{o} \quad \text{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx = \frac{\pi}{12}.$$

❑

Debido a que el integrando en el ejemplo 2 es una función par, la existencia del valor principal de Cauchy implica que la integral original converge a $\pi/12$.

Con frecuencia es aburrido tener que demostrar que la integral de contorno a lo largo de $C_R$ tiende a cero cuando $R \to \infty$. En el teorema siguiente se resumen condiciones suficientes para que este comportamiento sea siempre verdadero.

**Teorema 6.6.1 Comportamiento de las integrales cuando $R \to \infty$**

Supongamos que $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ es una función racional, donde el grado de $p(z)$ es $n$ y el grado de $q(z)$ es $m \geq n + 2$. Si $C_R$ es un contorno semicircular $z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, entonces $\int_{C_R} f(z)\,dz \to 0$ cuando $R \to \infty$.

En otras palabras, la integral a lo largo de $C_R$ tiende a cero cuando $R \to \infty$ si el denominador de $f$ es de una potencia de por lo menos 2 más que su numerador. La demostración de este hecho se sigue de la misma forma que en el ejemplo 2. Observe en este ejemplo, que las condiciones establecidas en el teorema 6.6.1 se cumplen, ya que el grado de $p(z) = 1$ es 0 y el grado de $q(z) = (z^2 + 1)(z^2 + 9)$ es 4.

**EJEMPLO 3 V. P. de Cauchy de una integral impropia**

Evalúe el valor principal de Cauchy de $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1}\,dx$.

**Solución** Examinando el integrando vemos que se satisfacen las condiciones dadas en el teorema 6.6.1. Por otra parte, sabemos del ejemplo 3 de la sección 6.5 que $f(z) = 1/(z^4 + 1)$ tiene polos simples en la mitad superior del plano en $z_1 = e^{\pi i/4}$ y $z_2 = e^{3\pi i/4}$. También vimos en el ejemplo, que los residuos en estos polos son

$$\text{Res}(f(z), z_1) = -\frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}i \quad \text{y} \quad \text{Res}(f(z), z_2) = \frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}i.$$

Así, por (14),

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1}\,dx = 2\pi i[\text{Res}(f(z), z_1) + \text{Res}(f(z), z_2)] = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Ya que el integrando es una función par, la integral original converge a $\pi/\sqrt{2}$. ❑

## Integrales de la forma $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x\, dx$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \,\text{sen}\, \alpha x\, dx$

Debido a que las integrales impropias de la forma $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \,\text{sen}\, \alpha x\, dx$ se encuentran en las aplicaciones del análisis de Fourier, con frecuencia se conocen como **integrales de Fourier**. Éstas se presentan como las partes real e imaginaria de la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x}\,dx$.* Usando la fórmula de Euler $e^{i\alpha x} = \cos \alpha x + i \,\text{sen}\, \alpha x$, donde $\alpha$ es un número real positivo, podemos escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\alpha x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \,\text{sen}\, \alpha x\,dx \qquad (16)$$

siempre que ambas integrales del lado derecho converjan. Suponga que $f(x) = p(x)/q(x)$ es una función racional que es continua en $(-\infty, \infty)$. Entonces, ambas integrales de Fourier en (10) se pueden evaluar al mismo tiempo, considerando la integral compleja $\int_C f(z) e^{i\alpha z}\,dz$, donde $\alpha > 0$, y el contorno

*Vea la sección 6.7

$C$ de nuevo consiste del intervalo $[-R, R]$ en el eje real y de un contorno semicircular $C_R$ con radio lo suficiente grande para encerrar los polos de $f(z)$ en el semiplano superior.

Antes de continuar, presentamos, sin demostración, las condiciones suficientes para las que la integral de contorno a lo largo de $C_R$ tienda a cero cuando $R \to \infty$.

**Teorema 6.6.2 Comportamiento de la integral cuando $R \to \infty$**

Suponga que $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ es una función racional, donde el grado de $p(z)$ es $n$ y el grado de $q(z)$ es $m \geq n + 1$. Si $C_R$ es un contorno semicircular $z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, y $\alpha > 0$, entonces $\int_{C_R} f(z)\, e^{i\alpha z}\, dz \to 0$ cuando $R \to \infty$.

**EJEMPLO 4 Uso de la simetría**

Evalúe el valor principal de Cauchy de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 9}\, dx$.

**Solución** Primero observe que los límites de integración en la integral dada no son de $-\infty$ a $\infty$ como lo requiere el método que acabamos de describir. Esto se puede remediar observando que, ya que el integrando es una función par de $x$ (compruebe), podemos escribir

$$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 9}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 9}\, dx. \tag{17}$$

Con $\alpha = 1$ ahora se forma la integral de contorno

$$\oint_C \frac{z}{z^2 + 9}\, e^{iz}\, dz,$$

donde $C$ es el mismo contorno que se muestra en la figura 6.6.2. Por el teorema 6.5.3,

$$\int_{C_R} \frac{z}{z^2 + 9} e^{iz}\, dz + \int_{-R}^R \frac{x}{x^2 + 9} e^{ix}\, dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, 3i),$$

donde $f(z) = z/(z^2 + 9)$, y

$$\operatorname{Res}\left(f(z)e^{iz},\ 3i\right) = \left.\frac{ze^{iz}}{2z}\right|_{z=3i} = \frac{e^{-3}}{2}$$

de (4) de la sección 6.5. Entonces, del teorema 6.6.2 concluimos que $\int_{C_R} f(z)e^{iz}\, dz \to 0$ cuando $R \to \infty$, y así

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{x^2 + 9}\, e^{ix}\, dx = 2\pi i\left(\frac{e^{-3}}{2}\right) = \frac{\pi}{e^3} i.$$

Pero por (16),

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{x^2 + 9}\, e^{ix}\, dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{x \cos x}{x^2 + 9}\, dx + i\int_{-\infty}^\infty \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 9}\, dx = \frac{\pi}{e^3} i.$$

Igualando las partes reales e imaginarias en el último renglón se obtiene el resultado

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^\infty \frac{x \cos x}{x^2 + 9}\, dx = 0 \quad \text{junto con} \quad \text{V.P.} \int_{-\infty}^\infty \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 9}\, dx = \frac{\pi}{e^3}. \tag{18}$$

Por último, considerando el hecho de que el integrando es una función par, obtenemos el valor de la integral indicada:

$$\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+9}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+9}\, dx = \frac{\pi}{2e^3}.$$

❑

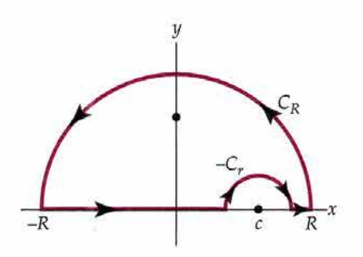


Figura 6.6.3 Contorno dentado

**Contornos dentados** Las integrales impropias de las formas (2) y (3) que hemos considerado hasta el momento, eran continuas en el intervalo $(-\infty, \infty)$. En otras palabras, la función compleja $f(z) = p(z)/q(z)$ no tiene polos sobre el eje real. En la situación en la que $f$ tiene polos sobre el eje real, tenemos que modificar el procedimiento que se muestra en los ejemplos del 2 al 4. Por ejemplo, para evaluar $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ por residuos cuando $f(z)$ tiene un polo en $z = c$, donde $c$ es un número real, se utiliza un **contorno dentado**, como se muestra en la figura 6.6.3. El símbolo $C_r$ denota un contorno semicircular con centro en $z = c$ y orientado en la dirección positiva. El siguiente teorema es importante para este análisis.

**Teorema 6.6.3 Comportamiento de la integral cuando $r \to 0$**

Suponga que $f$ tiene un polo simple $z = c$ en el eje real. Si $C_r$ es el contorno definido por $z = c + re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$, entonces,

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)\, dz = \pi i \operatorname{Res}(f(z), c).$$

**Demostración** Puesto que $f$ tiene un polo simple en $z = c$, su serie de Laurent es

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-c} + g(z),$$

cuando $a_{-1} = \operatorname{Res}\,(f(z), c)$ y $g$ es analítica en el punto $c$. Usando la serie de Laurent y la parametrización de $C_r$ tenemos que

$$\int_{C_r} f(z)\, dz = a_{-1}\int_0^{\pi} \frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}\, d\theta + ir\int_0^{\pi} g(c+re^{i\theta})\, e^{i\theta}\, d\theta = I_1 + I_2. \tag{19}$$

Primero, vemos que

$$I_1 = a_{-1}\int_0^{\pi} i\, d\theta = \pi i a_{-1} = \pi i \operatorname{Res}(f(z), c).$$

A continuación, $g$ es analítica en $c$, por lo que es continua en este punto y acotada en una vecindad del punto, es decir, existe un $M > 0$ para el que $|g(c + re^{i\theta}| \le M$. Por tanto,

$$|I_2| = \left| ir\int_0^{\pi} g(c+re^{i\theta})\, d\theta \right| \le r\int_0^{\pi} M\, d\theta = \pi r M.$$

Por lo que se deduce de esta última desigualdad que $\lim_{r\to 0}|I_2| = 0$ y en consecuencia $\lim_{r\to 0} I_2 = 0$. Tomando el límite de (19) cuando $r \to 0$, el teorema está demostrado. ❑



**EJEMPLO 5 Uso de un contorno dentado**

Evalúe el valor principal de Cauchy de $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(x^2 - 2x + 2)}\, dx.$

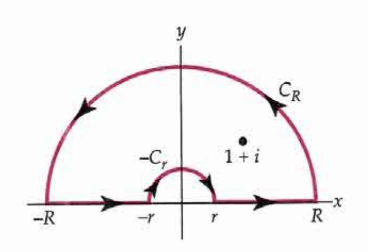



Figura 6.6.4 Contorno dentado para el ejemplo 5.

**Solución** Puesto que la integral es del tipo dado en (3), consideramos la integral de contorno

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z(z^2 - 2z + 2)}\, dz.$$

La función $f(z) = 1/z(z^2 - 2z + 2)$ tiene un polo en $z = 0$ y en $z = 1 + i$ en el semiplano superior. El contorno $C$, que se muestra en la figura 6.6.4, está dentado en el origen. Adoptando una notación condensada obvia, tenemos

$$\oint_C = \int_{C_R} + \int_{-R}^{-r} + \int_{-C_r} + \int_r^R = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, 1 + i), \qquad (20)$$

donde $\int_{-C_r} = -\int_{C_r}$. Si tomamos los límites de (20) cuando $R \to \infty$ y cuando $r \to 0$, se deduce de los teoremas 6.6.2 y 6.6.3 que

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2 - 2x + 2)}\, dx - \pi i \operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, 0) = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, 1 + i).$$

Ahora,

$$\operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, 0) = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, 1 + i) = -\frac{e^{-1+i}}{4}(1 + i).$$

Por tanto,

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2 - 2x + 2)}\, dx = \pi i\left(\frac{1}{2}\right) + 2\pi i\left(-\frac{e^{-1+i}}{4}(1 + i)\right).$$

Usando $e^{-1+i} = e^{-1}(\cos 1 + i \operatorname{sen} 1)$, simplificando y después igualando las partes reales e imaginarias, se obtiene a partir de la última igualdad

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x(x^2 - 2x + 2)}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-1}(\operatorname{sen} 1 + \cos 1)$$

y

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(x^2 - 2x + 2)}\, dx = \frac{\pi}{2}[1 + e^{-1}(\operatorname{sen} 1 - \cos 1)]. \quad \square$$

## 6.6.3 Integración a lo largo de un corte de rama

**Punto de ramificación en $z = 0$** En el análisis siguiente se examinan las integrales de la forma $\int_0^{\infty} f(x)\, dx$, donde el integrando $f(x)$ es algebraico. Sin embargo, similar al ejemplo 5, estas integrales requieren un tipo especial de contorno, porque cuando $f(x)$ se convierte en una función compleja, el integrando resultante $f(z)$ tiene, además de polos, una singularidad no aislada en $z = 0$. Antes de continuar, se le pide al lector que revise el análisis acerca de cortes de rama de las secciones 2.6 y 4.1.

En el ejemplo que sigue se considera un caso especial de la integral real

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}\,dx, \tag{21}$$

donde $\alpha$ es una constante real restringida al intervalo $0 < \alpha < 1$. Observe que cuando $\alpha = \frac{1}{2}$ y $x$ se sustituye por $z$, el integrando de (12) se convierte en la función multivaluada

$$\frac{1}{z^{1/2}(z+1)}. \tag{22}$$

El origen es un punto rama de (22) ya que $z^{1/2}$ tiene dos valores para cualquier $z \neq 0$. Si imaginamos que se viaja en una circunferencia completa alrededor del origen $z = 0$, a partir de un punto $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, se regresa al mismo punto de partida $z$, pero $\theta$ se ha incrementado en $2\pi$. En consecuencia, el valor de $z^{1/2}$ cambia de $z^{1/2} = \sqrt{r}\,e^{i\theta/2}$ a un valor diferente o rama diferente:

$$z^{1/2} = \sqrt{r}\,e^{i(\theta+2\pi)/2} = \sqrt{r}\,e^{i\theta/2}e^{i\pi} = -\sqrt{r}\,e^{i\theta/2}.$$

Recuerde, podemos forzar a $z^{1/2}$ a tener un solo valor restringiendo a $\theta$ a algún intervalo de longitud $2\pi$. Por (22), si elegimos el eje positivo $x$ como un corte de rama, es decir, restringiendo a $\theta$ a $0 < \theta < 2\pi$, entonces garantizamos que $z^{1/2} = \sqrt{r}\,e^{i\theta/2}$ es univaluada. Vea la página 114.

## EJEMPLO 6 Integración a lo largo de un corte de rama

Evalúe $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx.$

**Solución** Primero observe que la integral real es impropia por dos razones. Observe una discontinuidad infinita en $x = 0$ y el límite infinito de integración. Además, se pueden argumentar los hechos de que el integrando se comporta como $x^{-1/2}$ cerca del origen y es igual a $x^{-3/2}$ cuando $x \to \infty$, por lo que la integral converge.

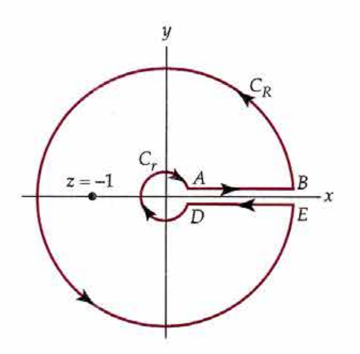


Figura 6.6.5 Contorno para el ejemplo 6

Formamos la integral $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z^{1/2}(z+1)}\,dz$, donde $C$ es el contorno cerrado que se muestra en la figura 6.6.5 que consta de cuatro componentes: $C_r$ y $C_R$ son partes de circunferencias, y $AB$ y $ED$ son segmentos horizontales de rectas paralelas que recorre los lados opuestos del corte de rama. El integrando $f(z)$ de la integral de contorno es univaluada y analítica en y dentro de $C$, a excepción del polo simple en $z = -1 = e^{\pi i}$. Por tanto, podemos escribir

$$\oint_C \frac{1}{z^{1/2}(z+1)}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), -1)$$

o

$$\int_{C_R} + \int_{ED} + \int_{C_r} + \int_{AB} = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), -1). \tag{23}$$

A pesar de lo que se muestra en la figura 6.6.5, es admisible pensar que los segmentos de recta $AB$ y $ED$ realmente se encuentran sobre el eje real positivo, más precisamente, $AB$ coincide con la *parte superior* del eje real positivo para el cual $\theta = 0$ y $ED$ coincide con la *parte inferior* del eje real positivo para el que $\theta = 2\pi$. Sobre $AB$, $z = xe^{0i}$, y sobre $ED$, $z = xe^{(0+2\pi)i} = xe^{2\pi i}$ por lo que

$$\int_{ED} = \int_R^r \frac{(xe^{2\pi i})^{-1/2}}{xe^{2\pi i}+1}\,(e^{2\pi i}dx) = -\int_R^r \frac{x^{-1/2}}{x+1}\,dx = \int_r^R \frac{x^{-1/2}}{x+1}\,dx \tag{24}$$

y
$$\int_{AB} = \int_r^R \frac{(xe^{0i})^{-1/2}}{xe^{0i}+1}(e^{0i}dx) = \int_r^R \frac{x^{-1/2}}{x+1}\,dx. \tag{25}$$

Ahora, con $z = re^{i\theta}$ y $z = Re^{i\theta}$ sobre $C_r$ y $C_R$, respectivamente, se puede demostrar, mediante un análisis similar al dado en el ejemplo 2 y en la demostración del teorema 6.6.1, que $\int_{C_r} \to 0$ cuando $r \to 0$ y $\int_{C_R} \to 0$ cuando $R \to \infty$. Así, de (23), (24), y (25) vemos que

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}}\left[\int_{C_R} + \int_{ED} + \int_{C_r} + \int_{AB} = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), -1)\right]$$

es igual que

$$2\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), -1). \tag{26}$$

Por último, de (4) de la sección 6.5,

$$\operatorname{Res}(f(z), -1) = z^{-1/2}\Big|_{z=e^{\pi i}} = e^{-\pi i/2} = -i$$

y así de (26) se obtiene el resultado

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx = \pi.$$ ❑

## 6.6.4 Teorema de Rouché y el argumento principal

**Argumento principal** A diferencia del análisis anterior en el que la atención se centró en la evaluación de integrales reales, a continuación aplicaremos la teoría de residuos a la ubicación de los ceros de una función analítica. Para abordar ese tema, primero debemos considerar dos teoremas que son importantes por derecho propio.

En el primer teorema tenemos que contar el número de ceros y polos de una función $f$ que se encuentran dentro de un contorno cerrado $C$ simple, en este conteo se incluye el orden o multiplicidad de cada cero y polo. Por ejemplo, si

$$f(z) = \frac{(z-1)(z-9)^4(z+i)^2}{(z^2-2z+2)^2(z-i)^6(z+6i)^7} \tag{27}$$

y $C$ se considera como la circunferencia $|z| = 2$, entonces se examina el numerador de $f$, lo que indica que los ceros dentro de $C$ son $z = 1$ (un cero simple) y $z = -i$ (un cero de orden o multiplicidad 2) . Por tanto, el número de ceros $N_0$ dentro de $C$ es de $N_0 = 1 + 2 = 3$. Del mismo modo, el examen del denominador de $f$ muestra, después de factorizar $z^2 - 2z + 2$, que los polos que están dentro de $C$ son $z = 1 - i$ (polo de orden 2), $z = 1 + i$ (polo de orden 2), y $z = i$ (polo de orden 6). El número $N_p$ de polos dentro de $C$ se toma como $N_p = 2 + 2 + 6 = 10$.

**Teorema 6.6.4 Argumento principal**

Sea $C$ un contorno cerrado simple situado totalmente dentro de un dominio D. Suponga que $f$ es analítica en $D$, excepto en un número finito de polos dentro de $C$, y que $f(z) \neq 0$ en C. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N_0 - N_p, \tag{28}$$

donde $N_0$ es el número total de ceros de $f$ dentro de $C$ y $N_p$ es el número total de polos de $f$ en el interior de $C$. La determinación de $N_0$ y $N_p$, ceros y polos se cuentan en función de su orden o multiplicidades.

**Demostración** Comenzamos con un recordatorio de que cuando usamos el $\oint_C$ para el símbolo de un contorno, significa que estamos integrando en la dirección positiva alrededor de la curva cerrada $C$.

El integrando $f'(z)/f(z)$ en (28) es analítica en y sobre el contorno $C$, excepto en los puntos en el interior de $C$, donde $f$ tiene un cero o un polo. Si $z_0$ es un cero de orden $n$ de $f$ dentro de $C$, entonces, por (5) de la sección 6.4, podemos escribir $f(z) = (z - z_0)^n \phi(z)$, donde $\phi$ es analítica en $z_0$ y $\phi(z_0) \neq 0$. Derivamos $f$ con la regla del producto,

$$f'(z) = (z - z_0)^n \phi'(z) + n(z - z_0)^{n-1}\phi(z),$$

y se divide esta expresión entre $f$. En algunos discos perforados con centro en $z_0$, tenemos

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{(z - z_0)^n \phi'(z) + n(z - z_0)^{n-1}\phi(z)}{(z - z_0)^n \phi(z)} = \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} + \frac{n}{z - z_0}. \tag{29}$$

El resultado en (29) muestra que el integrando $f'(z)/f(z)$ tiene un polo simple en $z_0$ y el residuo en ese punto es

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, z_0\right) &= \lim_{z \to z_0} (z - z_0)\left[\frac{\phi'(z)}{\phi(z)} + \frac{n}{z - z_0}\right] \\ &= \lim_{z \to z_0}\left[(z - z_0)\frac{\phi'(z)}{\phi(z)} + n\right] = 0 + n = n,\end{aligned} \tag{30}$$

que es el orden del cero $z_0$.

Ahora bien, si $z_p$ es un polo de orden $m$ de $f$ dentro de $C$, entonces por (7) de la sección 6.4, podemos escribir $f(z) = g(z)/(z - z_p)^m$, donde $g$ es analítica en $z_p$ y $g(z_p) \neq 0$. Derivando, en este caso $f(z) = (z - z_p)^{-m} g(z)$, tenemos

$$f'(z) = (z - z_p)^{-m} g'(z) - m(z - z_p)^{-m-1} g(z).$$

Por tanto, en algún disco perforado con centro en $z_p$,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{(z - z_p)^{-m} g'(z) - m(z - z_p)^{-m-1} g(z)}{(z - z_p)^{-m} g(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \frac{-m}{z - z_p}. \tag{31}$$

Vemos de (31) que el integrando $f'(z)/f(z)$ tiene un polo simple en $z_p$. Procediendo como en (30), también vemos que el residuo en $z_p$ es igual a $-m$, que es el negativo del orden del polo de $f$.

Por último, supongamos que $z_{0_1}, z_{0_2}, \ldots, z_{0_r}$ y $z_{p_1}, z_{p_2}, \ldots, z_{p_s}$ son los ceros y polos de $f$ en $C$ y supongamos, además, que el orden de los ceros son $n_1, n_2, \ldots, n_r$ y que el orden de los polos son $m_1, m_2, \ldots, m_s$. Entonces cada uno de estos puntos es un polo simple del integrando $f'(z)/f(z)$ con los residuos correspondientes $n_1, n_2, \ldots, n_r$ y $-m_1, -m_2, \ldots, -m_s$. Se deduce del teorema del residuo (teorema 6.5.3) que $\oint_C [f'(z)/f(z)]\,dz$ es igual a $2\pi i$ veces la suma de los residuos en los polos:

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz &= 2\pi i\left[\sum_{k=1}^{r} \operatorname{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, z_{0_k}\right) + \sum_{k=1}^{s} \operatorname{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, z_{p_k}\right)\right] \\ &= 2\pi i\left[\sum_{k=1}^{r} n_k + \sum_{k=1}^{s} (-m_k)\right] = 2\pi i[N_0 - N_p].\end{aligned}$$

Dividiendo entre $2\pi i$ se establece (28). ❑

Para ilustrar el teorema 6.6.4, supongamos que el contorno cerrado simple es $|z| = 2$ y la función $f$ es la dada en (27). El resultado en (28) indica que en la evaluación de $\oint_C [f'(z)/f(z)]dz$, cada cero de $f$ dentro de $C$ contribuye $2\pi i$ veces el orden de multiplicidad del cero y cada polo contribuye $2\pi i$ veces el negativo del orden del polo:

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \overbrace{[2\pi i(1) + 2\pi i(2)]}^{\substack{\text{contribución} \\ \text{de ceros de } f}} + \overbrace{[2\pi i(-2) + 2\pi i(-2) + 2\pi i(-6)]}^{\substack{\text{contribución} \\ \text{de polos de } f}} = -14\pi i.$$

**¿Por qué el nombre?** ¿Por qué el teorema 6.6.4 se llama *argumento principal*? Esta pregunta se le puede haber ocurrido a usted, ya que no se hace referencia en la demostración del teorema a los argumentos de cantidades complejas. Pero en realidad hay una relación entre el número $N_0 - N_p$ en el teorema 6.6.4 y $\arg(f(z))$. Más precisamente,

$$N_0 - N_p = \frac{1}{2\pi}\,[\text{cambio en } \arg(f(z)) \text{ cuando } z \text{ recorre } c \text{ una vez en sentido positivo}].$$

Este principio se puede comprobar fácilmente usando la función simple $f(z) = z^2$ y la circunferencia unitaria $|z| = 1$ como el contorno cerrado simple $C$ en el plano $z$. Dado que la función $f$ tiene un cero de multiplicidad 2 en $C$ y no tiene polos, tenemos $N_0 - N_p = 2$. Ahora, si $C$ se parametriza con $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, entonces su imagen $C'$ en el plano $w$ bajo el mapeo $w = z^2$ es $w = e^{i2\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, que es la circunferencia unitaria $|w| = 1$. Como $z$ recorre una vez $C$ a partir de $z = 1$ $(\theta = 0)$ y termina en $z = 1$ $(\theta = 2\pi)$, vemos que $\arg(f(z)) = \arg(w) = 2\theta$ aumenta de 0 a $4\pi$. Dicho de otra manera, $w$ atraviesa o se *enrolla* alrededor de la circunferencia $|w| = 1$ dos veces. Por tanto,

$$\frac{1}{2\pi} = [\text{cambio en arg } (f(z)) \text{ cuando } z \text{ recorre una vez } C \text{ en la dirección positiva}] = \frac{1}{2\pi}[4\pi - 0] = 2.$$

**Teorema de Rouché** El próximo resultado es una consecuencia del argumento principal. El teorema es útil para determinar el número de ceros de una función analítica.

**Teorema 6.6.5 Teorema de Rouché**

Sea $C$ un contorno cerrado simple situado totalmente dentro de un dominio $D$. Suponga que $f$ y $g$ son analíticas en $D$. Si la desigualdad estricta $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ vale para toda $z$ en $C$, entonces $f$ y $g$ tienen el mismo número de ceros (contados de acuerdo con su orden o multiplicidad) dentro de C.

**Demostración** Comenzamos con la observación de que la hipótesis de la "desigualdad estricta $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ vale para toda $z$ en $C$" indica que tanto $f$ como $g$ no tiene ceros en el contorno $C$. De $|f(z) - g(z)| = |g(z) - f(z)|$, vemos que al dividir entre la desigualdad $|f(z)|$ tenemos que, para toda $z$ en $C$,

$$|F(z) - 1| < 1, \tag{32}$$

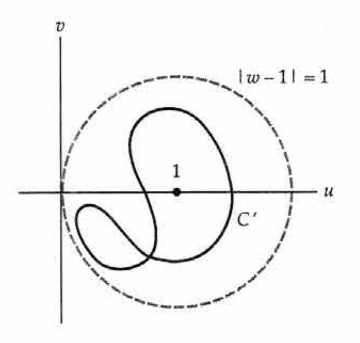



Figura 6.6.6 La imagen de $C$ está dentro del disco $|w - 1| < 1$.

donde $F(z) = g(z)/f(z)$. La desigualdad en (32) muestra que la imagen $C'$ en el plano $w$ de la curva $C$ bajo el mapeo $w = F(z)$ es una trayectoria cerrada y deben encontrarse dentro del disco abierto unitario $|w - 1| < 1$ centrado en $w = 1$. Vea la figura 6.6.6. Como consecuencia, la curva $C'$ no encierra a $w = 0$, por lo que $1/w$ es analítica sobre y en $C'$. Por el teorema de Cauchy-Goursat,

$$\int_{C'} \frac{1}{w}\,dw = 0 \qquad \text{o} \qquad \oint_C \frac{F'(z)}{F(z)}\,dz = 0, \tag{33}$$

ya que $w = F(z)$ y $dw = F'(z)\,dz$. De la regla del cociente,

$$F'(z) = \frac{f(z)g'(z) - g(z)f'(z)}{[f(z)]^2},$$

obtenemos
$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Entonces utilizando la última expresión en la segunda integral en (33) se obtiene

$$\oint_C \left[\frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)}\right] dz = 0 \qquad \text{o} \qquad \oint_C \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz = \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

Se deduce de (28) del teorema 6.6.4, con $N_p = 0$, que el número de ceros de $g$ dentro de $C$ es igual que el número de ceros de $f$ en el interior de $C$. ❑

## EJEMPLO 7 Localización de raíces

Localizar las raíces de la función polinomial $g(z) = z^9 - 8z^2 + 5$.

**Solución** Comenzamos eligiendo $f(z) = z^9$ porque tienen el mismo número de ceros que $g$. Puesto que $f$ tiene un cero de orden 9, en el origen $z = 0$, comenzamos nuestra búsqueda de los ceros de $g$ examinando circunferencias con centro en $z = 0$. En otras palabras, *si* podemos establecer que $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ para toda $z$ en *algunas* circunferencias $|z| = R$, entonces el teorema 6.6.5 establece que $f$ y $g$ tienen el mismo número de ceros en el disco $|z| < R$. Ahora por la desigualdad del triángulo (9) de la sección 1.2,

$$|f(z) - g(z)| = |z^9 - (z^9 - 8z^2 + 5)| = |8z^2 - 5| \leq 8|z|^2 + 5.$$

Además, $|f(z)| = |z|^9$. Observe que $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ o $8|z|^2 + 5 < |z|^9$ *no* es cierta para todos los puntos de la circunferencia $|z| = 1$, por lo que no podemos sacar alguna conclusión. Sin embargo, al ampliar la búsqueda a una circunferencia más grande $|z| = \frac{3}{2}$ vemos

$$|f(z) - g(z)| \leq 8|z|^2 + 5 = 8\left(\tfrac{3}{2}\right)^2 + 5 = 23 < \left(\tfrac{3}{2}\right)^9 = |f(z)| \tag{34}$$

ya que $\left(\frac{3}{2}\right)^9 \approx 38.44$. Concluimos de (34) que debido a que $f$ tiene un cero de orden adentro del disco $|z| < \frac{3}{2}$, todos los nueve ceros de $g$ se encuentran dentro del mismo disco. ❑

Por un razonamiento un poco más sutil, podemos demostrar que la función $g$ en el ejemplo 7 tiene *algunos* ceros en el interior del disco unitario $|z| < 1$. Para ver esto supongamos que elegimos $f(z) = -8z^2 + 5$. Entonces, para toda $z$ en $|z| = 1$,

$$|f(z) - g(z)| = |(-8z^2 + 5) - (z^9 - 8z^2 + 5)| = |-z^9| = |z|^9 = (1)^9 = 1. \tag{35}$$

Pero a partir de (10) de la sección 1.2 tenemos, que para todo $z$ sobre $|z| = 1$,

$$|f(z)| = |-f(z)| = |8z^2 - 5| \geq \left|8|z|^2 - |5|\right| = |8 - 5| = 3. \tag{36}$$

Los valores en (35) y (36) muestran, para todo $z$ sobre $|z| = 1$, que $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$. Debido a que $f$ tiene dos ceros en $|z| < 1$ (a saber, $\pm\sqrt{\frac{5}{8}} \approx \pm 0.79$), podemos concluir del teorema 6.6.5 que dos ceros de $g$ también se encuentran dentro de este disco.

Podemos seguir el razonamiento del párrafo anterior. Supongamos ahora que elegimos $f(z) = 5$ y $|z| = \frac{1}{2}$. Entonces, para todo $z$ sobre $|z| = \frac{1}{2}$,

$$|f(z) - g(z)| = |5 - (z^9 - 8z^2 + 5)| = |-z^9 + 8z^2| \leq |z|^9 + 8|z|^2 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^9 + 2 \approx 2.002.$$

Ahora tenemos que $|f(z) - g(z)| < |f(z)| = 5$ para toda $z$ sobre $|z| = \frac{1}{2}$. Puesto que $f$ no tiene ceros dentro del disco $|z| < \frac{1}{2}$, tampoco $g$. En este punto podemos concluir que todos los nueve ceros de $g(z) = z^9 - 8z^2 + 5$ se encuentran dentro de la región anular $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$; dos de estos ceros se encuentran dentro de $\frac{1}{2} < |z| < 1$.

## 6.6.5 Suma de series infinitas

**Uso de cot $\pi z$** En algunas circunstancias especializadas, los residuos en los polos simples de la función trigonométrica cot $\pi z$ nos permitirán encontrar la suma de una serie infinita.

En la sección 4.3 vimos que los ceros de sen $z$ son los números reales $z = k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ . Así pues, la función cot $\pi z$ tiene polos simples en los ceros de sen $\pi z$, que son $\pi z = k\pi$ o $z = k$, $k = 0, \pm 1, \pm2, \ldots$ . Si una función polinomial $p(z)$ tiene (*i*) coeficientes reales, (*ii*) grado $n \geq 2$, y (*iii*) sin ceros *enteros*, entonces la función

$$f(z) = \frac{\pi \cot \pi z}{p(z)} \tag{37}$$

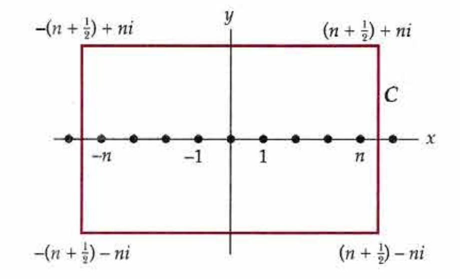



**Figura 6.6.7** Contorno rectangular $C$ encerrando los polos de (37)

tiene un número infinito de polos simples $z = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ de cot $\pi z$ y un número finito de polos $z_{p_1}, z_{p_2}, \cdots, z_{p_r}$ de los ceros de $p(z)$. El contorno cerrado rectangular $C$ que se muestra en la figura 6.6.7 tiene vértices $(n + \frac{1}{2}) + ni$, $-(n + \frac{1}{2}) + ni$, $-(n + \frac{1}{2}) - ni$ y $(n + \frac{1}{2}) - ni$, donde $n$ se toma suficientemente grande para que $C$ encierra los polos simples $z = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm n$ y *todos* los polos $z_{p1}, z_{p2}, \ldots, z_{pr}$. Por el teorema del residuo,

$$\oint_C \frac{\pi \cot \pi z}{p(z)}\, dz = 2\pi i \left[ \sum_{k=-n}^{n} \text{Res}\left(\frac{\pi \cot \pi z}{p(z)}, k\right) + \sum_{j=1}^{r} \text{Res}\left(\frac{\pi \cot \pi z}{p(z)}, z_{p_j}\right) \right]. \tag{38}$$

De una manera similar a la utilizada varias veces en el análisis de la subsección 6.6.2, se puede demostrar que $\oint_C \pi \cot \pi z\, dz / p(z) \to 0$ cuando $n \to \infty$ y así (38) se convierte en $0 = \sum_k$ residuos $+ \sum_j$ residuos. Es decir,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Res}\left(\frac{\pi \cot \pi z}{p(z)}, k\right) = -\sum_{j=1}^{r} \text{Res}\left(\frac{\pi \cot \pi z}{p(z)}, z_{p_j}\right). \tag{39}$$

Ahora, de (4) de la sección 6.5 (con las identificaciones $g(z) = \pi \cos \pi z/p(z)$, $h(z) = \operatorname{sen} \pi z$, $h'(z) = \pi \cos \pi z$), es una tarea sencilla calcular los residuos en los polos simples $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ :

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\pi \cot \pi z}{p(z)},\ k\right) = \frac{\pi \cos k\pi/p(k)}{\pi \cos k\pi} = \frac{1}{p(k)}. \tag{40}$$

Combinando (40) y (39) llegamos a nuestro resultado deseado

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{p(k)} = -\sum_{j=1}^{r} \operatorname{Res}\left(\frac{\pi \cot \pi z}{p(z)},\ z_{p_j}\right). \tag{41}$$

**Uso de csc $\pi z$** Existen varias fórmulas para la suma similares a la (41). Si $p(z)$ es una función polinomial que satisface las mismas suposiciones (*i*) – (*iii*) dadas anteriormente, la función

$$f(z) = \frac{\pi \csc \pi z}{p(z)} \tag{42}$$

tiene un número infinito de polos simples $z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ de csc $\pi z$ y un número finito de polos $z_{p1}, z_{p2}, \ldots, z_{pr}$ de los ceros de $p(z)$. En este caso se puede demostrar que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{p(k)} = -\sum_{j=1}^{r} \operatorname{Res}\left(\frac{\pi \csc \pi z}{p(z)},\ z_{p_j}\right). \tag{43}$$

En nuestro último ejemplo se muestra cómo utilizar el resultado de (41) para encontrar la suma de una serie infinita.

---

**EJEMPLO 8 Suma de una serie infinita**

Encuentre la suma de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+4}$.

**Solución** Observe que si identificamos $p(z) = z^2 + 4$, entonces las tres suposiciones (*i*) a (*iii*) anteriores a (37) son válidas. Los ceros de $p(z)$ son $\pm 2i$ y corresponden a los polos simples de $f(z) = \pi \cot \pi z/(z^2 + 4)$. De acuerdo con la fórmula en (41),

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+4} = -\left[\operatorname{Res}\left(\frac{\pi \cot \pi z}{z^2+4}, -2i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{\pi \cot \pi z}{z^2+4}, 2i\right)\right]. \tag{44}$$

Ahora de nuevo por (4) de la sección 6.5 tenemos

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\pi \cot \pi z}{z^2+4}, -2i\right) = \frac{\pi \cot 2\pi i}{4i} \quad \text{y} \quad \operatorname{Res}\left(\frac{\pi \cot \pi z}{z^2+4}, 2i\right) = \frac{\pi \cot 2\pi i}{4i}.$$

La suma de los residuos es $(\pi/2i) \cot 2\pi i$. Esta suma es una cantidad real porque a partir de (27) de la sección 4.3:

$$\frac{\pi}{2i} \cot 2\pi i = \frac{\pi}{2i} \frac{\cosh(-2\pi)}{(-i \operatorname{senh}(-2\pi))} = -\frac{\pi}{2} \coth 2\pi.$$

Por tanto (44) se convierte en

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+4} = \frac{\pi}{2}\coth 2\pi. \tag{45}$$

Este no es el resultado deseado. Por esto debemos manejar la suma $\sum_{k=-\infty}^{\infty}$ para ponerlo en la forma $\sum_{k=0}^{\infty}$. Observe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+4} = \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{1}{k^2+4} + \overbrace{\frac{1}{4}}^{\substack{k=0\\ \text{término}}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+4}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(-k)^2+4} + \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+4}$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+4} + \frac{1}{4} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+4} - \frac{1}{4}. \tag{46}$$

Por último, se obtiene la suma de la serie original combinando (45) con (46),

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+4} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+4} - \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}\coth 2\pi,$$

y resolviendo para $\sum_{k=0}^{\infty}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+4} = \frac{1}{8} + \frac{\pi}{4}\coth 2\pi. \tag{47}$$

Con la ayuda de una calculadora, encontramos que el lado derecho de (47) es de aproximadamente 0.9104. ❑

## EJERCICIOS 6.6

*Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-18.*

### 6.6.1 Evaluación de integrales reales trigonométricas

En los problemas 1 a 12 evalúe la integral trigonométrica dada.

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+0.5\operatorname{sen}\theta}\,d\theta$

2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{10-6\cos\theta}\,d\theta$

3. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{3+\operatorname{sen}\theta}\,d\theta$

4. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+3\cos^2\theta}\,d\theta$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{2-\cos\theta}\,d\theta$ [*Sugerencia*: Sea $t = 2\pi - \theta$.]

6. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta$

7. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{5+4\cos\theta}\,d\theta$

8. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{3-\operatorname{sen}\theta}\,d\theta$

9. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5-4\cos\theta}\,d\theta$

10. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\theta+2\operatorname{sen}\theta+3}\,d\theta$

11. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{2+\operatorname{sen}\theta}\,d\theta$

12. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}\,d\theta$

En los problemas 13 y 14 establezca el resultado general dado. Utilice el problema 13 para comprobar la respuesta en el ejemplo 1. Utilice el problema 14 para comprobar la respuesta del problema 7.

13. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2}\,d\theta = \frac{a\pi}{(\sqrt{a^2-1})^3},\ a>1$

14. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{a+b\cos\theta}\,d\theta = \frac{2\pi}{b^2}\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right),\ a>b>0$

## 6.6.2 Evaluación de integrales reales impropias

En los problemas 15 a 26 evalúe el valor principal de Cauchy de la integral impropia dada,

15. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx$

16. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-6x+25}\,dx$

17. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4)^2}\,dx$

18. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$

19. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx$

20. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4)^3}\,dx$

21. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}\,dx$

22. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2(x^2+9)}\,dx$

23. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$

24. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^6+1}\,dx$

25. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{x^6+1}\,dx$

26. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+2x+2)(x^2+1)^2}\,dx$

En los problemas 27 a 38 evalúe el valor principal de Cauchy de la integral impropia dada,

27. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx$

28. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+1}\,dx$

29. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\operatorname{sen} x}{x^2+1}\,dx$

30. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+4)^2}\,dx$

31. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2+1)^2}\,dx$

32. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+4x+5}\,dx$

33. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^4+1}\,dx$

34. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x\operatorname{sen} x}{x^4+1}\,dx$

35. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx$

36. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x\operatorname{sen} x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$

37. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x+i}\,dx$ [*Sugerencia*: Primero sustituya sen $x = (e^{ix}-e^{-ix})/2i$, $x$ real.]

38. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x + x\operatorname{sen} x}{x^2+1}\,dx$ [*Sugerencia*: Considere $e^{iz}/(z-i)$.]

En los problemas 39 a 42 utilice un contorno dentado y residuos para determinar el valor principal de Cauchy de la integral impropia dada

39. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \pi$

40. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(x^2+1)}\,dx = \pi(1-e^{-1})$

41. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$

42. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-3x+2}\,dx = \pi[\operatorname{sen}1 - 2\operatorname{sen}2]$

### 6.6.3 Integración a lo largo de un corte de rama

En los problemas 43 a 46 proceda como en el ejemplo 6 para establecer el valor principal de Cauchy de la integral impropia dada.

**43.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x^2+1)}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

**44.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)(x+4)}\,dx = \frac{\pi}{3}$

**45.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$

**46.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{1/3}}{(x+1)^2}\,dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

En los problemas 47 y 48 determine el valor principal de Cauchy de la integral impropia dada. Use el problema 47 para comprobar la respuesta en el ejemplo 6. Use el problema 48 para comprobar la respuesta del problema 45.

**47.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}\,dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\alpha\pi},\ 0<\alpha<1,$

**48.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi(1-\alpha)}{4\cos(\alpha\pi/2)},\ -1<\alpha<3,\ \alpha\neq 1$

## Miscelánea de integrales reales

**49.** Utilice el contorno $C$ que se muestra en la figura 6.6.8 para demostrar que

$$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^{x}}\,dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\alpha\pi},\quad 0<\alpha<1.$$

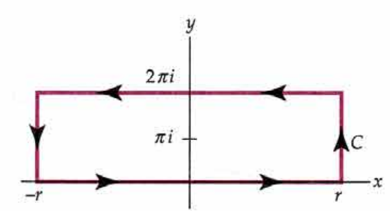



Figura 6.6.8 Figura para el problema 49

**50.** El resultado de la integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ se puede establecer usando cálculo elemental y coordenadas polares. Use este resultado, la integral de contorno $\oint_C e^{-z^2} e^{i\alpha z}\,dz$, y el contorno $C$ que se muestra en la figura 6.6.9, para demostrar que

$$\text{V.P.}\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos\alpha x\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\alpha^2/4}.$$

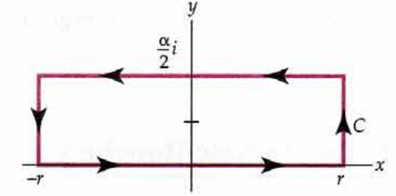



Figura 6.6.9 Figura para el problema 50

**51.** Analice la forma de evaluar el valor principal de Cauchy de

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{x-1}\,dx,\quad 0<\alpha<1.$$

Lleve a cabo sus ideas.

**52.** (**a**) Utilice una calculadora gráfica o un equipo de graficación para trazar en los mismos ejes coordenados las gráficas de sen $\theta$ y $2\theta/\pi$ en el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Explique en términos gráficos la validez de la desigualdad sen $\theta \geq 2\theta/\pi$ en el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Utilice esta desigualdad para demostrar que para $R > 0$,

$$\int_0^{\pi/2} e^{-R \operatorname{sen} \theta}\, d\theta < \frac{\pi}{2R}.$$

(**b**) Explique cómo el resultado del inciso (**a**) nos lleva a concluir que para $R > 0$,

$$\int_0^{\pi} e^{-R \operatorname{sen} \theta}\, d\theta < \frac{\pi}{R}. \tag{48}$$

El resultado en (48) se conoce como la **desigualdad de Jordan**, que con frecuencia es útil en la evaluación de integrales de la forma $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x\, dx$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen} \alpha x\, dx$.

**53.** Reconsidere la integral en el problema 39 junto con el contorno dentado de la figura 6.6.4. Use la desigualdad de Jordan del problema 52 para demostrar que $\int_{C_R} \to 0$ cuando $R \to \infty$.

**54.** Investigue la integral $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a - \operatorname{sen} \theta}\, d\theta$, $|a| \leq 1$, a la luz del procedimiento de evaluación descrito en la subsección 6.6.1.

**55.** Use la fórmula de Euler como punto de partida en la evaluación de la integral

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta}[\cos(\operatorname{sen} \theta - n\theta) + i \operatorname{sen}(\operatorname{sen} \theta - n\theta)]\, d\theta,\ n = 0, 1, 2, \ldots .$$

**56.** De su trabajo en el problema 55, distinga los valores de las integrales reales

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(\operatorname{sen} \theta - n\theta)\, d\theta \quad \text{y} \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \operatorname{sen}(\operatorname{sen} \theta - n\theta)\, d\theta.$$

**57.** Suponga que una función real $f$ es continua en el intervalo $[a, b]$, excepto en un punto $c$ del intervalo. Entonces, el **valor principal** de la integral se define por

$$\text{V.P.} \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[ \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\, dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\, dx \right],\ \varepsilon > 0.$$

Calcule el valor principal de $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x - 1}\, dx$.

**58.** Determine si la integral converge en el problema 57.

## 6.6.4 Teorema de Rouché y argumento principal

En los problemas 59 y 60, utilice el argumento principal en (28) del teorema 6.6.4 para evaluar la integral $\displaystyle\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$ de la función dada $f$ y el contorno cerrado $C$.

**59.** $f(z) = z^6 - 2iz^4 + (5 - i)z^2 + 10$, $C$ encierra todos los ceros de $f$.

**60.** $f(z) = \dfrac{(z - 3iz - 2)^2}{z(z^2 - 2z + 2)^5}$, $C$ es $|z| = \frac{3}{2}$

En los problemas 61 a 64 utilice el argumento principal en (28) del teorema 6.6.4 para evaluar la integral en el contorno cerrado $C$ indicado. Tendrá que identificar $f(z)$ y $f'(z)$.

**61.** $\oint_C \frac{2z+1}{z^2+z}\,dz$, $C$ es $|z| = 2$ **62.** $\oint_C \frac{z}{z^2+4}\,dz$, $C$ es $|z| = 3$

**63.** $\oint_C \cot z\,dz$, $C$ es el contorno rectangular con vértices en $10 + i$, $-4 + i$, $-4 - i$, y $10 - i$.

**64.** $\oint_C \tan \pi z\,dz$, $C$ es $|z - 1| = 2$

**65.** Utilice el teorema de Rouché (teorema 6.6.5) para demostrar que los siete ceros de $g(z) = z^7 + 10z^3 + 14$ se encuentran dentro de la región anular $1 < |z| < 2$.

**66.** **(a)** Utilice el teorema de Rouché (teorema 6.6.5) para demostrar que los cuatro ceros de $g(z) = 4z^4 + 2(1 - i)z + 1$ se encuentran dentro del disco $|z| < 1$.

**(b)** Demostrar que tres de los ceros de la función $g$ en el inciso (a) se encuentran dentro de la región anular $\frac{1}{2} < |z| < 1$.

**67.** En la demostración del teorema 6.6.5, explique cómo la hipótesis de que la desigualdad estricta $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ que vale para toda $z$ sobre $C$ implica que $f$ y $g$ no pueden tener ceros sobre $C$.

## 6.6.5 Suma de series infinitas

**68.** **(a)** Utilice el procedimiento que se muestra en el ejemplo 8 para obtener el resultado general

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a} \coth a\pi.$$

**(b)** Utilice el inciso (a) para comprobar (47) cuando $a = 2$.

**(c)** Encuentre la suma de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1}$.

En los problemas 69 y 70, use (41) para determinar la suma de la serie dada.

**69.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$ **70.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16k^2 + 16k + 3}$

En los problemas 71 y 72, use (43) para determinar la suma de la serie dada.

**71.** $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(4k+1)^2}$ **72.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$

**73.** **(a)** Use (41) para obtener el resultado general

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k-a)^2} = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi a}$$

donde $a \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ .

**(b)** Utilice el inciso (a) para comprobar su respuesta del problema 69.

**74.** **(a)** Utilice (43) para obtener el resultado general

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+a)^2} = \frac{\pi^2 \cos \pi a}{\operatorname{sen}^2 \pi a},$$

donde $a \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ .

**(b)** Utilice el inciso (a) para comprobar su respuesta al problema 71

## 6.7 Aplicaciones

En otros cursos de matemáticas o de ingeniería puede haber utilizado la **transformada de Laplace** de una función real $f$ definida para $t \geq 0$.

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt. \tag{1}$$

Cuando la integral en (1) converge, el resultado es una función de $s$. Es una práctica común enfatizar la relación entre una función y su transformada usando una letra minúscula para denotar la función y la correspondiente letra mayúscula para denotar su transformada de Laplace, por ejemplo $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$, $\mathscr{L}\{y(t)\} = Y(s)$.

En la aplicación de (1) tenemos dos problemas:

(*i*) *El problema directo*: Dada una función $f(t)$ que satisface ciertas condiciones, determinar su transformada de Laplace.
(*ii*) *El problema inverso:* Determinar la función $f(t)$ que tiene una transformada dada $F(s)$.

La función $F(s)$ se llama **transformada inversa de Laplace** y se representa por $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$.

La transformada de Laplace es una valiosísima ayuda en la solución de ciertas clases de problemas de aplicación que implican ecuaciones diferenciales. En estos problemas tratamos con la transformada $Y(s)$ de una función desconocida $y(t)$. La determinación de $y(t)$ requiere del cálculo de $\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}$. En el caso de que $Y(s)$ sea una función racional de $s$, puede recordar que se emplean fracciones parciales, propiedades operacionales, o tablas para calcular esta inversa.

Veremos en esta sección que la transformada de Laplace inversa no es simplemente un símbolo, sino que en realidad es otra transformación integral. La razón por la que no ha utilizado esta transformada integral inversa en cursos anteriores es que es un tipo especial integral compleja de contorno.

Comenzamos con un repaso del concepto de pares de transformaciones integrales. La sección concluye con una breve introducción a la **transformada de Fourier**.

**Transformaciones integrales** Supongamos que $f(x, y)$ es una función real de dos variables reales. Entonces una integral definida de $f$ con respecto a una de las variables conduce a una función de la otra variable. Por ejemplo, si mantenemos a $y$ constante, la integración respecto a la variable real $x$ da $\int_1^2 4xy^2\, dx = 6y^2$. Así, una integral tal como $F(\alpha) = \int_a^b f(x)K(\alpha, x)\, dx$ transforma una función $f$ de la variable $x$ en una función $F$ de la variable $\alpha$. Decimos que

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x)K(\alpha, x)\, dx \tag{2}$$

es una **transformada integral** de la función $f$. Las transformadas integrales se presentan en **pares de transformadas**. Esto significa que la función original $f$ se puede recuperar por otra transformada integral

$$f(x) = \int_c^d F(\alpha)H(\alpha, x)\, d\alpha, \tag{3}$$

llamada la **transformada inversa**. La función $K(\alpha, x)$ en (2) y la función $H(\alpha, x)$ en (3) se denominan los **núcleos** de sus respectivas transformaciones. Observamos que si $\alpha$ representa una variable compleja, entonces la integral definida (3) se sustituye por una integral de contorno.

**La transformada de Laplace** Ahora supongamos en (2) que el símbolo $\alpha$ se reemplaza por el símbolo $s$, y que $f$ representa una función real* que se define en el intervalo no acotado $[0, \infty)$. Entonces (2) es una integral impropia y se define como el límite

$$\int_0^{\infty} K(s,t)f(t)\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} K(s,t)f(t)\,dt. \tag{4}$$

Si existe el límite en (4), decimos que la integral existe o es convergente, y si el límite no existe la integral no existe y se dice que es divergente. La elección de $K(s, t) = e^{-st}$, donde $s$ es una variable compleja, para el núcleo en (4) da la transformada de Laplace $\mathscr{L}\{f(t)\}$ definida previamente en (1). La integral que define la transformada de Laplace no puede converger para ciertas clases de funciones $f$. Por ejemplo, ni $\mathscr{L}\left\{e^{t^2}\right\}$ ni $\mathscr{L}\{1/t\}$ existen. También, el límite en (4) existirá sólo para ciertos valores de la variable $s$.

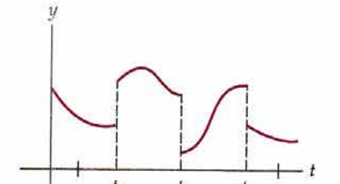


**Figura 6.7.1** Continuidad por tramos en $[0, \infty)$

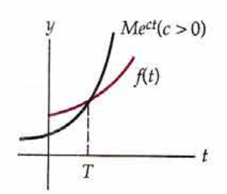


**Figura 6.7.2** Orden exponencial

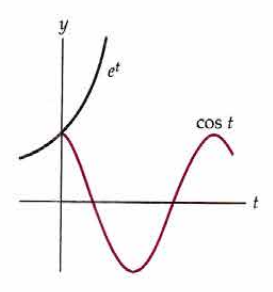


**Figura 6.7.3** $f(t) = \cos t$ es de orden exponencial $c = 0$

**EJEMPLO 1 Existencia de una transformada de Laplace**

La transformada de Laplace de $f(t) = 1$, $t \geq 0$ es

$$\mathscr{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st}(1)\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-st}\,dt$$

$$= \lim_{b\to\infty}\frac{-e^{-st}}{s}\Bigg|_0^{b} = \lim_{b\to\infty}\frac{1-e^{-sb}}{s}. \tag{5}$$

Si $s$ es una variable compleja, $s = x + iy$, entonces, recuerde

$$e^{-sb} = e^{-bx}(\cos by + i\,\mathrm{sen}\,by). \tag{6}$$

De (6) vemos en (5) que $e^{-sb} \to 0$ cuando $b \to \infty$ si $x > 0$. En otras palabras, (5) da $\mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s}$, suponiendo que $\mathrm{Re}(s) > 0$. ❑

**Existencia de $\mathscr{L}\{f(t)\}$** Las condiciones que son *suficientes* para garantizar la existencia de $\mathscr{L}\{f(t)\}$ son que $f$ sea continua por tramos en $[0, \infty)$ y que $f$ sea de orden exponencial. Recuerde del cálculo elemental, que **continúa por tramos** en $[0, \infty)$ significa que en cualquier intervalo hay a lo sumo un número finito de puntos $t_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $t_{k-1} < t_k$, en la que $f$ tiene discontinuidades finitas y es continua en cada intervalo abierto $t_{k-1} < t < t_k$. Vea la figura 6.7.1. Se dice que una función $f$ es de **orden exponencial $c$** si existen constantes $c$, $M > 0$, y $T > 0$ de modo que $|f(t)| \leq Me^{ct}$, para $t > T$. La condición $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para $t > T$ establece que la gráfica de $f$ en el intervalo $(T, \infty)$ no crece más rápido que la gráfica de la función exponencial $Me^{ct}$. Vea la figura 6.7.2. Por otra parte, $e^{-ct}|f(t)|$ está acotado, es decir, $e^{-ct}|f(t)| \leq M$ para $t > T$. Como se puede ver en la figura 6.7.3, la función $f(t) = \cos t$, $t \geq 0$ es de orden exponencial $c = 0$ para $t > 0$. De hecho, se sigue que todas las funciones acotadas son necesariamente de orden exponencial $c = 0$.

*De cuando en cuando $f(t)$ podría ser una función de valores complejos de una variable real $t$.

**Teorema 6.7.1 Condiciones suficientes para la existencia**

Suponga que $f$ es continua por tramos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial $c$ para $t > T$. Entonces $\mathscr{L}\{f(t)\}$ existe para $\operatorname{Re}(s) > c$.

**Demostración** Por la propiedad aditiva del intervalo de las integrales definidas,

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)\, dt = I_1 + I_2.$$

La integral $I_1$ existe, ya que se puede escribir como una suma de integrales de intervalos en los que $e^{-st}f(t)$ es continua. Para probar la existencia de $I_2$, sea $s$ una variable compleja $s = x + iy$. Entonces utilizando $|e^{-st}| = |e^{-xt}(\cos yt - i \operatorname{sen} yt)| = e^{-xt}$, y la definición de orden exponencial que $|f(t)| \le Me^{ct}$, $t > T$, obtenemos

$$\begin{aligned} |I_2| &\le \int_T^\infty |e^{st} f(t)|\, dt \le M \int_T^\infty e^{-xt} e^{ct}\, dt \\ &= M \int_T^\infty e^{-(x-c)t} dt = -M \frac{e^{-(x-c)t}}{x-c}\bigg|_T^\infty = M \frac{e^{-(x-c)T}}{x-c} \end{aligned}$$

para $x = \operatorname{Re}(s) > c$. Ya que $\int_T^\infty Me^{-(x-c)t} dt$ converge, la integral $\int_T^\infty |e^{-st} f(t)|\, dt$ converge por la prueba de comparación para integrales impropias. Esto, a su vez, implica que $I_2$ existe para $\operatorname{Re}(s) > c$. La existencia de $I_1$ e $I_2$ implica que $\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$ existe para $\operatorname{Re}(s) > c$. ❑

Considerando los conceptos anteriores, establecemos el teorema siguiente sin demostración.

**Teorema 6.7.2 Analiticidad de la transformada de Laplace**

Suponga que $f$ es continua por tramos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial $c$ para $t \ge 0$. Entonces la transformada de Laplace de $f$,

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

es una función analítica en el semiplano derecho definida por $\operatorname{Re}(s) > c$.

**La transformada inversa de Laplace** Aunque el teorema 6.7.2 indica que la función compleja $F(s)$ es analítica a la derecha de la recta $x = c$ en el plano complejo, $F(s)$, en general, tendrá singularidades a la izquierda de dicha recta. Ahora estamos en condiciones de dar la forma integral de la transformada inversa de Laplace.

**Teorema 6.7.3 Transformada inversa de Laplace**

Si $f$ y $f'$ son continuas por tramos en $[0, \infty)$ y $f$ es de orden exponencial $C$ para $t \geq 0$, y $F(s)$ es una transformada de Laplace, la **transformada inversa de Laplace** $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$ es

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma - iR}^{\gamma + iR} e^{st}F(s)\,ds, \tag{7}$$

donde $\gamma > c$.

El límite en (7), que define un valor principal de la integral, se suele escribir como

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st}F(s)\,ds, \tag{8}$$

donde los límites de integración indican que la integración es el contorno a lo largo de la recta vertical de longitud infinita $\text{Re}(s) = x = \gamma$. Aquí $\gamma$ es una constante real positiva mayor que $c$ y mayor que todas las partes reales de las singularidades en el semiplano de la izquierda. La integral en (8) se llama **integral de contorno de Bromwich**. Relacionando (8) de nuevo con (3), vemos que el núcleo de la transformada inversa $H(s, t) = e^{st}/2\pi i$.

El hecho de que $F(s)$ tiene singularidades $s_1, s_2, \ldots, s_n$ a la izquierda de la recta $x = \gamma$, hace que sea posible por nosotros para evaluar (7) usando un adecuado contorno cerrado que rodee las singularidades. Un contorno cerrado $C$ que se utiliza comúnmente consiste en una semicircunferencia $C_R$ de radio $R$ con centro en $(\gamma, 0)$ y un segmento de recta vertical $L_R$ paralelo al eje que pasa por el punto $(\gamma, 0)$ y se extiende de $y = \gamma - iR$ a $y = \gamma + iR$. Vea la figura 6.7.4. Tomamos el radio $R$ de la semicircunferencia como el más grande que el mayor número en el conjunto de módulos de las singularidades $\{|s_1|, |s_2|, \ldots, |s_n|\}$, es decir, lo suficientemente grande como para que todas las singularidades se encuentren dentro de la región semicircular. Con el contorno $C$ elegido de esta manera, (7) con frecuencia se puede evaluar usando el teorema del residuo de Cauchy. Si permitimos que el radio $R$ de la semicircunferencia tienda a $\infty$, la parte vertical del contorno se aproxima a la recta vertical infinita que es el contorno en (8).

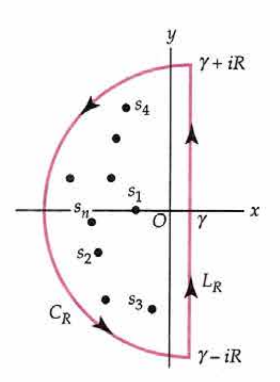


Figura 6.7.4 Posible contorno que se podría utilizar para evaluar (7)

Usamos el contorno que acabamos de describir, en la demostración del teorema siguiente.

**Teorema 6.7.4 Transformada inversa de Laplace**

Supongamos que $F(s)$ es una transformada de Laplace que tiene un número finito de polos $s_1, s_2, \ldots, s_n$ a la izquierda de la recta vertical $\text{Re}(s) = \gamma$ y que $C$ es el contorno que se muestra en la figura 6.7.4. Si $sF(s)$ está acotada en $C_R$ cuando $R \to \infty$, entonces

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \sum_{k=1}^{n}\text{Res}\left(e^{st}F(s), s_k\right). \tag{9}$$

**Demostración** De la figura 6.7.4 y del teorema del residuo de Cauchy, tenemos

$$\int_{C_R} e^{st} F(s)\, ds + \int_{L_R} e^{st} F(s)\, ds = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\left(e^{st} F(s),\ s_k\right)$$

o $$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - iR}^{\gamma + iR} e^{st} F(s)\, ds = \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\left(e^{st} F(s),\ s_k\right) - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} e^{st} F(s)\, ds. \qquad (10)$$

El teorema se justifica haciendo $R \to \infty$ en (10) y demostrando que $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{st}F(s)\, ds = 0$. Ahora, si la semicircunferencia $C_R$ se parametriza con $s = \gamma + Re^{i\theta}$, $\pi/2 \le \theta \le 3\pi/2$, entonces $ds = Rie^{i\theta}d\theta = (s - \gamma)id\theta$, y así,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} e^{st} F(s)\, ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{\gamma t + Rte^{i\theta}}\, F(\gamma + Re^{i\theta})Rie^{i\theta}\, d\theta.$$

Por tanto,

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{C_R} e^{st} F(s)\, ds\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left|e^{\gamma t + Rte^{i\theta}}\right| \left|F(\gamma + Re^{i\theta})\right| \left|Rie^{i\theta}\right| d\theta. \qquad (11)$$

Para encontrar una cota superior para la expresión en (11) se examinan los tres módulos del integrando de la derecha. Primero,

$$\left|e^{\gamma t + Rte^{i\theta}}\right| = \left|e^{\gamma t} e^{Rt(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)}\right| \overset{\downarrow \text{ puesto que } |e^{iRt\,\text{sen}\,\theta}| = 1}{=} e^{\gamma t} e^{Rt\cos\theta}.$$

Entonces para $R$ suficientemente grande, podemos escribir

$$\left|Rie^{i\theta}\right| = |s - \gamma|\,|i| \le |s| + |\gamma| < |s| + |s| = 2|s| \ \text{ y } \ |sF(s)| < M.$$

La primera de estas dos desigualdades se deduce de la desigualdad del triángulo, y la segunda de la hipótesis de que $sF(s)$ está acotado por $C_R$ cuando $R \to \infty$. Así, la desigualdad en (11) continúa como

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{C_R} e^{st}\, F(s)\, ds\right| \le \frac{M}{\pi} e^{\gamma t} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{Rt\cos\theta}\, d\theta. \qquad (12)$$

Si hacemos que $\theta = \phi + \pi/2$, entonces la integral en el lado derecho de (12) se convierte en $\int_0^{\pi} e^{-Rt\,\text{sen}\,\phi}\, d\phi$. Debido a que el integrando es simétrico respecto de la recta $\theta = \pi/2$, tenemos

$$\int_0^{\pi} e^{-Rt\,\text{sen}\,\phi}\, d\phi = 2\int_0^{\pi/2} e^{-Rt\,\text{sen}\,\phi}\, d\phi. \qquad (13)$$

Ahora puesto que sen $\phi \ge 2\phi/\pi$,* se tiene que

$$2\int_0^{\pi/2} e^{-Rt\,\text{sen}\,\phi}\, d\phi \le 2\int_0^{\pi/2} e^{-2Rt\phi/\pi}\, d\phi = -\frac{\pi}{Rt} e^{-2Rt\phi/\pi}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{Rt}\left[1 - e^{-Rt}\right]. \qquad (14)$$

Por tanto (11), (12), (13) y (14) en conjunto dan

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{C_R} e^{st}\, F(s)\, ds\right| \le \frac{Me^{\gamma t}}{Rt}\left[1 - e^{-Rt}\right]. \qquad (15)$$

*Vea el problema 52 de los ejercicios 6.6.

Puesto que el lado derecho de (15) tiende a cero cuando $R \to \infty$ para $t > 0$ concluimos que $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{st} F(s)\, ds = 0$. Por último, cuando $R \to \infty$ vemos en (10) que

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} F(s)\, ds = \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\left(e^{st} F(s),\ s_k\right).$$

❑

En los siguientes ejemplos se supone que las hipótesis del teorema 6.7.4 se satisfacen.

## EJEMPLO 2 Transformada inversa de Laplace

Evalúe $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^3}\right\}$, $\text{Re}(s) > 0$.

**Solución** Considerada como una función de una variable compleja $s$, la función $F(s) = 1/s^3$ tiene un polo de orden 3 en $s = 0$. Así, por (9) y (2) de la sección 6.5:

$$\begin{aligned} f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} &= \text{Res}\left(e^{st}\frac{1}{s^3}, 0\right) = \frac{1}{2}\lim_{s\to 0}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s-0)^3\frac{e^{st}}{s^3}\right] \\ &= \frac{1}{2}\lim_{s\to 0}\frac{d^2}{ds^2}e^{st} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{s\to 0} t^2 e^{st} \\ &= \frac{1}{2}t^2. \end{aligned}$$

❑

Los lectores familiarizados con la transformada de Laplace reconocen que la respuesta en el ejemplo 1 es consistente (para $n = 2$) con el resultado $\mathscr{L}\{t^n\} = n!/s^{n+1}$ encontrado en todas las tablas de transformadas de Laplace.

La transformada de Laplace (1) utiliza sólo los valores de una función $f(t)$ para $t > 0$, por lo que $f$ se toma a menudo como 0 para $t < 0$. Esto no es un obstáculo importante porque las funciones con que tratamos en las aplicaciones están en la mayor parte definidas sólo para $t > 0$. Aunque no vamos a ahondar en detalles, la inversión integral (7) se puede deducir de un resultado conocido como la fórmula integral de Fourier. En este análisis se demuestra que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} F(s) ds = \begin{cases} f(t), & t > 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases} \tag{16}$$

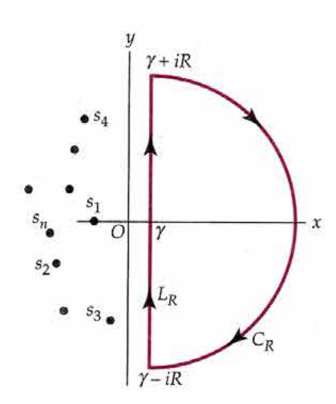


**Figura 6.7.5** Contorno para la inversión integral (7) para $t < 0$

Este resultado se insinúa en la demostración del teorema 6.7.4. Observe de (15) que la conclusión $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{st} F(s)\, ds = 0$ *no es válida* para $t < 0$. Sin embargo, si cerramos el contorno de la derecha para $t < 0$, como se muestra en la figura 6.7.5, entonces $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} F(s)\, ds = 0$, que es consistente con (16). Usamos estos resultados en el siguiente ejemplo.

**EJEMPLO 3 Transformada inversa de Laplace**

Evalúe $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-2s}}{(s-1)(s-3)}\right\}$, $\operatorname{Re}(s) > 3$.

**Solución** Antes de calcular los residuos en los polos simples en $s = 1$ y $s = 3$, observamos, después de combinar las dos funciones exponenciales y sustituyendo el símbolo $t$ por $t - 2$, que con (16) se obtiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{s(t-2)}}{(s-1)(s-3)}\,ds = \begin{cases} f(t), & t-2>0 \\ 0, & t-2<0. \end{cases} \tag{17}$$

Así, de (17), (9) y (1) de la sección 6.5,

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{(s-1)(s-3)}\right\} = \operatorname{Res}\left(e^{st}\frac{e^{-2s}}{(s-1)(s-3)}, 1\right) + \operatorname{Res}\left(e^{st}\frac{e^{-2s}}{(s-1)(s-3)}, 3\right) \\ &= \lim_{s\to 1}(s-1)\frac{e^{s(t-2)}}{(s-1)(s-3)} + \lim_{s\to 3}(s-3)\frac{e^{s(t-2)}}{(s-1)(s-3)} \\ &= -\frac{1}{2}e^{t-2} + \frac{1}{2}e^{3(t-2)}. \end{aligned}$$

En otras palabras,

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}e^{t-2} + \frac{1}{2}e^{3(t-2)}, & t>2 \\ 0, & t<2. \end{cases} \tag{18}$$

❑

En el estudio de la transformada de Laplace de la **función escalón unitario**,

$$\mathscr{U}(t-a) = \begin{cases} 1, & t \ge a \\ 0, & t < a \end{cases}$$

demuestra ser extremadamente útil cuando se trabaja con funciones continuas por tramos. La función discontinua en (18) puede escribirse como

$$f(t) = -\tfrac{1}{2}e^{t-2}\mathscr{U}(t-2) + \tfrac{1}{2}e^{3(t-2)}\mathscr{U}(t-2).$$

## Transformada de Fourier

Supongamos ahora que $f(x)$ es una función real definida en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Otro par de transformación importante es la **transformada de Fourier**

$$\mathscr{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx = F(\alpha) \tag{19}$$

y la **transformada inversa de Fourier**

$$\mathscr{F}^{-1}\{F(\alpha)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{-i\alpha x}\,d\alpha = f(x). \tag{20}$$

Acoplando (19) y (20) con (2) y (3), vemos que el núcleo de la transformada de Fourier es $K(\alpha, x) = e^{i\alpha x}$, mientras que el núcleo de la transformada inversa es $H(\alpha, x) = e^{-i\alpha x}/2\pi$. En (19) y (20) se supone que $\alpha$ es una variable real.

También, observe que en contraste con (7), la transformada inversa (20) no es una integral de contorno.

**EJEMPLO 4 Transformada de Fourier**

Encuentre la transformada de Fourier de $f(x) = e^{-|x|}$.

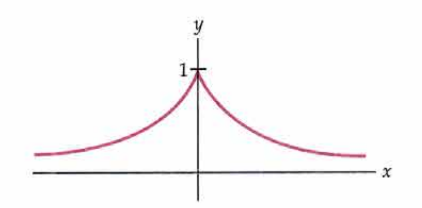



Figura 6.7.6 Gráfica de $f$ en el ejemplo 4

**Solución** La gráfica de $f$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{x}, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}, \tag{21}$$

está dada en la figura 6.7.6. De la definición ampliada de $f$ en (21), se deduce de (19) que la transformada de Fourier de $f$ es

$$\mathscr{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{0} e^{x} e^{i\alpha x}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x} e^{i\alpha x}\, dx = I_1 + I_2. \tag{22}$$

Vamos a comenzar por evaluar la integral impropia $I_2$. Una de varias formas de proceder es escribir:

$$\begin{aligned} I_2 &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x(1-\alpha i)}\, dx = \lim_{b\to\infty} \left.\frac{e^{-x(1-\alpha i)}}{\alpha i - 1}\right|_0^b = \lim_{b\to\infty} \frac{e^{-b(1-\alpha i)} - 1}{\alpha i - 1} \\ &= \frac{1}{\alpha i - 1} \lim_{b\to\infty} \left[e^{-b} \cos b\alpha + i e^{-b} \operatorname{sen} b\alpha - 1\right] = \frac{1}{1 - \alpha i}. \end{aligned}$$

Aquí hemos utilizado $\lim_{b\to\infty} e^{-b} \cos b\alpha = 0$ y $\lim_{b\to\infty} e^{-b} \operatorname{sen} b\alpha = 0$ para $b > 0$.

La integral $I_1$ se puede evaluar de la misma manera para obtener

$$I_1 = \frac{1}{1 + \alpha i}.$$

Sumando $I_1$ y $I_2$ da el valor de la transformada de Fourier (22):

$$\mathscr{F}\{f(x)\} = \frac{1}{1 - \alpha i} + \frac{1}{1 + \alpha i} \quad \text{o} \quad F(\alpha) = \frac{2}{1 + \alpha^2}.$$



**EJEMPLO 5 Transformada inversa de Fourier**

Encuentre la transformada inversa de Fourier $F(\alpha) = \dfrac{2}{1 + \alpha^2}$.

**Solución** La idea es recuperar la función $f$ en el ejemplo 4 de la transformada inversa (20),

$$\mathscr{F}^{-1}\{F(\alpha)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1 + \alpha^2} e^{-i\alpha x}\, d\alpha = f(x). \tag{23}$$

Para evaluar (23), hacemos que $z$ sea una variable compleja e introducimos la integral de contorno $\oint_C \dfrac{1}{\pi(1 + z^2)} e^{-izx}\, dz$. Considere que el integrando tiene polos simples en $z = \pm i$. De aquí, el procedimiento utilizado es básicamente el mismo que se utiliza para evaluar las integrales trigonométricas en la sección anterior por la teoría de residuos. El contorno $C$ que se muestra en la figura 6.7.7 encierra el polo simple en $z = i$ en el plano superior y consiste

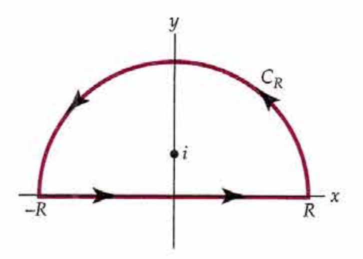



Figura 6.7.7 Primer contorno utilizado para evaluar (23)

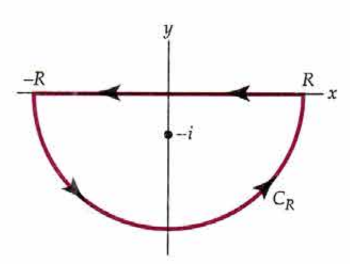



Figura 6.7.8 Segundo entorno utilizado para evaluar (23)

del intervalo $[-R, R]$ en el eje real y un contorno semicircular $C_R$, donde $R > 1$. Formalmente, tenemos

$$\oint_C \frac{1}{\pi(1+z^2)} e^{-izx}\, dz = 2\pi i \text{Res}\left(\frac{1}{\pi(1+z^2)} e^{-izx}, i\right) = e^x. \qquad (24)$$

Obviamente el resultado en (24) no es la función $f$ que comenzó en el ejemplo 4. Un análisis más detallado en este caso revela que la integral de contorno a lo largo de $C_R$ tiende a cero cuando $R \to \infty$ sólo si suponemos que $x < 0$. En otras palabras, la respuesta en (24) es en realidad $e^x$, $x < 0$.

Si consideramos $\oint_C \frac{1}{\pi(1+z^2)} e^{-izx}\, dz$, donde $C$ es el contorno de la figura 6.7.8, se puede demostrar que la integral a lo largo de $C_R$ ahora tiende a cero cuando $R \to \infty$ y se supone que $x$ es positiva. Por tanto,

$$\oint_C \frac{1}{\pi(1+z^2)} e^{-izx}\, dz = -2\pi i \text{Res}\left(\frac{1}{\pi(1+z^2)} e^{-izx}, -i\right) = e^{-x}, \quad x > 0. \qquad (25)$$

Considere el signo menos que aparece frente al factor $2\pi i$ en el lado derecho de (25). Este signo proviene del hecho de que sobre $C$ en la figura 6.7.8, $\oint_C = \int_{C_R} + \int_R^{-R} = \int_{C_R} - \int_{-R}^{R} = 2\pi i\ \text{Res}(z = -i)$. Cuando $R \to \infty$, $\int_{C_R} \to 0$ para $x > 0$, entonces tenemos que $-\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} = 2\pi i \text{Res}(z = -i)$ o $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} = -2\pi i\ \text{Res}(z = -i)$. Combinando (23), (24), y (25), llegamos a

$$\mathscr{F}^{-1}\{F(\alpha)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+\alpha^2} e^{-i\alpha x}\, d\alpha = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$

que concuerda con (21). Observe que cuando $x = 0$ en (23) la integración convencional da el valor 1, que es $f(0)$ en (21). ❑

## Observaciones

(*i*) Las dos condiciones de la continuidad por tramos y de orden exponencial son *suficientes* pero no *necesarias* para la existencia de $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$. Por ejemplo la función $f(t) = t^{-1/2}$ no es continua por tramos en $[0, \infty)$ (¿Por qué no?); sin embargo $\mathscr{L}\{t^{-1/2}\}$ existe.

(*ii*) Hemos supuesto que $F(s)$ tiene un número de polos finito en el plano complejo. Este es normalmente el caso cuando $F(s)$ surge de la solución de una ecuación diferencial *ordinaria*. En la solución de los problemas de aplicación que implican una ecuación diferencial *parcial* es común obtener una función $F(s)$ con un número infinito de polos. Aunque la demostración del teorema 6.7.4 no es válida cuando $F(s)$ tiene un número infinito de polos en el semiplano izquierdo $\text{Re}(s) < c$, el resultado establecido en el teorema es válido. En este caso el valor de la integral es una serie infinita obtenida de la suma infinita de residuos.

(*iii*) Aunque hemos mostrado el uso de (1) cuando las singularidades de $F(s)$ son polos, su uso principal es calcular las transformadas inversas de las funciones más complicadas tales como $F(s) = (s^2 + a^2)^{-1/2}$.

(*iv*) No mencionamos las condiciones bajo las que la transformada de Fourier (19) de una función $f(x)$ existe. Estas condiciones son considerablemente más demandantes que las establecidas por la existencia de la transformada de Laplace. Por ejemplo $\mathscr{L}\{1\} = 1/s$ pero $\mathscr{F}\{1\}$ no existe. Para más información de la teoría y aplicaciones de la integral de Fourier se le pide consulte libros de análisis de Fourier de matemáticas avanzadas para ingeniería.

## EJERCICIOS 6.7

*Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-19.*

En los problemas 1 a 4 encuentre la transformada de Laplace de la función dada. Determine una condición en $s$ que sea suficiente para garantizar la existencia de $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$.

**1.** $f(t) = e^{5t}$

**2.** $f(t) = e^{(-2+3i)t}$

**3.** $f(t) = \text{sen } 3t$

**4.** $f(t) = e^t \cos t$

**5.** Generalice el resultado del problema 1 y establezca la condición sobre $s$ que sea suficiente para garantizar la existencia de $\mathscr{L}\{e^{kt}\}$ cuando $k$ es una constante real.

**6.** Generalice el resultado del problema 2 y establezca la condición sobre $s$ que sea suficiente para garantizar la existencia de $\mathscr{L}\{e^{kt}\}$ cuando $k$ es una constante compleja.

**7.** La transformada de Laplace es una transformación lineal, es decir, para las constantes $\alpha$ y $\beta$,

$$\mathscr{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathscr{L}\{f(t)\} + \beta\mathscr{L}\{g(t)\}$$

siempre que ambas transformadas existan. Use la linealidad definida anteriormente junto con las definiciones

$$\text{senh } kt = \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}, \quad \cosh kt = \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2},$$

$k$ una constante real, para encontrar $\mathscr{L}\{\text{senh } kt\}$ y $\mathscr{L}\{\cosh kt\}$.

**8.** Establezca una condición sobre $s$ que sea suficiente para garantizar la existencia de las transformadas de Laplace en el problema 7.

En los problemas del 9 a 18 utilice la teoría de los residuos para calcular la inversa de la transformada de Laplace $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$ para la función $F(s)$ dada.

**9.** $\dfrac{1}{s^6}$

**10.** $\dfrac{1}{(s-5)^3}$

**11.** $\dfrac{1}{s^2+4}$

**12.** $\dfrac{s}{(s^2+1)^2}$

**13.** $\dfrac{1}{s^2-3}$

**14.** $\dfrac{1}{(s-a)^2+b^2}$

**15.** $\dfrac{e^{-as}}{s^2-5s+6}, \quad a > 0$

**16.** $\dfrac{e^{-as}}{(s-a)^2}, \quad a > 0$

**17.** $\dfrac{1}{s^4-1}$

**18.** $\dfrac{s+4}{s^2+6s+11}$

---

Vea *Advanced Engineering Mathematics*, 3ª Edición de Dennis G. Zill y Michael R. Cullen, Jones and Bartlett Editores.

En los problemas 19 y 20 encuentre la transformada de Fourier (19) de la función dada.

**19.** $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$ **20.** $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & |x| \leq \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$

**21.** Use la transformada inversa de Fourier (20) y la teoría de residuos para recuperar la función $f$ en el problema 19.

**22.** La transformada de Fourier de una función $f$ es $F(\alpha) = \dfrac{1}{(1 - i\alpha)^2}$. Use la transformada inversa de Fourier (20) y la teoría de residuos para encontrar la función $f$.

## Enfocando los conceptos

**23.** Por el resultado obtenido en el problema 8, determine los valores de $\gamma$ que se pueden utilizar en la transformación inversa (7).

**24.** **(a)** Si $F(\alpha)$ es la transformada de Fourier de $f(x)$, entonces la función $|F(\alpha)|$ se llama el **espectro de amplitud** de $f$. Encuentre el espectro de amplitud de

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}.$$

Trace la gráfica $|F(\alpha)|$.

**(b)** Realice una lectura adicional y encuentre una aplicación del concepto de espectro de amplitud de una función.

**25.** Determine la transformada de Fourier de $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 0, & x < 0 \text{ o } x > 1 \end{cases}$. Analice cómo encontrar la transformada inversa de Fourier (20).

## Proyectos

**26.** En la aplicación de la transformada de Laplace a los problemas que involucran ecuaciones diferenciales parciales, con frecuencia se encuentra una inversa como

$$f(x, t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\operatorname{senh} xs}{(s^2 + 1) \operatorname{sen} hs}\right\}.$$

Investigue cómo se pueden utilizar (8) y (9) para determinar $f(x, t)$.

## CAPÍTULO 6 PREGUNTAS DE REPASO

*Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-19.*

En los problemas 1 a 20 la respuesta es verdadera o falsa. Si el enunciado es falso, justifique su respuesta ya sea explicando por qué es falsa o dando un contraejemplo: si el enunciado es verdadero, justifique su respuesta, ya sea demostrando el enunciado o citando un resultado apropiado de este capítulo.

**1.** Para la sucesión $\{z_n\}$, donde $z_n = i^n = x_n + iy_n$, $\text{Re}(z_n) = x_n = \cos(n\pi/2)$ e $\text{Im}(z_n) = y_n = \operatorname{sen}(n\pi/2)$.

**2.** La sucesión $\{i^n\}$ converge.

**3.** $\text{lím}_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{\pi}}\right)^n = 0$.

4. $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} |z_n| = 0$.

5. La serie de potencias $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$ converge absolutamente en cada punto de su círculo de convergencia.

6. Existe una serie de potencias centrada en $z_0 = 1 + i$ que converge en $z = 25 - 4i$ y diverge en $z = 15 + 21i$.

7. Una función $f$ es analítica en un punto $z_0$ si $f$ se puede desarrollar en una serie de potencias convergente con centro en $z_0$.

8. Supongamos que una función $f$ tiene una representación en serie de Taylor con la circunferencia de convergencia $|z - z_0| = R$, $R > 0$. Entonces $f$ es analítica en todas partes en la circunferencia de convergencia.

9. Supongamos que una función $f$ tiene una representación en serie de Taylor centrada en $z_0$. Entonces $f$ es analítica en todo punto dentro de la circunferencia de convergencia $|z - z_0| = R$, $R > 0$, y no es analítica en ningún punto fuera de $|z - z_0| = R$.

10. Si la función $f$ es entera, entonces el radio de convergencia de un desarrollo en serie de Taylor de $f$ centrado en $z_0 = 1 - i$ es necesariamente $R = \infty$.

11. Ambas series de potencias

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots$$

y

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{2} - \frac{z-1}{2^2} + \frac{(z-1)^2}{2^3} - \frac{(z-1)^3}{2^4} + \cdots$$

convergen en $z = 0.86 - 0.52i$.

12. Si la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ tiene un radio de convergencia $R$, entonces la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{2k}$ tiene un radio de convergencia $\sqrt{R}$.

13. Las series de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$ tienen el mismo radio de convergencia $R$.

14. La rama principal $f_1(z)$ del logaritmo complejo no tiene un desarrollo de Maclaurin.

15. Si $f$ es analítica en toda una vecindad excluida de $z_0$ es un polo de orden $n$, entonces $\lim_{z\to z_0} (z - z_0)^n f(z) \neq 0$.

16. Una singularidad de una función racional, es removible o es un polo.

17. La función $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 2iaz - 1}$, $a > 1$, tiene dos polos simples en la circunferencia unitaria $|z| = 1$.

18. $z = 0$ es un polo simple de $f(z) = -\dfrac{1}{z} + \cot z$.

19. Si $z_0$ es un polo simple de una función $f$, entonces es posible que $\text{Res}(f(z), z_0) = 0$.

20. La parte principal de la serie de Laurent de $f(z) = \dfrac{1}{1 - \cos z}$ válida para $0 < |z| < 2\pi$ contiene exactamente dos términos distintos de cero.

En los problemas 21 al 40, trate de llenar los espacios en blanco, sin consultar el texto.

21. La sucesión $\left\{ \dfrac{2in}{n+i} - \dfrac{(9-12i)n+2}{3n+1+7i} \right\}$ converge a __________.

22. La serie $i + 2i + 3i + 4i + \ldots$ diverge ya que __________.

23. $5 - i - \dfrac{1}{5} + \dfrac{i}{25} + \dfrac{1}{125} - \cdots =$ __________.

PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
Biblioteca Central

**24.** La igualdad $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^k = \frac{1}{2}(z+1)$ proviene de ________ y es válida en la región del plano complejo definida por ________.

**25.** La serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty}(5+12i)^k(z-2-i)^k$ converge absolutamente dentro del círculo ________.

**26.** La serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^k}{2k+5}(z-2+3i)^{2k}$ diverge para $|z-2+3i| >$ ________.

**27.** Si la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $a_k \neq 0$, tiene radio de convergencia $R >$ 0, entonces la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{a_k}$ tiene un radio de convergencia de ________.

**28.** Sin encontrar el desarrollo real, la serie de Taylor de $f(z) = \csc z$ con centro en $z_0 = 3 + 2i$ tiene un radio de convergencia $R =$ ________.

**29.** Utilice la primera serie en el problema 11 para obtener los tres primeros términos de una serie de Taylor de $f(z) = \frac{z+1}{6+z}$ centrada en $z_0 = -1$: ________ El radio de convergencia de la serie es $R =$ ________.

**30.** Una serie de potencias centrada en $-5i$ para $f(z) = e^z$ está dada por $e^z = \sum_{k=0}^{\infty}$ __ $(z+5i)^k$.

**31.** $z = -1$ es una singularidad aislada de $f(z) = \frac{(z+1)^3 - 2(z+1)^2 + 4(z+1) + 7}{(z+1)^2}$. La serie de Laurent válida para $0 < |z+1| < \infty$ es ________.

**32.** La función analítica $f(z) = \frac{1}{6}z^9 - z^3 + \operatorname{sen} z^3$ tiene un cero de orden ________ en $z = 0$.

**33.** Los ceros de la función $f(z) = \operatorname{sen}\pi\left(\frac{1}{z} - 1\right)$ son ________ y son de orden ________.

**34.** Si $f(z)$ tiene un cero de orden 5 en $z_0$, entonces la derivada de orden más bajo que no es cero es $f^{(__)}(z_0)$.

**35.** La función $f(z) = (z - \operatorname{sen} z)/z^3$ tiene una singularidad removible en $z = 0$. El valor $f(0)$ se define como ________.

**36.** Si $f(z) = z^3 e^{-1/z^2}$ entonces Res $(f(z), 0) =$ ________.

**37.** Supongamos que $z = \pi$ es un polo simple de $f(z) = \cot z$. A partir de una fórmula de residuo adecuada, Res $(f(z), \pi) =$ ________ y así la parte principal de la serie de Laurent alrededor de $z = \pi$ es ________ y la serie de Laurent es válida para $0 < |z - \pi| <$ ________.

**38.** En $|z| = 1$, la integral de contorno $\oint_C \frac{\cos z}{z^2 - (2+\pi)z + 2\pi}\,dz$ es igual a ________, sobre $|z| = 3$ la integral es igual a ________, y sobre $|z| = 4$ la integral es igual a ________.

**39.** En $|z| = 1$,

**(a)** $\oint_C \frac{z^2 + 2iz + 1 - i}{e^{2z} - 1}\,dz =$ ________,

**(b)** $\oint_C \frac{\operatorname{sen} z}{z^n}\,dz =$ ________, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

**40.** $\int_0^{2\pi} \frac{1}{4\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta =$ ________.

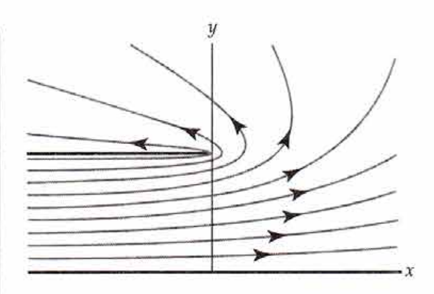
CAPÍTULO

7

# Mapeos conformes

## Contenido del capítulo






Flujo planar de un fluido ideal. Vea la página 397

**Introducción** En la sección 4.5 vimos que se pueden utilizar los mapeos analíticos para resolver ciertos tipos de problemas con valores en la frontera. En este capítulo se introduce el concepto fundamental de mapeo conforme, y se muestra qué los mapeos conformes se pueden utilizar para resolver una clase más amplia de problemas con valores en la frontera. Los métodos que se presentan se aplican a problemas de flujo de calor, de electrostática y de flujo de fluidos.

## 7.1 Mapeo conforme

En la sección 2.3 vimos que un mapeo lineal no constante actúa rotando, ampliando, y trasladando puntos en el plano complejo. Como un resultado, el ángulo entre cualesquiera dos arcos que se intersectan en el plano $z$ es igual al ángulo entre las imágenes de los arcos en el plano $w$ bajo un mapeo lineal. Los mapeos complejos que tienen la propiedad de preservar el ángulo se llaman **mapeos conformes**. En esta sección definiremos y discutiremos formalmente los mapeos conformes. Demostraremos que cualquier función compleja analítica es conforme en puntos donde la derivada no es cero. Consecuentemente, todas las funciones elementales estudiadas en el capítulo 14 son conformes en algún dominio $D$. Más tarde en este capítulo, veremos que los mapeos conformes tienen importantes aplicaciones o problemas con valores en la frontera que involucran a la ecuación de Laplace.

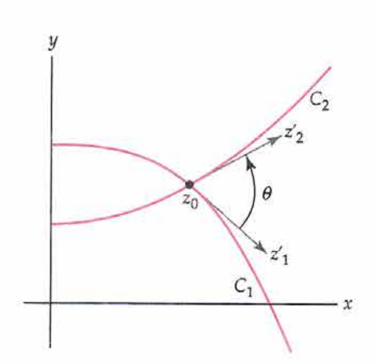


Figura 7.1.1 El ángulo $\theta$ entre $C_1$ y $C_2$

**Mapeos conformes** Suponga que $w = f(z)$ es un mapeo complejo definido en un dominio $D$. Se dice que el mapeo es conforme en un punto $z_0$ en $D$ si se "conserva el ángulo" entre dos curvas cualesquiera que se intersectan en $z_0$. Para hacer preciso este concepto, suponga que $C_1$ y $C_2$ son curvas suaves en $D$ que se intersectan en $z_0$ y tienen una orientación fija como se describe en la sección 5.1. Sean $z_1(t)$ y $z_2(t)$ parametrizaciones de $C_1$ y $C_2$ tal que $z_1(t_0) = z_2(t_0) = z_0$, y tal que las orientaciones en $C_1$ y $C_2$ corresponden a valores crecientes del parámetro $t$. Dado que $C_1$ y $C_2$ son suaves, los vectores tangentes $z_1' = z_1'(t_0)$ y $z_2' = z_2'(t_0)$ son distintos de cero. Se define al **ángulo** entre $C_1$ y $C_2$ como el ángulo $\theta$ en el intervalo $[0, \pi]$ entre los vectores tangentes $z_1'$ y $z_2'$. Vea la figura 7.1.1. Ahora suponga que bajo el mapeo complejo $w = f(z)$ las curvas $C_1$ y $C_2$ en el plano $z$ se mapean sobre las curvas $C_1'$ y $C_2'$ respectivamente, sobre el plano $w$. Dado que $C_1$ y $C_2$ se intersectan en $z_0$, debemos tener que $C_1'$ y $C_2'$ se intersectan en $f(z_0)$. Si $C_1'$ y $C_2'$ son suaves, entonces el ángulo entre $C_1'$ y $C_2'$ en $f(z_0)$ se define de forma similar que el ángulo $\phi$ en el intervalo $[0, \pi]$ entre los vectores tangentes definidos de forma similar $w_1'$ y $w_2'$. Decimos que los ángulos $\theta$ y $\phi$ son **iguales en magnitud** si $\theta = \phi$.

En el plano $z$, el vector $z_1'$, cuyo punto inicial es $z_0$, puede rotar el ángulo $\theta$ sobre el vector $z_2'$. Esta rotación es contra las manecillas del reloj o en la dirección de éstas. Del mismo modo, en el plano $w$, el vector $w_1'$ cuyo punto inicial es $f(z_0)$ se puede rotar en cualquier sentido, ya sea en contra de las manecillas del reloj o en la dirección de éstas, un ángulo de $\phi$ sobre el vector $w_2'$. Si la rotación en el plano $z$ se encuentra en la misma dirección que la rotación en el plano $w$, se dice que los ángulos $\theta$ y $\phi$ tienen **el mismo sentido**. El siguiente ejemplo ilustra estos conceptos.

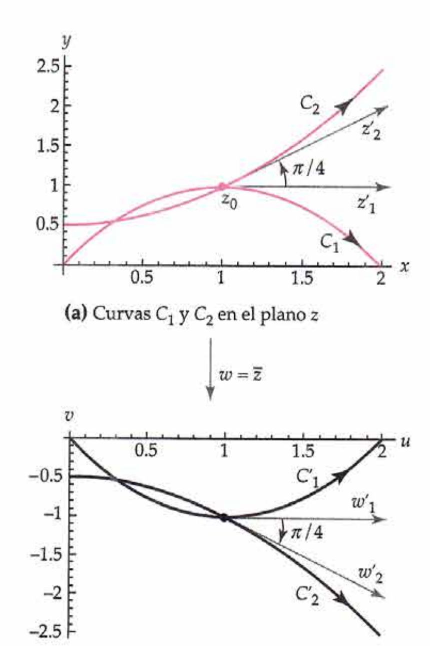


Figura 7.1.2 Figura para el ejemplo 1

### EJEMPLO 1 Magnitud y sentido de los ángulos

Las curvas suaves $C_1$ y $C_2$ que se muestran en la figura 7.1.2(a) están dadas por $z_1(t) = t + (2t - t^2)i$ y $z_2(t) = t + \frac{1}{2}(t^2 + 1)i$, $0 \leq t \leq 2$, respectivamente. Estas curvas se intersectan en el punto $z_0 = z_1(1) = z_2(1) = 1 + i$. Los vectores tangentes en $z_0$ son $z_1' = z_1'(1) = 1$ y $z_1' = z_2'(1) = 1 + i$. Además, en la figura 7.1.2(a) vemos que el ángulo entre $C_1$ y $C_2$ en $z_0$ es $\theta = \pi/4$. Bajo el mapeo complejo $w = \bar{z}$, las imágenes de $C_1$ y $C_2$ son las curvas $C_1'$ y $C_2'$, respectivamente, que se muestran en la figura 7.1.2(b). La imagen de estas curvas están parametrizadas por $w_1(t) = t - (2t - t^2)i$ y $w_2(t) = t - \frac{1}{2}(t^2 + 1)i$, $0 \leq t \leq 2$, y se intersectan en el punto $w_0 = f(z_0) = 1 - i$. Además, en $w_0$ tenemos los vectores tangentes $w_1' = w_1'(1) = 1$ y $w_2' = w_2'(1) = 1 - i$ a $C_1'$ y $C_2'$, respectivamente. Revisando la figura 7.1.2(b) indica que el ángulo entre $C_1'$ y $C_2'$ en $w_0$ es $\phi = \pi/4$. Por tanto, los ángulos $\theta$ y $\phi$ son iguales en magnitud. Sin

embargo, debido a que la rotación de $\pi/4$ del vector $z'_1$ sobre $z'_2$ debe ser en *contra de las manecillas del reloj*, mientras que la rotación de $\pi/4$ de $w'_1$ sobre $w'_2$ debe ser en el *sentido de las manecillas del reloj*, llegamos a la conclusión de que $\theta$ y $\phi$ no tienen el mismo sentido. ❑

Con la terminología referente a la magnitud y al sentido de un ángulo establecido, ahora estamos en condiciones de dar la siguiente definición precisa de un mapeo conforme.

**Definición 7.1.1 Mapeo conforme**

Sea $w = f(z)$ un mapeo complejo definido en un dominio $D$ y sea $z_0$ un punto en $D$. Entonces decimos que $w = f(z)$ es **conforme** en $z_0$ si para todo par de curvas suaves orientadas $C_1$ y $C_2$ en $D$ que se intersectan en $z_0$ el ángulo entre $C_1$ y $C_2$ en $z_0$ es igual al ángulo entre las curvas imagen $C'_1$ y $C'_2$ en $f(z_0)$ en magnitud y en sentido.

También vamos a utilizar el término **mapeo conforme** para referirnos a un mapeo complejo $w = f(z)$ que es conforme en $z_0$. Además, si $w = f(z)$ mapea un dominio $D$ sobre un dominio $D'$ y si $w = f(z)$ es conforme en todos los puntos en $D$, entonces se llama a $w = f(z)$ un mapeo conforme de $D$ sobre $D'$. De la sección 2.3 debería ser intuitivamente claro que si $f(z) = az + b$ es una función lineal, con $a \neq 0$, entonces $w = f(z)$ es conforme en todos los puntos en el plano complejo. En el ejemplo 1 hemos demostrado que $w = \bar{z}$ no es un mapeo conforme en el punto $z_0 = 1 + i$, porque los ángulos $\theta$ y $\phi$ son iguales en magnitud pero no en sentido.

**Ángulos entre curvas** La definición 7.1.1 rara vez se utiliza directamente para demostrar que un mapeo complejo es conforme. Más bien, vamos a demostrar en el teorema 7.1.1 que una función analítica $f$ es un mapeo conforme en $z$ siempre que $f'(z) \neq 0$. Para probar este resultado es necesario un procedimiento para determinar el ángulo (en magnitud y sentido) entre dos curvas suaves en el plano complejo. Para nuestros propósitos, la forma más eficaz de hacerlo es utilizar el argumento de un número complejo.

Vamos a adoptar de nuevo la notación de la figura 7.1.1, donde $C_1$ y $C_2$ son curvas suaves parametrizadas por $z_1(t)$ y $z_2(t)$, respectivamente, que se intersectan en $z_1(t_0) = z_2(t_0) = z_0$. El requisito de que $C_1$ sea suave asegura que el vector tangente a $C_1$ en $z_0$, dado por $z'_1 = z'_1(t_0)$, es distinto de cero, por lo que $\arg(z'_1)$ se define y representa un ángulo entre el vector de posición $z'_1$ y el eje $x$ positivo. Del mismo modo, el vector tangente a $C_2$ en $z_0$, dado por $z'_2 = z'_2(t_0)$ es distinto de cero, y $\arg(z'_2)$ representa un ángulo entre el vector de posición $z'_2$ y el eje $x$ positivo. Al revisar la figura 7.1.3 se muestra que el ángulo $\theta$ entre $C_1$ y $C_2$ en $z_0$ es el valor de

$$\arg(z'_2) - \arg(z'_1) \tag{1}$$

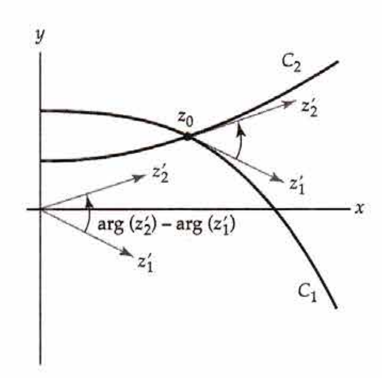


Figura 7.1.3 El ángulo entre $C_1$ y $C_2$

en el intervalo $[0, \pi]$, siempre que podamos rotar $z'_1$ en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de 0 a través del ángulo $\theta$ sobre $z'_2$. En el caso de que se necesite una rotación en el sentido de las manecillas del reloj, entonces $-\theta$ es el valor de (1) en el intervalo $(-\pi, 0)$. En cualquier caso, vemos que (1) da tanto la magnitud como el sentido del ángulo entre $C_1$ y $C_2$ en $z_0$. Como ejemplo, considere las curvas $C_1$, $C_2$, y sus imágenes bajo el mapeo complejo $w = \bar{z}$ en el ejemplo 1. Tenga en cuenta que el valor único de

$$\arg(z'_2) - \arg(z'_1) = \arg(1 + i) - \arg(1) = \frac{\pi}{4} + 2n\pi,$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, que se encuentra en el intervalo $[0, \pi]$ es $\pi/4$. Por tanto, el ángulo entre $C_1$ y $C_2$ es $\theta = \pi/4$, y la rotación de $z_1'$ sobre $z_2'$ es contra las manecillas del reloj. Por otra parte,

$$\arg(w_2') - \arg(w_2') = \arg(1 - i) - \arg(1) = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi,$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, no tiene valor en $[0, \pi]$, pero tiene el valor único $-\pi/4$ en el intervalo $(-\pi, 0)$. Por tanto, el ángulo entre $C_1'$ y $C_2'$ es $\phi = \pi/4$, y la rotación de $w_1'$ sobre $w_2'$ es en el sentido de las manecillas del reloj.

**Funciones analíticas** Ahora usamos (1) para demostrar el siguiente teorema.

**Teorema 7.1.1 Mapeo conforme**

Si $f$ es una función analítica en un dominio $D$ que contiene a $z_0$, y si $f'(z_0) \neq 0$ entonces $w = f(z)$ es un mapeo conforme en $z_0$.

**Demostración** Supongamos que $f$ es analítica en un dominio $D$ que contiene a $z_0$, y que $f'(z_0) \neq 0$. Sean $C_1$ y $C_2$ dos curvas suaves en $D$ parametrizadas por $z_1(t)$ y $z_2(t)$, respectivamente, con $z_1(t_0) = z_2(t_0) = z_0$. Además, supongamos que $w = f(z)$ mapea las curvas $C_1$ y $C_2$ sobre las curvas $C_1'$ y $C_2'$. Queremos demostrar que el ángulo $\theta$ entre $C_1$ y $C_2$ en $z_0$ es igual al ángulo $\phi$ entre $C_1'$ y $C_2'$ en $f(z_0)$, tanto en magnitud como en sentido. Podemos suponer, renumerando $C_1$ y $C_2$ si es necesario, que $z_1' = z_1'(t_0)$ se puede rotar en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de 0 un ángulo $\theta$ sobre $z_2' = z_2'(t_0)$. Por tanto, por (1), el ángulo $\theta$ es el valor único de $\arg(z_2') - \arg(z_1')$ en el intervalo $[0, \pi]$. De (11) de la sección 2.2, $C_1'$ y $C_2'$ se parametrizan con $w_1(t) = f(z_1(t))$ y $w_2(t) = f(z_2(t))$. Para calcular los vectores tangentes $w_1'$ y $w_2'$ para $C_1'$ y $C_2'$ en $f(z_0) = f(z_1(t_0)) = f(z_2(t_0))$ se utiliza la regla de la cadena

$$w_1' = w_1'(t_0) = f'(z_1(t_0)) \cdot z_1'(t_0) = f'(z_0) \cdot z_1',$$

y

$$w_2' = w_2'(t_0) = f'(z_2(t_0)) \cdot z_2'(t_0) = f'(z_0) \cdot z_2'.$$

Ya que $C_1$ y $C_2$ son suaves, tanto $z_1'$ como $z_2'$ son distintos de cero. Por otra parte, según nuestra hipótesis, tenemos $f'(z_0) \neq 0$. Por tanto, tanto $w_1'$ como $w_2'$ son distintos de cero, y el ángulo $\phi$ entre $C_1'$ y $C_2'$ en $f(z_0)$ es un valor de

$$\arg(w_2') - \arg(w_1') = \arg(f'(z_0) \cdot z_2') - \arg(f'(z_0) \cdot z_1').$$

Ahora con dos aplicaciones de (8) de la sección 1.3 se obtiene:

$$\begin{aligned}\arg(f'(z_0) \cdot z_2') - \arg(f'(z_0) \cdot z_1') &= \arg(f'(z_0)) + \arg(z_2') - [\arg(f'(z_0)) + \arg(z_1')] \\ &= \arg(z_2') - \arg(z_1').\end{aligned}$$

Esta expresión tiene un valor único en $[0, \pi]$, a saber, $\theta$. Por tanto, $\theta = \phi$, tanto en magnitud como en sentido, así que $w = f(z)$ es un mapeo conforme en $z_0$. ❑

Usando el teorema 7.1.1 es relativamente fácil determinar donde una función analítica es un mapeo conforme.

## EJEMPLO 2 Mapeos conformes

**(a)** Por el teorema 7.1.1 la función entera $f(z) = e^z$ es conforme en todos los puntos del plano complejo ya que $f'(z) = e^z \neq 0$ para toda $z$ en $C$.

**(b)** Por el teorema 7.1.1 la función entera $g(z) = z^2$ es conforme si $z \neq 0$ ya que $g'(z) = 2z \neq 0$ cuando $z \neq 0$. ❑

**Puntos críticos** En general, si una función compleja $f$ es analítica en un punto $z_0$ y si $f'(z_0) = 0$, entonces $z_0$ se llama **punto crítico** de $f$. Aunque esto no se deduce del teorema 7.1.1, es cierto que las funciones analíticas son no conformes en los puntos críticos. Más específicamente, podemos demostrar que el siguiente aumento de los ángulos se produce en un punto crítico.

**Teorema 7.1.2 Aumento de ángulo en un punto crítico**

Sea $f$ analítica en el punto crítico $z_0$. Si $n > 1$ es un entero tal que $f'(z_0) = f''(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$ y $f^{(n)}(z_0) \neq 0$, entonces el ángulo entre cualesquiera dos curvas suaves que se intersectan en $z_0$ aumenta en un factor de $n$ por el mapeo complejo $w = f(z)$. En particular, $w = f(z)$ no es un mapeo conforme en $z_0$.

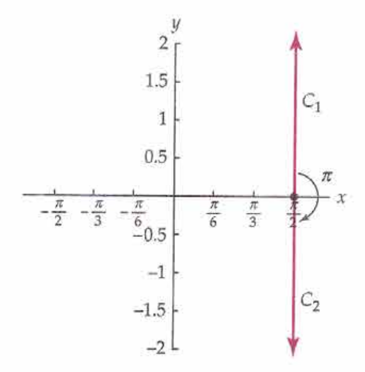
En el problema 22 de los ejercicios 7.1, se esboza una demostración del teorema 7.1.2.

## EJEMPLO 3 Mapeos conformes

Determine todos los puntos en los que el mapeo $f(z) = \text{sen}\, z$ es conforme.

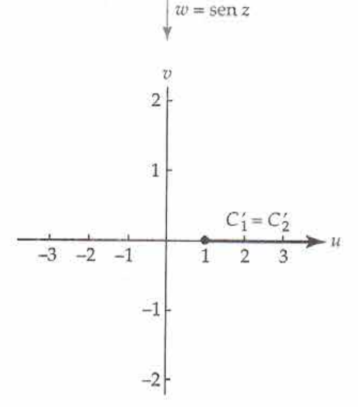
**Solución** La función $f(z) = \text{sen}\, z$ es entera, y de la sección 4.3 tenemos que $f'(z) = \cos z$. En (21) de la sección 4.3 encontramos que $\cos z = 0$ si y sólo si $z = (2n + 1)\pi/2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, y así cada uno de estos puntos es un punto crítico de $f$. Por el teorema 7.1.1, $w = \text{sen}\, z$ es un mapeo conforme para todo $z \neq (2n + 1)\pi/2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Por otra parte, $w = \text{sen}\, z$ no es un mapeo conforme en $z = (2n + 1)\pi/2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Debido a que $f''(z) = -\text{sen}\, z = \pm 1$ en los puntos críticos de $f$, el teorema 7.1.2 indica que los ángulos en estos puntos aumentan por un factor de 2. ❑

El aumento del ángulo en un punto crítico del mapeo complejo $w = \text{sen}\, z$ en el ejemplo 3 se puede ver directamente. Por ejemplo, considere el punto crítico $z = \pi/2$. Bajo $w = \text{sen}\, z$, el rayo vertical $C_1$ en el plano $z$ que sale de $z = \pi/2$ y dado por $z = \pi/2 + iy$, $y \geq 0$, se mapea sobre el conjunto en el plano $w$ dado por $w = \text{sen}\,(\pi/2) \cosh y + i \cos(\pi/2) \text{senh}\, y$, $y \geq 0$. Ya que $\text{sen}\,(\pi/2) = 1$ y $\cos(\pi/2) = 0$, la imagen se puede escribir como $w = \cosh y$, $y \geq 0$. Es decir, la imagen $C'_1$ es un rayo en el plano $w$ que sale de $w = 1$ y que contiene al punto $w = 2$. Un análisis similar muestra que la imagen de $C'_2$ del rayo vertical $C_2$ dado por $z = \pi/2 + iy$, $y \leq 0$, es también el rayo que sale de $w = 1$ y que contiene el punto $w = 2$. Es decir, $C'_1 = C'_2$. El ángulo entre los rayos $C_1$ y $C_2$ en el plano $z$ es $\pi$, por lo que el teorema 7.1.2 implica que el ángulo entre sus imágenes en el plano $w$ se incrementa a $2\pi$, o, equivalentemente, 0. Esto concuerda con la observación de que $C'_1 = C'_2$. Vea la figura 7.1.4.




(a) El ángulo entre los rayos verticales en el plano $z$ es $\pi$

$w = \text{sen}\, z$




(b) El ángulo entre las imágenes de los rayos en (a) es $2\pi$ o 0

Figura 7.1.4 El mapeo $w = \text{sen}\, z$

**Mapeos conformes usando tablas** En la sección 4.5 se introdujo un método para resolver un determinado tipo de problema con valores en la frontera usando mapeos complejos. En concreto, vimos que un problema de Dirichlet en un dominio $D$ complicado se puede resolver encontrando un mapeo *analítico* de $D$ sobre un dominio $D'$ más sencillo en el que el problema de Dirichlet asociado ya ha sido resuelto. Al final de este capítulo veremos una aplicación similar de los mapeos *conformes* a un tipo generalizado de problema de Dirichlet. En estas aplicaciones, nuestro método para producir una solución en un dominio $D$ primero necesitará que encontremos un mapeo *conforme* de $D$ sobre un dominio simple $D'$ en el que el problema asociado con valores en la frontera tenga una solución. Una ayuda importante en esta tarea es la tabla de mapeos conformes dados en el apéndice III.

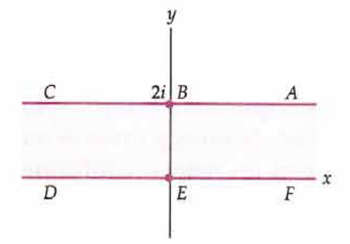
Los mapeos del apéndice III se han clasificado como mapeos elementales (E-1 a E-9), mapeos sobre semiplanos (H-l a H-6), mapeos sobre regiones circulares (C-l a C-5), y miscelánea de mapeos (M-1 a M-10). Muchas propiedades de los mapeos que se presentan en esta tabla se han deducido en los capítulos 2 y 4, mientras que otras propiedades se deducen en las siguientes secciones. Cuando utilice la tabla, considere que en algunos casos el mapeo deseado aparecerá como una sola entrada en la tabla, mientras que en otros casos se pueden requerir uno o más mapeos sucesivos de la tabla. También debe observar que los mapeos del Apéndice III son, en general, sólo mapeos conformes de los interiores de las regiones que se muestran. Por ejemplo, es evidente que el mapeo complejo que se muestra en la entrada E-4 no es conforme en $B = 0$. Como regla general, cuando nos referimos a un mapeo conforme de una región $R$ sobre una región $R'$ requerimos para ello que el mapeo sea conforme en los puntos del interior de $R$.

*Nota* ➡

### EJEMPLO 4 Uso de una tabla de mapeos conformes

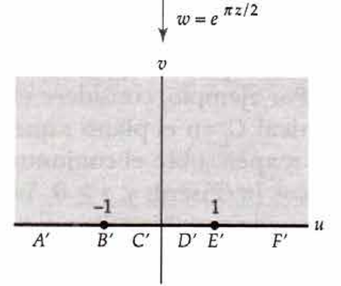
Use el apéndice III para encontrar un mapeo conforme de la franja horizontal infinita $0 \leq y \leq 2$, $-\infty < x < \infty$, sobre el semiplano superior $v \geq 0$. Bajo este mapeo, ¿cuál es la imagen del eje $x$ negativo?

**Solución** En la entrada H-2 en el apéndice III se presenta un mapeo de una franja infinita horizontal sobre el semiplano superior. Haciendo $a = 2$, se obtiene el mapeo deseado $w = e^{\pi z/2}$. De H-2 también vemos que los puntos marcados $D$ y $E = 0$ en el eje $x$ negativo en el plano $z$ se mapean sobre los puntos $D'$ y $E' = 1$ en eje $u$ positivo en el plano $w$. De las posiciones relativas de estos puntos, concluimos que el eje $x$ negativo se mapea sobre el intervalo $(0, 1]$ en el eje $u$ con $w = e^{\pi z/2}$. Vea la figura 7.1.5. Esta observación también se puede comprobar usando parametrizaciones. ❑




**(a)** Franja horizontal $0 \leq y \leq 2$

$w = e^{\pi z/2}$



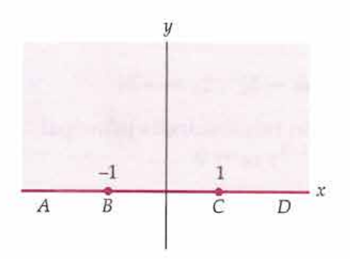

**(b)** Imagen de la franja en (a)

Figura 7.1.5 Figura para el ejemplo 4

### EJEMPLO 5 Uso de una tabla de mapeos conformes

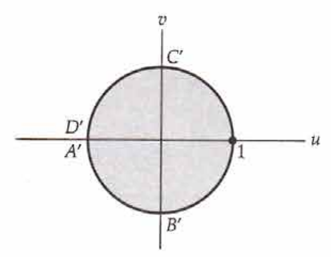
Use el apéndice III para encontrar un mapeo conforme de la franja horizontal infinita $0 \leq y \leq 2$, $-\infty < x < \infty$, sobre el disco unitario $|w| \leq 1$. Bajo este mapeo, ¿cuál es la imagen del eje $x$ negativo?

**Solución** El apéndice III no tiene una entrada que mapee una franja horizontal infinita en el disco unitario. Por tanto, construimos un mapeo conforme que hace esto componiendo dos mapeos de la tabla. En el ejemplo 4 se encontró que la franja horizontal infinita $0 \leq y \leq 2$, $-\infty < x < \infty$, se mapea sobre el semiplano superior por $f(z) = e^{\pi z/2}$. Además, desde la entrada C−4 vemos




**(a)** Imagen de la franja $0 \leq y \; 2 \leq$ en $w = e^{\pi z/2}$

$w = \frac{i-z}{i+z}$




**(b)** Imagen del semiplano en (a) bajo $w = \frac{i-z}{i+z}$

**Figura 7.1.6** Figura para el ejemplo 5

que el semiplano superior se mapea sobre el disco unitario por $g(z) = \dfrac{i-z}{i+z}$. La composición de estas dos funciones

$$w = g(f(z)) = \frac{i - e^{\pi z/2}}{i + e^{\pi z/2}}$$

por tanto, mapea la franja $0 \leq y \leq 2, -\infty < x < \infty$, sobre el disco unitario $|w| \leq 1$. Bajo el primero de estos mapeos sucesivos, el eje real negativo se mapea sobre el intervalo $(0, 1]$ en el eje real como se observó en el ejemplo 4. Examinando la entrada C-4 (o la figura 7.1.6) se encuentra que el intervalo de 0 a $C = 1$ se mapea sobre el arco circular de 1 a $C' = i$ en la circunferencia unitaria $|w| = 1$. Por tanto, concluimos que el eje real negativo se mapea sobre el arco circular de 1 a $i$ en la circunferencia unitaria bajo $w = \dfrac{i - e^{\pi z/2}}{i + e^{\pi z/2}}$. ❑

## Observaciones

En el análisis anterior sobre mapeos conformes usando tablas que indican el hecho de que en muchas aplicaciones se necesita encontrar un mapeo conforme de un dominio $D$ sobre un dominio más simple $D'$. Una pregunta natural es si tal mapeo siempre existe. Es decir, dados los dominios $D$ y $D'$, ¿existe un mapeo conforme de $D$ sobre $D'$? Una respuesta a esta pregunta fue dada por el matemático Bernhard Riemann (1826-1866). Aunque hubo un vacío en la demostración original de Riemann (que se llenó con posterioridad), de este sorprendente teorema aún lleva su nombre:

> ***El teorema del mapeo de Riemann*** *Sea $D$ un dominio simplemente conexo en el plano $z$ tal que $D$ no es todo C. Entonces existe un mapeo conforme uno a uno, $w = f(z)$ de $D$ sobre el disco unitario abierto $|w| < 1$ en el plano $w$.*

No es claro de inmediato que este teorema responda a nuestra pregunta de la existencia de un mapeo de $D$ sobre $D'$. Para que esto suceda, primero se utiliza el teorema para encontrar un mapeo conforme $f$ de $D$ sobre el disco unitario abierto $|w| < 1$. A continuación, aplicamos el teorema una segunda vez para obtener un mapeo $g$ de $D'$ sobre el disco unitario abierto $|w| < 1$. Ya que el teorema asegura que $g$ es uno a uno, tiene una función inversa bien definida $g^{-1}$ que mapea el disco unitario abierto sobre $D'$. El mapeo deseado de $D$ sobre $D'$ está dado por la composición $w = g^{-1} \circ f(z)$.

El teorema de Riemann es de importancia crítica teórica, pero su demostración no es *constructiva*. Esto significa que el teorema establece la *existencia* del mapeo $f$ pero no ofrece ninguna forma de realmente encontrar una fórmula para $f$. Una demostración del teorema de Riemann está mucho más allá del alcance de este libro. Se le sugiere al lector interesado referirse al libro de *Análisis Complejo* de Lars V. Ahlfors, McGraw-Hill, 1979.

## EJERCICIOS 7.1 *Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-19.*

En los problemas 1 a 6 determine dónde el mapeo complejo $w = f(z)$ es conforme.

**1.** $f(z) = z^3 - 3z + 1$

**2.** $f(z) = z^2 + 2iz - 3$

**3.** $f(z) = z - e^{-z} + 1 - i$

**4.** $f(z) = ze^{z^2-2}$

**5.** $f(z) = \tan z$

**6.** $f(z) = z - \mathrm{Ln}(z + i)$

En los problemas 7 a 10 proceda como en el ejemplo 1 para mostrar que la función dada $f$ no es conforme en el punto indicado.

**7.** $f(z) = (z - i)^3$; $z_0 = i$

**8.** $f(z) = (iz - 3)^2$; $z_0 = -3i$

**9.** $f(z) = e^{z^2}$; $z_0 = 0$

**10.** la función raíz cuadrada principal $f(z) = z^{1/2}$; $z_0 = 0$

En los problemas 11 a 16 utilice el apéndice III para encontrar un mapeo conforme de la región $R$ que se muestra en color sobre la región $R'$ que se muestra en gris. Después, busque la imagen de la curva de $A$ a $B$.

**11.**

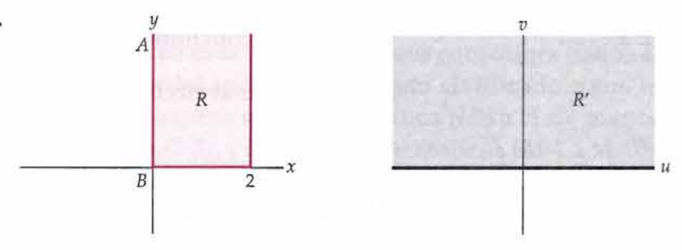



Figura 7.1.7 Figura para el problema 11

**12.**

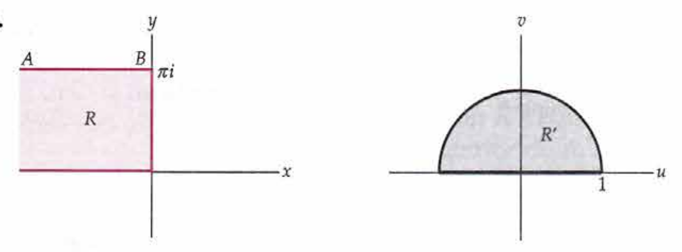



Figura 7.1.8 Figura para el problema 12

**13.**

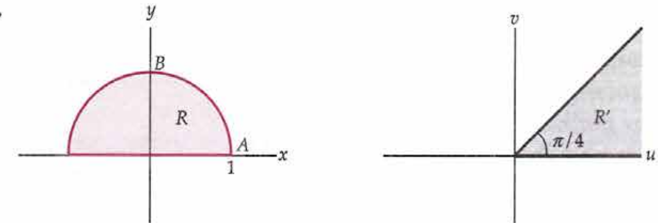



Figura 7.1.9 Figura para el problema 13

**14.**

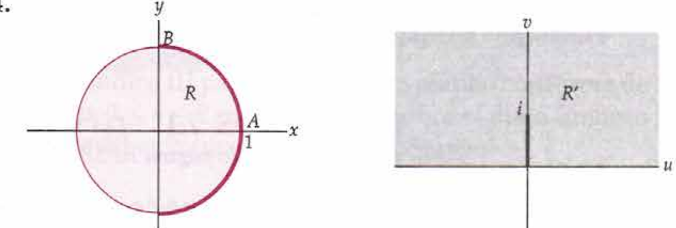



Figura 7.1.10 Figura para el problema 14

**15.**

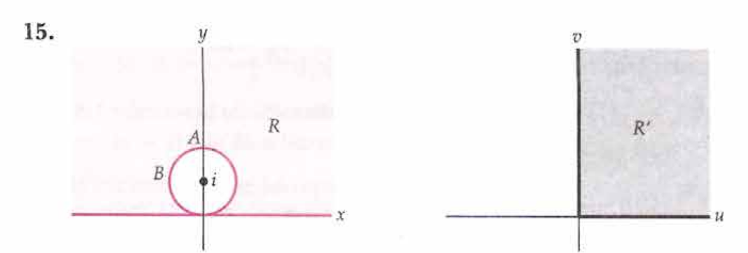



Figura 7.1.11 Figura para el problema 15

**16.**

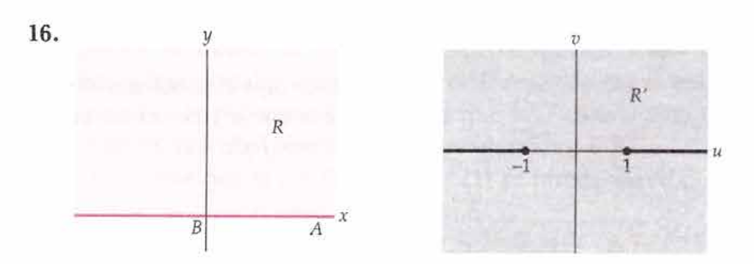



Figura 7.1.12 Figura para el problema 16

## Enfocando los conceptos

**17.** ¿Dónde es conforme el mapeo $w = \bar{z}$? Justifique su respuesta.

**18.** Supongamos que $w = f(z)$ es un mapeo conforme en todos los puntos en el plano complejo. ¿Dónde es conforme el mapeo $w = \overline{f(\bar{z})}$? Justifique su respuesta.

**19.** Supongamos que $w = f(z)$ es un mapeo conforme en todos los puntos en el plano complejo. ¿Dónde es conforme el mapeo $w = e^{f(z)}$?

**20.** Este problema se refiere a la determinación del ángulo entre dos curvas $C_1$ y $C_2$ en un punto donde una (o ambas) curvas tienen un vector tangente cero.

(a) Suponga que dos curvas $C_1$ y $C_2$ están parametrizadas con $z_1(t)$ y $z_2(t)$, respectivamente, y que las curvas se intersectan en $z_1(t_0) = z_2(t_0) = z_0$. Supongamos también que tanto $z_1$ y $z_2$ son funciones derivables de $t$, y sea $z_1' = z_1'(t_0)$ y $z_2' = z_2'(t_0)$. Explique por qué $\arg(z_2') - \arg(z_1')$ *no* representa el ángulo entre $C_1$ y $C_2$, si ya sea $z_1'$ o $z_2'$ es cero.

(b) Explique por qué $\lim_{t \to t_0} [\arg(z_2(t) - z_0)] - \lim_{t \to t_0} [\arg(z_1(t) - z_0)]$ representa el ángulo entre el $C_1$ y $C_2$, independientemente de si $z_1'$ o $z_2'$ es cero.

(c) Utilice el inciso (b) para determinar el ángulo entre las curvas parametrizadas por $z_1(t) = t + it^2$ y $z_2(t) = t^2 + it^2$, $-1 \le t \le 1$, en $z_0 = 0$. ¿Este cálculo coincide con su intuición?

**21.** En la página 355 se demostró que la función $f(z) = z^2$ no fue conforme en $z_0 = 0$ porque el ángulo entre los ejes $x$ y $y$ positivos se duplicó. En este problema, demostrará que *todo* par de curvas suaves que se intersectan en $z_0 = 0$ tienen un ángulo entre ellos duplicado para $f(z) = z^2$. Este es un caso muy particular del teorema 7.1.2.

(a) Suponga que las curvas suaves $C_1$ y $C_2$ están parametrizadas por $z_1(t)$ y $z_2(t)$ con $z_1(t_0) = z_2(t_0) = 0$. Si $z_1' = z_1'(t_0)$ y $z_2' = z_2'(t_0)$ son distintos de cero, entonces el ángulo $\theta$ entre $C_1$ y $C_2$ está dado por (1). Explique por qué $\phi = \arg(f'(0) \cdot z_2') - \arg(f'(0) \cdot z_1')$ *no* representa el ángulo entre las imágenes $C_1'$ y $C_2'$ de $C_1$ y $C_2$ bajo el mapeo $w = f(z) = z^2$, respectivamente.

(b) Utilice el problema 20 para escribir una expresión que contenga los argumentos que representen al ángulo $\phi$ entre $C_1'$ y $C_2'$. [*Sugerencia:* $C_1'$

y $C'_2$ están parametrizados por $w_1(t) = f(z_1(t)) = [z_1(t)]^2$ y $w_2(t) = f(z_2(t)) = [z_2(t)]^2$.]

(c) Utilice (8) de la sección 1.3 para demostrar que su expresión para $\phi$ de (b) es igual a $2\theta$.

**22.** En este problema demostrará el teorema 7.1.2. Sea $f$ una función analítica en el punto $z_0$ tal que $f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$ y $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ para algún $n > 1$.

(a) Explique por qué $f$ puede escribirse como

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n (1 + g(z)),$$

donde $g$ es una función analítica en $z_0$ y $g(z_0) = 0$.

(b) Utilice (a) y el problema 20 para demostrar que el ángulo entre dos curvas suaves que se intersectan en $z_0$ se incrementa en un factor de $n$ por el mapeo $w = f(z)$.

## 7.2 Transformaciones fraccionales lineales

En muchas aplicaciones que involucran problemas con valores en la frontera asociados con la ecuación de Laplace, se necesita encontrar un mapeo conforme que mapeen disco sobre el semiplano $v \geq 0$. Este mapeo tendría que mapear la frontera circular del disco en frontera lineal del semiplano. Una clase importante de mapeos elementales conformes que mapean circunferencias a rectas (y viceversa) son las transformaciones fraccionales lineales. En esta sección vamos a definir y estudiar esta clase especial de mapeos.

**Transformaciones fraccionales lineales** En la sección 2.3 hemos examinado mapeos lineales complejos $w = az + b$ donde $a$ y $b$ son constantes complejas y $a \neq 0$. Recuerde que tales mapeos actúan rotando, ampliando, y trasladando puntos en el plano complejo. Después analizamos el mapeo complejo recíproco $w = 1/z$ en la sección 2.5. Una propiedad importante del mapeo recíproco, cuando se define en el plano complejo extendido, es que mapea algunas rectas en circunferencias y algunas circunferencias en rectas. Un tipo más general de mapeo que tiene propiedades similares es una transformación fraccional lineal definida de la siguiente manera.

**Definición 7.2.1 Transformación fraccional lineal**

Si $a$, $b$, $c$ y $d$ son constantes complejas con $ad - bc \neq 0$, entonces la función compleja definida por:

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{1}$$

se llama **transformación fraccional lineal.**

Las transformaciones fraccionales lineales también se llaman **transformaciones de Möbius** o **transformaciones bilineales**. Si $c = 0$, entonces la transformación $T$ dada por (1) es un mapeo lineal, por lo que un mapeo lineal es un caso especial de una transformación fraccional lineal. Si $c \neq 0$, entonces podemos escribir

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{bc - ad}{c}\frac{1}{cz + d} + \frac{a}{c}. \tag{2}$$

Haciendo $A = \dfrac{bc - ad}{c}$ y $B = \dfrac{a}{c}$, vemos que la transformación lineal $T$ en (2) se puede escribir como la composición de $T(z) = f \circ g \circ h(z)$, donde $f(z) = Az + B$ y $h(z) = cz + d$ son funciones lineales y $g(z) = 1/z$ es la función recíproca.

El dominio de una transformación fraccional lineal $T$ dada por (1) es el conjunto de todos los complejos $z$ tales que $z \neq -d/c$. Además, dado que

$$T'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

se sigue del teorema 7.1.1 y del requisito de que $ad - bc \neq 0$ que las transformaciones fraccionales lineales son conformes en sus dominios. El requisito de que $ad - bc \neq 0$ también asegura que la $T$ es una función uno a uno en su dominio, vea el problema 27 de los ejercicios 7.2.

Obsérvese que si $c \neq 0$, entonces (1) se puede escribir como

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{(a/c)\,(z + b/a)}{z + d/c} = \frac{\phi(z)}{z - (-d/c)},$$

donde $\phi(z) = (a/c)\,(z + b/a)$. Debido a que $ad - bc \neq 0$, tenemos que $\phi(-d/c) \neq 0$, y así, del teorema 6.4.2 de la sección 6.4 se deduce que el punto $z = -d/c$ es un polo simple de $T$.

Cuando $c \neq 0$, es decir, cuando $T$ no es una función lineal, a menudo es útil ver a $T$ como un mapeo del plano complejo extendido. Dado que $T$ se define para todos los puntos en el plano extendido, salvo en el polo $z = -d/c$ y el punto ideal $\infty$, sólo tenemos que ampliar la definición de $T$ para incluir estos puntos. Hacemos esta definición considerando el límite de $T$ cuando $z$ tiende al polo y cuando $z$ tiende al punto ideal. Ya que

$$\lim_{z \to -d/c} \frac{cz + d}{az + b} = \frac{0}{a(-d/c) + b} = \frac{0}{-ad + bc} = 0,$$

se deduce de (25) de la sección 2.6 que

$$\lim_{z \to -d/c} \frac{az + b}{cz + d} = \infty.$$

Por otra parte, de (24) de la sección 2.6 se tiene que

$$\lim_{z \to \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \lim_{z \to 0} \frac{a/z + b}{c/z + d} = \lim_{z \to 0} \frac{a + zb}{c + zd} = \frac{a}{c}.$$

Los valores de estos dos límites indican como ampliar la definición de $T$. En particular, si $c \neq 0$, entonces consideramos a $T$ como un mapeo uno a uno del plano complejo extendido definido por:

$$T(z) = \begin{cases} \dfrac{az + b}{cz + d}, & z \neq -\dfrac{d}{c}, z \neq \infty \\ \infty, & z = -\dfrac{d}{c} \\ \dfrac{a}{c}, & z = \infty. \end{cases} \tag{3}$$

Un caso especial de (3) que corresponde a $a = d = 0$ y $b = c \neq 0$ es la función recíproca definida en el plano complejo extendido. Consulte la definición 2.5.1.

**EJEMPLO 1 Una transformación fraccional lineal**

Encuentre las imágenes de los puntos 0, $1 + i$, $i$ e $\infty$ bajo la transformación fraccional lineal $T(z) = (2z + 1)/(z - i)$.

**Solución** Para $z = 0$ y $z = 1 + i$ tenemos:

$$T(0) = \frac{2(0)+1}{0-i} = \frac{1}{-i} = i \quad \text{y} \quad T(1+i) = \frac{2(1+i)+1}{(1+i)-i} = \frac{3+2i}{1} = 3+2i.$$

Identificando $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$, y $d = -i$ en (3), tenemos también:

$$T(i) = T\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty \quad \text{y} \quad T(\infty) = \frac{a}{c} = 2.$$

❑

## Propiedad de conservación de la circunferencia

El análisis anterior, ejemplo 1, nos indica que la función recíproca $1/z$ es un caso especial de una transformación fraccional lineal. Vimos dos propiedades interesantes del mapeo recíproco en la sección 2.7. Primera, la imagen de una circunferencia centrada en el polo $z = 0$ de $1/z$ es una circunferencia, y segundo, la imagen de una circunferencia con centro en el eje $x$ o eje $y$, que contiene al polo $z = 0$ es una recta vertical u horizontal. Las transformaciones fraccionales lineales tienen una propiedad de mapeo similar. Este es el contenido del siguiente teorema.

**Teorema 7.2.1 Propiedad de conservación de la circunferencia**

Si $C$ es una circunferencia en el plano $z$, y si $T$ es una transformación fraccional lineal dada por (3), entonces la imagen de $C$ bajo $T$ es ya sea una circunferencia o una recta en el plano $w$ extendido. La imagen es una recta si y sólo si $c \neq 0$ y el polo $z = -d/c$ está sobre la circunferencia $C$.

**Demostración** Cuando $c = 0$, $T$ es una función lineal, y vimos en la sección 2.3 que las funciones lineales mapean circunferencias sobre circunferencias. Queda por ver que el teorema aún vale para $c \neq 0$. Supongamos entonces que $c \neq 0$. De (2) tenemos que $T(z) = f \circ g \circ h(z)$, donde $f(z) = Az + B$ y $h(z) = cz + d$ son funciones lineales y $g(z) = 1/z$ es la función recíproca. Observe que, puesto que $h$ es un mapeo lineal, la imagen $C'$ de la circunferencia $C$ bajo $h$ es una circunferencia. A continuación examinaremos dos casos:

**Caso 1** Suponga que el origen $w = 0$ está en la circunferencia $C'$. Esto ocurre si y sólo si el polo $z = -d/c$ está en la circunferencia $C$. A partir de las observaciones de la sección 2.5, si $w = 0$ está en $C'$, entonces la imagen de $C'$ bajo $g(z) = 1/z$ es ya sea una recta horizontal o vertical $L$. Además, dado que $f$ es una función lineal, la imagen de la recta $L$ bajo $f$ es también una recta. Por tanto, hemos demostrado que si el polo $z = -d/c$ se encuentra en la circunferencia $C$, entonces la imagen de $C$ bajo $T$ es una recta.

**Caso 2** Suponga que el punto $w = 0$ no está en $C'$. Es decir, el polo $z = -d/c$ no está en la circunferencia $C$. Sea $C'$ la circunferencia dada por $|w - w_0| = \rho$. Si hacemos que $\xi = f(w) = 1/w_0$ y $\xi_0 = f(w_0) = 1/w_0$, entonces para cualquier punto de $w$ en $C'$ tenemos

$$|\xi - \xi_0| = \left|\frac{1}{w} - \frac{1}{w_0}\right| = \frac{|w - w_0|}{|w|\,|w_0|} = \rho|\xi_0||\xi|. \tag{4}$$

Se puede demostrar que el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación

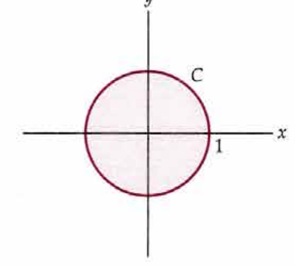
$$|\xi - a| = \lambda|\xi - b| \tag{5}$$

es una recta si $\lambda = 1$ y es una circunferencia si $\lambda > 0$ y $\lambda \neq 1$. Vea el problema 28 de los ejercicios 7.2. Así, con las identificaciones $a = \xi_0$, $b = 0$ y $\lambda = \rho|\xi_0|$ vemos que (4) se puede poner en la forma (5). Ya que $w = 0$ no está en $C'$, tenemos $|w_0| \neq \rho$, o, equivalentemente, $\lambda = \rho|\xi_0| \neq 1$. Esto implica que el conjunto de puntos dados por (4) es una circunferencia. Por último, puesto que $f$ es una función lineal, la imagen de esta circunferencia bajo $f$ es de nuevo una circunferencia, y así llegamos a la conclusión de que la imagen de $C$ bajo $T$ es una circunferencia. ❑

La observación clave en la demostración anterior fue que una transformación fraccional lineal (1) se puede escribir como una composición de la función recíproca y dos funciones lineales como se muestra en (2). En el problema 27 de los ejercicios 2.5 se le pidió que mostrara que la imagen de cualquier recta $L$ bajo el mapeo recíproco $w = 1/z$ es una recta o una circunferencia. Por tanto, por un razonamiento similar, también se puede demostrar:

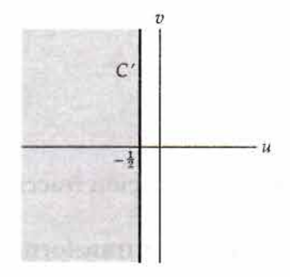
### *Mapeo de rectas a circunferencias con $T(z)$*

Si $T$ es una transformación fraccional lineal dada por (3), entonces la imagen de la recta $L$ bajo $T$ es ya sea una recta o una circunferencia. La imagen es una circunferencia si y sólo si $c \neq 0$ y el polo $z = -d/c$ no está en la recta $L$.




**(a)** La circunferencia unitaria $|z| = 1$

$w = \dfrac{z+2}{z-1}$




**(b)** La imagen de la circunferencia en (a)

**Figura 7.2.1** La transformación fraccional lineal $T(z) = (z + 2)/(z - 1)$

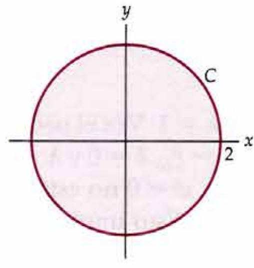
## EJEMPLO 2 Imagen de una circunferencia

Encuentre la imagen de la circunferencia unitaria $|z| = 1$ bajo la transformación fraccional lineal $T(z) = (z + 2)/(z - 1)$. ¿Cuál es la imagen del interior $|z| < 1$ de esta circunferencia?

**Solución** El polo de $T$ es $z = 1$ y este punto está en la circunferencia unitaria $|z| = 1$. Por tanto, por el teorema 7.2.1 se concluye que la imagen de la circunferencia unitaria es una recta. Dado que la imagen es una recta, se determina con cualesquiera dos puntos. Ya que $T(-1) = -\frac{1}{2}$ y $T(i) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$, vemos que la imagen es la recta $u = -\frac{1}{2}$. Para contestar la segunda pregunta primero considere que una transformación fraccionaria lineal es una función racional, por lo que es continua en su dominio. Como consecuencia, la imagen del interior $|z| < 1$ de la circunferencia unitaria ya sea el semiplano $u < -\frac{1}{2}$ o el semiplano $u > -\frac{1}{2}$. Usando $z = 0$ como un **punto de prueba**, encontramos que $T(0) = -2$, que está a la izquierda de la recta $u = -\frac{1}{2}$, por lo que la imagen es el semiplano $u < -\frac{1}{2}$. Este mapeo se ilustra en la figura 7.2.1. La circunferencia $|z| = 1$ que se muestra a color en la figura 7.2.1(a) y su imagen $u = -\frac{1}{2}$ se muestra en negro en la figura 7.2.1(b). ❑

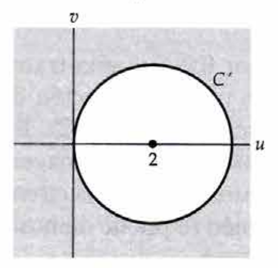
## EJEMPLO 3 Imagen de una circunferencia

Encuentre la imagen de la circunferencia unitaria $|z| = 2$ bajo la transformación fraccional lineal $T(z) = (z + 2)/(z - 1)$. ¿Cuál es la imagen del disco $|z| \leq 2$ bajo $T$?




(a) La circunferencia $|z| = 2$

$w = \frac{z+2}{z-1}$




(b) La imagen de esta circunferenciaen (a)

Figura 7.2.2 La transformación fraccional lineal $T(z) = \dfrac{z+2}{z-1}$

**Solución** En este ejemplo el polo $z = 1$ no se encuentra en la circunferencia $|z| = 2$, y así el teorema 7.2.1 indica que la imagen de $|z| = 2$ es una circunferencia $C'$. Para encontrar una descripción algebraica de $C'$, primero observamos que la circunferencia $|z| = 2$ es simétrica con respecto al eje $x$. Es decir, si $z$ está en la circunferencia $|z| = 2$, entonces también está $\bar{z}$. Por otra parte, se observa que para todo $z$,

$$T(\bar{z}) = \frac{\bar{z}+2}{\bar{z}-1} = \frac{\overline{z+2}}{\overline{z-1}} = \overline{\left(\frac{z+2}{z-1}\right)} = \overline{T(z)}.$$

Por tanto, si $z$ y $\bar{z}$ están en la circunferencia $|z| = 2$, entonces debemos tener que tanto $w = T(z)$ y $\bar{w} = \overline{T(z)} = T(\bar{z})$ están en la circunferencia $C'$. Por lo que se deduce que $C'$ es simétrica con respecto al eje $u$. Ya que $z = 2$ y $-2$ están en la circunferencia $|z| = 2$, los dos puntos $T(2) = 4$ y $T(-2) = 0$ están en $C'$. La simetría de $C'$ implica que 0 y 4 son los puntos finales de un diámetro, por lo que $C'$ es la circunferencia $|w - 2| = 2$. Usando $z = 0$ como un punto de prueba, encontramos que $w = T(0) = -2$, que está fuera de la circunferencia $|w - 2| = 2$. Por tanto, la imagen del interior de la circunferencia $|z| = 2$ es el exterior de la circunferencia círculo $|w - 2| = 2$. En resumen, el disco $|z| \leq 2$ que se muestra a color en la figura 7.2.2(a) se mapea sobre la región $|w - 2| \geq 2$ que se muestra en gris en la figura 7.2.2(b) por la transformación fraccionaria lineal $T(z) = (z + 2)/(z - 1)$. ❑

## Transformaciones fraccionales lineales como matrices

Las matrices se pueden utilizar para simplificar muchos de los cálculos asociados con las transformaciones fraccionales lineales. Para hacerlo, asociamos la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{6}$$

con la transformación fraccional lineal

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}. \tag{7}$$

La representación en (6) no es única ya que si $e$ es un número complejo distinto de cero, entonces la transformación fraccional lineal $T(z) = (az + b)/(cz + d)$ también está dada por $T(z) = (eaz + eb)/(ecz + ed)$. Sin embargo, si $e \neq 1$, entonces las dos matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} ea & eb \\ ec & ed \end{pmatrix} = e\mathbf{A} \tag{8}$$

no son iguales a pesar de que representan la misma transformación fraccional lineal.

Es fácil comprobar que la composición de $T_2 \circ T_1$ de las dos transformaciones fraccionales lineales

$$T_1(z) = (a_1 z + b_1)/(c_1 z + d_1) \;\; \text{y} \;\; T_2(z) = (a_2 z + b_2)/(c_2 z + d_2)$$

está representada por el producto de matrices

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 a_1 + b_2 c_1 & a_2 b_1 + b_2 d_1 \\ c_2 a_1 + d_2 c_1 & c_2 b_1 + d_2 d_1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

En el problema 27 de los ejercicios 7.2 se le pedirá encontrar la fórmula para $T^{-1}(z)$ para resolver la ecuación $w = T(z)$ para $z$. La fórmula para la función inversa $T^{-1}(z)$ de una transformación fraccional lineal $T$ de (7) está representada por la inversa de la matriz **A** en (6)

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Identificando $e = \dfrac{1}{ad - bc}$ en (8) también se puede representar $T^{-1}(z)$ por la matriz

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.^{*} \tag{10}$$

**EJEMPLO 4 Usando matrices**

Supongamos que $S(z) = (z - i)/(iz - 1)$ y $T(z) = (2z - 1)/(z + 2)$. Use matrices para encontrar $S^{-1}(T(z))$.

**Solución** Representamos las transformaciones fraccionales lineales $S$ y $T$ por las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

respectivamente. Con (10), la transformación $S^{-1}$ está dada por

$$\begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix},$$

y así, de (9), la composición $S^{-1} \circ T$ está dada por

$$\begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+i & 1+2i \\ 1-2i & 2+i \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$S^{-1}(T(z)) = \frac{(-2+i)z + 1 + 2i}{(1-2i)z + 2 + i}.$$

❑

**Razón cruzada** En las aplicaciones a menudo necesitamos encontrar un mapeo conforme de un dominio $D$ que este acotado por circunferencias sobre un dominio $D'$ que está acotado por rectas. Las transformaciones fraccionales lineales son especialmente adecuadas para dichas aplicaciones. Sin embargo, con el fin de usarlos, debemos determinar un método general

* Usted puede recordar que esta matriz se llama **matriz adjunta** de **A**.

Recuerde que una circunferencia se determina únicamente por tres puntos no colineales

para construir una transformación fraccional lineal $w = T(z)$, que mapea tres puntos dados distintos $z_1$, $z_2$ y $z_3$ sobre la frontera de $D$ a tres puntos dados distintos $w_1$, $w_2$ y $w_3$ sobre la frontera de $D'$. Esto se logra usando la **razón cruzada**, que se define de la siguiente manera.

**Definición 7.2.2 Razón cruzada**

La **razón cruzada** de los números complejos $z$, $z_1$, $z_2$ y $z_3$ es el número complejo

$$\frac{z - z_1}{z - z_3}\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}. \tag{11}$$

Cuando se calcula una razón cruzada, hay que tener cuidado con el orden de los números complejos. Por ejemplo, usted debe comprobar que la razón cruzada de 0, 1, $i$ y 2 es $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}i$, mientras que la razón cruzada de 0, $i$, 1 y 2 es $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$.

Ampliamos el concepto de la relación anarmónica para incluir puntos en el plano complejo extendido usando la fórmula límite (24) de las observaciones de la sección 2.6. Por ejemplo, la razón cruzada de $\infty$, $z_1$, $z_2$ y $z_3$ está dada por el límite

$$\lim_{z\to\infty} \frac{z - z_1}{z - z_3}\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}.$$

El teorema siguiente muestra la importancia de las razones cruzadas en el estudio de las transformaciones fraccionales lineales. En particular, hemos demostrado que la razón cruzada es invariante bajo una transformación fraccional lineal.

**Teorema 7.2.2 Razones cruzadas y transformaciones fraccionales lineales**

Si $w = T(z)$ es una transformación fraccional lineal que mapea los distintos puntos $z_1$ $z_2$ y $z_3$ sobre los distintos puntos $w_1$, $w_2$ y $w_3$, respectivamente, entonces

$$\frac{z - z_1}{z - z_3}\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_3}\frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} \tag{12}$$

para toda $z$.

**Demostración** Sea $R$ la transformación fraccional lineal

$$R(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3}\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}, \tag{13}$$

y considere que $R(z_1) = 0$, $R(z_2) = 1$, y $R(z_3) = \infty$. Considere también la transformación fraccional lineal

$$S(z) = \frac{z - w_1}{z - w_3}\frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1}. \tag{14}$$

Para esta transformación $S$, tenemos $S(w_1) = 0$, $S(w_2) = 1$, y $S(w_3) = \infty$. Por tanto, los puntos $z_1$, $z_2$ y $z_3$ se mapean sobre los puntos $w_1$, $w_2$ y $w_3$ respectivamente, con la transformación fraccional lineal $S^{-1}(R(z))$. De lo que

se deduce que 0, 1 y $\infty$ se mapean sobre 0, 1 e $\infty$, respectivamente, por la composición $T^{-1}(S^{-1}(R(z)))$. Ahora bien, es un ejercicio sencillo comprobar que la única transformación fraccional lineal que mapea 0, 1 e $\infty$ sobre 0, 1, y $\infty$ es el mapeo identidad. Vea el problema 30 de los ejercicios 7.2. De lo que podemos concluir que $T^{-1}(S^{-1}(R(z))) = z$, o, equivalentemente, que $R(z) = S(T(z))$. Identificando $w = T(z)$, se ha demostrado que $R(z) = S(w)$. Por tanto, de (13) y (14) tenemos

$$\frac{z - z_1}{z - z_3}\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_3}\frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1}.$$ ❑

**EJEMPLO 5 Construcción de una transformación fraccional lineal**

Construya una transformación fraccional lineal que mapee los puntos 1, $i$, y $-1$ de la circunferencia unitaria $|z| = 1$ sobre los puntos $-1, 0, 1$ en el eje real. Determine la imagen del interior $|z| < 1$ bajo esta transformación.

**Solución** Identificando $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1$, $w_1 = -1$, $w_2 = 0$, y $w_3 = 1$, en (12) vemos del teorema 7.2.2 que el mapeo deseado $w = T(z)$ debe cumplir

$$\frac{z - 1}{z - (-1)}\frac{i - (-1)}{i - 1} = \frac{w - (-1)}{w - 1}\frac{0 - 1}{0 - (-1)}.$$

Después de resolver para $w$ y de simplificar obtenemos

*Nota*: Una transformación fraccional lineal puede tener muchas formas equivalentes.

$$w = T(z) = \frac{z - i}{iz - 1}.$$

Usando el punto de prueba $z = 0$, obtenemos $T(0) = i$. Por tanto, la imagen del interior $|z| < 1$ es el semiplano superior $v > 0$. ❑

**EJEMPLO 6 Construcción de una transformación fraccional lineal**

Construya una transformación fraccional lineal que mapee de los puntos $-i$, 1, $\infty$ y en la recta $y = x - 1$ sobre los puntos 1, $i$ y $-1$ en la circunferencia unitaria $|w| = 1$.

**Solución** Procedemos como en el ejemplo 5. Utilizando (24) de la sección 2.6, encontramos que la razón cruzada de $z$, $z_1 = -i$, $z_2 = 1$, y $z_3 = \infty$ es

$$\lim_{z_3\to\infty}\frac{z + i}{z - z_3}\frac{1 - z_3}{1 + i} = \lim_{z_3\to 0}\frac{z + i}{z - 1/z_3}\frac{1 - 1/z_3}{1 + i} = \lim_{z_3\to 0}\frac{z + i}{z_3 - 1}\frac{z_3 - 1}{1 + i} = \frac{z + i}{1 + i}.$$

Ahora, de (12) identificando $w_1 = 1$, $w_2 = i$, y $w_3 = -1$, el mapeo deseado $w = T(z)$ debe cumplir

$$\frac{z + i}{1 + i} = \frac{w - 1}{w + 1}\frac{i + 1}{i - 1}.$$

Después de resolver para $w$ y simplificar obtenemos

$$w = T(z) = \frac{z + 1}{-z + 1 - 2i}.$$ ❑

## EJERCICIOS 7.2 *Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-20.*

En los problemas 1 a 4 determine las imágenes de los puntos 0, 1, $i$, y $\infty$ bajo la transformación fraccional lineal $T$ dada.

**1.** $T(z) = \dfrac{i}{z}$ **2.** $T(z) = \dfrac{2}{z - i}$

**3.** $T(z) = \dfrac{z + i}{z - i}$ **4.** $T(z) = \dfrac{z - 1}{z}$

En los problemas 5 a 8 busque la imagen de los discos $|z| \leq 1$ y $|z - i| \leq 1$, bajo la transformación fraccional lineal dada $T$.

**5.** $T$ es el mapeo del problema 1 **6.** $T$ es el mapeo en el problema 2

**7.** $T$ es el mapeo en el problema 3 **8.** $T$ es el mapeo del problema 4

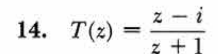
En los problemas 9 a 12 encontramos la imagen de los semiplanos $x \geq 0$ y $y \leq 1$, bajo la transformación fraccional lineal dada $T$.

**9.** $T$ es el mapeo del problema 1 **10.** $T$ es el mapeo en el problema 2

**11.** $T$ es el mapeo en el problema 3 **12.** $T$ es el mapeo del problema 4

En los problemas 13 a 16 encontrar la imagen de la región que se muestra a color bajo la transformación fraccional lineal dada.

**13.** $T(z) = \dfrac{z}{z - 2}$

**14.**  $T(z) = \dfrac{z - i}{z + 1}$

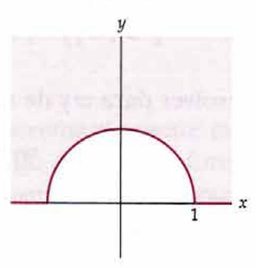



Figura 7.2.3 Figura para el problema 13

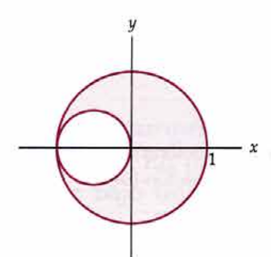
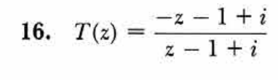



Figura 7.2.4 Figura para el problema 14

**15.** $T(z) = \dfrac{z + 1}{z - 2}$

**16.**  $T(z) = \dfrac{-z - 1 + i}{z - 1 + i}$

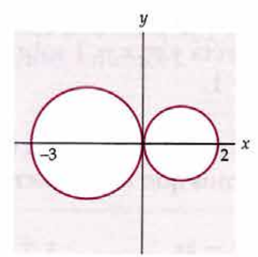



Figura 7.2.5 Figura para el problema 15

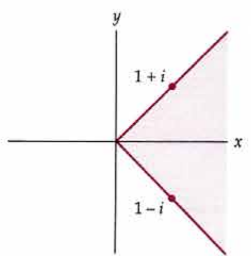



Figura 7.2.6 Figura para el problema 16

En los problemas 17 a 20 use matrices para encontrar (**a**) $S^{-1}(z)$ y (**b**) $S^{-1}(T(z))$.

**17.** $T(z) = \dfrac{z}{iz - 1}$, $S(z) = \dfrac{iz + 1}{z - 1}$ **18.** $T(z) = \dfrac{iz}{z - 2i}$, $S(z) = \dfrac{2z + 1}{z + 1}$

**19.** $T(z) = \dfrac{2z - 3}{z - 3}$, $S(z) = \dfrac{z - 2}{z - 1}$ **20.** $T(z) = \dfrac{z - 1 + i}{iz - 2}$, $S(z) = \dfrac{(2 - i)z}{z - 1 - i}$

En los problemas 21 a 26 construya una transformación fraccional lineal que tome los puntos dados $z_1$, $z_2$ y $z_3$ en los puntos dados $w_1$, $w_2$ y $w_3$ respectivamente.

**21.** $z_1 = -1,\ z_2 = 0,\ z_3 = 2;\ w_1 = 0,\ w_2 = 1,\ w_3 = \infty$

**22.** $z_1 = i,\ z_2 = 0,\ z_3 = -i;\ w_1 = 0,\ w_2 = 1,\ w_3 = \infty$

**23.** $z_1 = 0,\ z_2 = i,\ z_3 = \infty;\ w_1 = 0,\ w_2 = 1,\ w_3 = 2$

**24.** $z_1 = -1,\ z_2 = 0,\ z_3 = 1;\ w_1 = i,\ w_2 = 0,\ w_3 = \infty$

**25.** $z_1 = 1,\ z_2 = i,\ z_3 = -i;\ w_1 = -1,\ w_2 = 0,\ w_3 = 3$

**26.** $z_1 = 1,\ z_2 = i,\ z_3 = -i;\ w_1 = -i,\ w_2 = i,\ w_3 = \infty$

## Enfocando los conceptos

**27.** Sean $a$, $b$, $c$ y $d$ números complejos tales que $ad - bc \neq 0$.

(**a**) Resuelva la ecuación $w = \dfrac{az + b}{cz + d}$ para $z$.

(**b**) Explique por qué (a) implica que la transformación fraccional lineal $T(z) = (az + b)/(cz + d)$ es una función uno a uno.

**28.** Considere la ecuación

$$|z - a| = \lambda|z - b| \qquad (15)$$

donde $\lambda$ es una constante real positiva.

(**a**) Demuestre que el conjunto de puntos que satisfacen (15) es una recta si $\lambda = 1$.

(**b**) Demuestre que el conjunto de puntos que satisfacen (15) es una circunferencia si $\lambda \neq 1$.

**29.** Sea $T(z) = (az + b)/(cz + d)$ una transformación fraccional lineal.

(**a**) Si $T(0) = 0$, ¿entonces, si hay algo, qué se puede decir de los coeficientes $a$, $b$, $c$ y $d$?

(**b**) Si $T(1) = 1$, ¿entonces, si hay algo, qué se puede decir de los coeficientes $a$, $b$, $c$ y $d$?

(**c**) Si $T(\infty) = \infty$, ¿entonces, si hay algo, qué se puede decir de los coeficientes $a$, $b$, $c$ y $d$?

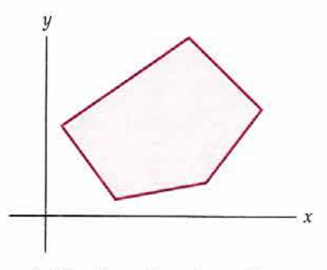
**30.** Utilice el problema 29 para demostrar que si $T$ es una transformación fraccional lineal y $T(0) = 0$, $T(1) = 1$, y $T(\infty) = \infty$, entonces $T$ debe ser la función identidad. Es decir, $T(z) = z$.

**31.** Aplique el teorema 7.2.2 para obtener el mapeo en la entrada H-1 del apéndice III.

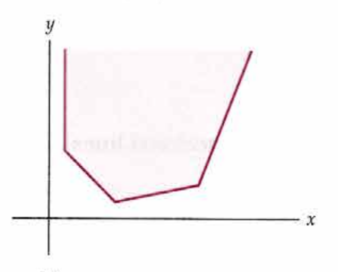
**32.** Aplique el teorema 7.2.2 para obtener el mapeo en la entrada H-3 en el apéndice III.

# 7.3 Transformaciones de Schwarz-Christoffel

Un problema que surge con frecuencia en el estudio del flujo de fluidos es la construcción de un flujo de un fluido ideal que permanece dentro de un dominio poligonal $D'$. Veremos en la sección 7.5 que este problema se puede resolver encontrando un mapeo complejo uno a uno del semiplano $y \geq 0$ sobre la región poligonal que es un mapeo conforme en el dominio $y > 0$. La existencia de este mapeo está garantizada por el teorema del mapeo de Riemann analizado en las observaciones al final de la sección 7.1. Sin embargo, aunque el teorema del mapeo de Riemann afirma la existencia de un mapeo, no da ninguna forma práctica de encontrar una fórmula para el mapeo. En esta sección se presenta la fórmula de Schwarz-Christoffel, que proporciona una fórmula explícita para la derivada de un mapeo conforme del semiplano superior sobre una región poligonal.

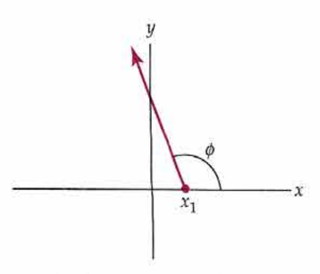



**(a)** Región poligonal acotada



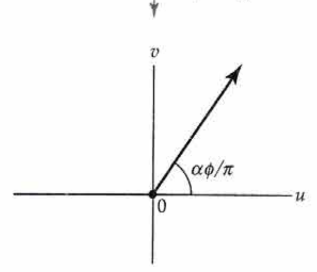

**(b)** Región poligonal no acotada

Figura 7.3.1 Regiones poligonales




**(a)** Rayo que parte de $x_1$

$w = (z - x_1)^{\alpha/\pi}$




**(b)** Imagen del rayo en (a)

Figura 7.3.2 El mapeo $w = (z - x_1)^{\alpha/\pi}$

## Regiones poligonales

Una **región poligonal** en el plano complejo es una región que está acotada por una curva simple suave por tramos, que consiste de un número finito de segmentos de recta. La curva frontera de una región poligonal se llama **polígono** y los extremos de los segmentos de recta en el polígono se llaman **vértices** del polígono. Si un polígono es una curva cerrada, entonces la región acotada por el polígono se llama **región poligonal acotada**, y una región poligonal que no está acotada se llama **región poligonal no acotada**. Vea la figura 7.3.1. En el caso de una región poligonal no acotada, el punto ideal $\infty$ también se llama vértice del polígono.

Ejemplos simples de regiones poligonales incluyen la región acotada por el triángulo con vértices 0, 1 e $i$, que es un ejemplo de una región poligonal acotada, y la región definida por $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y < \infty$, que es un ejemplo de una región poligonal no acotada cuyos vértices son 0, 1, y $\infty$.

## Casos especiales

Con el fin de propiciar una fórmula general para un mapeo conforme del semiplano superior $y \geq 0$ sobre una región poligonal, primero examinamos el mapeo complejo

$$w = f(z) = (z - x_1)^{\alpha/\pi}, \tag{1}$$

donde $x_1$ y $\alpha$ son números reales y $0 < \alpha < 2\pi$. El mapeo en (1) es la composición de una traslación $T(z) = z - x_1$ seguida por la función potencia real $F(z) = z^{\alpha/\pi}$. Ya que $x_1$ es real, $T$ se traslada en una dirección paralela al eje real. Bajo esta traslación el eje $x$ se mapea sobre el eje $u$ con el punto $z = x_1$ mapeado sobre el punto $w = 0$. Para entender la función potencia $F$ como un mapeo complejo sustituimos el símbolo $z$ con la notación exponencial $re^{i\theta}$ para obtener:

$$F(z) = \left(re^{i\theta}\right)^{\alpha/\pi} = r^{\alpha/\pi} e^{i(\alpha\theta/\pi)}. \tag{2}$$

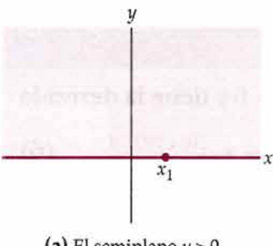
De (2) vemos que el mapeo complejo $w = z^{\alpha/\pi}$ se puede visualizar como el proceso de aumentar o contraer el módulo $r$ de $z$ al módulo de $r^{\alpha/\pi}$ de $w$, y girando $z$, $\frac{\alpha}{\neq}$ radianes alrededor del origen aumentando o disminuyendo un argumento $\theta$ de $z$ a un argumento $\alpha\theta/\pi$ de $w$. Así, bajo la composición $w = F(T(z)) = (z - x_1)^{\alpha/\pi}$, un rayo que sale de $x_1$ y forma un ángulo de $\phi$ radianes con el eje real se mapea sobre un rayo que sale del origen y forma un ángulo de $\alpha\phi/\pi$ radianes con el eje real. Vea la figura 7.3.2.

Ahora considere el mapeo (1) en el semiplano $y \geq 0$. Dado que este conjunto está formado por el punto $z = x_1$ junto con la familia de los rayos arg $(z - x_1) = \phi$, $0 \leq \phi \leq \pi$, la imagen bajo $w = (z - x_1)^{\alpha/\pi}$ consiste del punto $w = 0$ junto con la familia de rayos $\arg(w) = \alpha\phi/\pi$, $0 \leq \alpha\phi/\pi \leq \alpha$. En otras palabras, la imagen del semiplano $y \geq 0$ es el punto $w = 0$ junto con la cuña $0 \leq \arg(w) \leq \alpha$. Vea la figura 7.3.3 en la página 371.

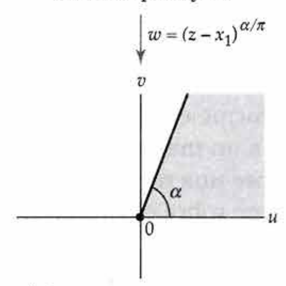
La función $f$ dada por (1), que mapea el semiplano $y \geq 0$ sobre una región poligonal no acotada con un solo vértice, tiene la derivada:

$$f'(z) = \frac{\alpha}{\pi}(z - x_1)^{(\alpha/\pi)-1}. \tag{3}$$

Dado que $f'(z) \neq 0$ si $z = x + iy$ y $y > 0$, se sigue que $w = f(z)$ es un mapeo conforme en cualquier punto $z$ con $y > 0$. En general, usaremos la derivada $f'$, no $f$, para describir un mapeo conforme del semiplano superior $y \geq 0$ sobre una región poligonal arbitraria. Con esto en mente, ahora vamos a presentar una generalización del mapeo en (1) basada en su derivada dada en (3).

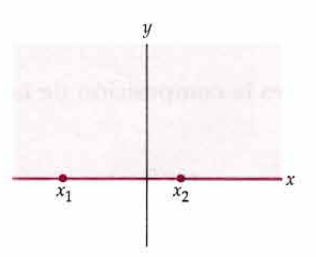



(a) El semiplano $y \geq 0$

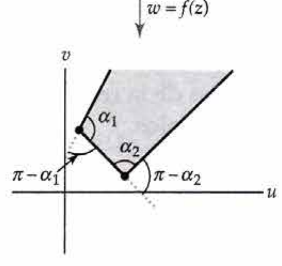



(b) La imagen del semiplano

Figura 7.3.3 El mapeo $w = (z - x_1)^{\alpha/\pi}$




(a) El semiplano superior $y \geq 0$




(b) La imagen de la región (a)

Figura 7.3.4 El mapeo asociado con (4)

Considere una nueva función $f$, que es analítica en el dominio $y > 0$ y cuya derivada es:

$$f'(z) = A\,(z - x_1)^{(\alpha_1/\pi)-1}\,(z - x_2)^{(\alpha_2/\pi)-1}, \tag{4}$$

donde $x_1$, $x_2$, $\alpha_1$ y $\alpha_2$ son reales, $x_1 < x_2$, y $A$ es una constante compleja. Un dato útil que nos ayudará a determinar la imagen del semiplano $y \geq 0$ bajo $f$ es que una parametrización $w(t)$, $a < t < b$, da un segmento de recta si y sólo si algún valor de $\arg(w'(t))$ es constante para toda $t$ en el intervalo $a < t < b$. Ahora utilizamos este hecho para determinar las imágenes de los intervalos $(-\infty, x_1)$, $(x_1, x_2)$, y $(x_2, \infty)$ en el eje real bajo el mapeo complejo $w = f(z)$. Si se parametriza el intervalo $(-\infty, x_1)$ con $z(t) = t$, $-\infty < t < x_1$, entonces, por (11) de la Sección 2.2 la imagen bajo $w = f(z)$ se parametriza con $w(t) = f(z(t)) = f(t), -\infty < t < x_1$. Identificando $z = t$ y usando (4), se obtiene:

$$w'(t) = f'(t) = A\,(t - x_1)^{(\alpha_1/\pi)-1}\,(t - x_2)^{(\alpha_2/\pi)-1}.$$

Entonces un argumento de $w'(t)$ está dado por:

$$\operatorname{Arg}(A) + \left(\frac{\alpha_1}{\pi} - 1\right)\operatorname{Arg}(t - x_1) + \left(\frac{\alpha_2}{\pi} - 1\right)\operatorname{Arg}(t - x_2). \tag{5}$$

Ya que $-\infty < t < x_1$, tenemos que $t - x_1$ es un número real negativo, y así $\operatorname{Arg}(t - x_1) = \pi$. Además, ya que $x_1 < x_2$, también tenemos que $t - x_2$ es un número real negativo y, por tanto, $\operatorname{Arg}(t - x_2) = \pi$. Sustituyendo estos valores en (5) encontramos que $\operatorname{Arg}(A) + \alpha_1 + \alpha_2 - 2\pi$ es un valor constante de $\arg(w'(t))$ para todo $t$ en el intervalo $(-\infty, x_1)$. Así, concluimos que el intervalo $(-\infty, x_1)$ se mapea sobre un segmento de recta con $w = f(z)$.

Con un razonamiento similar se determina que los intervalos $(x_1, x_2)$ y $(x_2, \infty)$ también se mapean en segmentos de recta. Un valor del argumento de $w'$ para cada intervalo se presenta en la tabla siguiente. También se presenta el cambio en el valor del argumento.

| Intervalo | Argumento de $w'$ | Cambio en el argumento |
|---|---|---|
| $(-\infty, x_1)$ | $\operatorname{Arg}(A) + \alpha_1 + \alpha_2 - 2\pi$ | 0 |
| $(x_1, x_2)$ | $\operatorname{Arg}(A) + \alpha_2 - \pi$ | $\pi - \alpha_1$ |
| $(x_2, \infty)$ | $\operatorname{Arg}(A)$ | $\pi - \alpha_2$ |

Tabla 7.3.1 Argumentos de $w'$

Como $f$ es un mapeo analítico (y, por tanto, continuo), se concluye que la imagen del semiplano $y \geq 0$ es una región poligonal no acotada. En la tabla 7.3.1, vemos que los ángulos externos entre los lados sucesivos de la frontera poligonal están dados por el cambio en el argumento de $w'$ un intervalo al siguiente. Por tanto, los ángulos interiores del polígono son $\alpha_1$ y $\alpha_2$. Vea la figura 7.3.4.

**Fórmula de Schwarz-Christoffel** El análisis anterior se puede generalizar para producir una fórmula para la derivada $f'$ de una función $f$ que mapea el semiplano $y \geq 0$ sobre una región poligonal con cualquier número de lados. Esta fórmula, que se presenta en el siguiente teorema, se llama **fórmula de Schwarz-Christoffel**.

**Teorema 7.3.1 Fórmula de Schwarz-Christoffel**

Sea $f$ una función que es analítica en el dominio $y > 0$ y tiene la derivada

$$f'(z) = A(z - x_1)^{(\alpha_1/\pi)-1}(z - x_2)^{(\alpha_2/\pi)-1} \cdots (z - x_n)^{(\alpha_n/\pi)-1}, \qquad (6)$$

donde $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, $0 < \alpha_i < 2\pi$ para $1 \le i \le n$, y $A$ es una constante compleja. Entonces el semiplano superior $y \ge 0$ se mapea por $w = f(z)$ sobre una región poligonal no acotada con los ángulos interiores $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Se deduce del teorema 7.1.1 de la sección 7.1 que la función dada por la fórmula de Schwarz-Christoffel (6) es un mapeo conforme en el dominio $y > 0$. Por brevedad, a partir de ahora, nos referiremos a un mapeo obtenido de (6) como un *mapeo conforme del semiplano superior* sobre una región poligonal. Hay que considerar que si bien este mapeo se define sobre el semiplano superior $y \ge 0$, es sólo conforme en el dominio $y > 0$.

*Nota* ➡

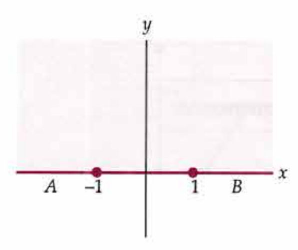
Antes de investigar algunos ejemplos de la fórmula de Schwarz-Christoffel, tenemos que señalar tres cosas. En primer lugar, en la práctica generalmente tenemos cierta libertad en la selección de los puntos $x_k$ en el eje $x$. Una elección juiciosa puede simplificar el cálculo de $f(z)$. En segundo lugar, el teorema 7.3.1 proporciona sólo una fórmula para la derivada de $f$. Una fórmula general para $f$ está dada por una integral

$$f(z) = A\int (z - x_1)^{(\alpha_1/\pi)-1}(z - x_2)^{(\alpha_2/\pi)-1} \cdots (z - x_n)^{(\alpha_n/\pi)-1}\,dz + B,$$

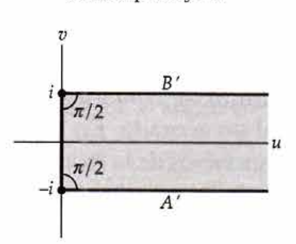
donde $A$ y $B$ son constantes complejas. Por tanto, $f$ es la composición de la función

$$g(z) = \int (z - x_1)^{(\alpha_1/\pi)-1}(z - x_2)^{(\alpha_2/\pi)-1} \cdots (z - x_n)^{(\alpha_n/\pi)-1}\,dz$$

y el mapeo lineal $h(z) = Az + B$. Como se describe en la sección 2.3, el mapeo lineal $h$ nos permite rotar, ampliar (o reducir), y trasladar la región poligonal producida por $g$. En tercer lugar, aunque no se afirma en el teorema 7.3.1, la fórmula de Schwarz-Christoffel (6) también se puede utilizar para construir un mapeo del semiplano superior $y \ge 0$ en una región poligonal acotada. Para ello, aplicamos (6) con sólo $n - 1$ de los $n$ ángulos interiores de la región poligonal acotada.* Se ilustran estas ideas en los siguientes ejemplos.




(a) Semiplano $y \ge 0$




(b) Franja semi-infinita

**Figura 7.3.5** Figura para el ejemplo 1

## EJEMPLO 1 Uso de la fórmula de Schwarz-Christoffel

Utilice la fórmula de Schwarz-Christoffel (6) para construir un mapeo conforme del semiplano superior sobre la región poligonal definida por $u \ge 0$, $-1 \le v \le 1$.

**Solución** Observe que la región poligonal definida por $u \ge 0$, $-1 \le v \le 1$, es la franja semi-infinita que se muestra en gris en la figura 7.3.5(b). Los ángulos interiores de esta región poligonal no acotada son $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$, y los vértices son $w_1 = -i$ y $w_2 = i$. Para encontrar el mapeo deseado, aplicamos el teorema 7.3.1 con $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$. Con estas identificaciones, con (6) se obtiene

$$f'(z) = A(z + 1)^{-1/2}(z - 1)^{-1/2}. \qquad (7)$$

* Para un polígono acotado en el plano, cualquiera de los $n - 1$ ángulos interiores determinan de forma única el ángulo restante.

Una fórmula para $f(z)$ se encuentra integrando (7). Puesto que $z$ se encuentra en el semiplano superior $y \geq 0$, primero se utiliza la raíz cuadrada principal para reescribir (7) como

$$f'(z) = \frac{A}{(z^2-1)^{1/2}}.$$

Además, dado que el valor principal de $(-1)^{1/2} = i$, tenemos

$$f'(z) = \frac{A}{(z^2-1)^{1/2}} = \frac{A}{[-1\,(1-z^2)]^{1/2}} = \frac{A}{i}\frac{1}{(1-z^2)^{1/2}} = -Ai\frac{1}{(1-z^2)^{1/2}}. \tag{8}$$

De (7) de la sección 4.4, reconocemos que una antiderivada de (8) está dada por

$$f(z) = -Ai \operatorname{sen}^{-1} z + B, \tag{9}$$

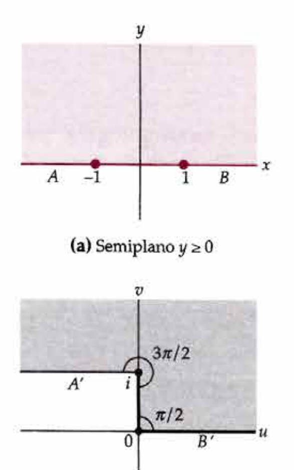
donde $\operatorname{sen}^{-1} z$ es la función univaluada obtenida utilizando la raíz cuadrada principal y el valor principal del logaritmo y donde $A$ y $B$ son constantes complejas. Si elegimos $f(-1) = -i$ y $f(1) = i$, entonces las constantes $A$ y $B$ deben satisfacer el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -Ai \operatorname{sen}^{-1}(-1) + B &= Ai\frac{\pi}{2} + B = -i \\ -Ai \operatorname{sen}^{-1}(1) + B &= -Ai\frac{\pi}{2} + B = i. \end{aligned}$$

Sumando estas dos ecuaciones, vemos que $2B = 0$, o, $B = 0$. Ahora sustituyendo $B = 0$ en la primera o segunda ecuación obtenemos $A = -2/\pi$. Por tanto, el mapeo deseado está dado por

$$f(z) = i\frac{2}{\pi} \operatorname{sen}^{-1} z.$$

Este mapeo se muestra en la figura 7.3.5. Los segmentos de recta etiquetados con $A$ y $B$ que se muestran en color en la figura 7.3.5(a) se mapean con $w = i\frac{2}{\pi} \operatorname{sen}^{-1} z$ sobre los segmentos de recta etiquetados con $A'$ y $B'$ que se muestran en negro en la figura 7.3.5(b). ❑



**(a)** Semiplano $y \geq 0$

**(b)** Región poligonal para el ejemplo 2

**Figura 7.3.6** Figura para el ejemplo 2

### EJEMPLO 2 Usando la fórmula de Schwarz-Christoffel

Utilice la fórmula de Schwarz-Christoffel (6) para construir un mapeo conforme del semiplano superior sobre la región poligonal que se muestra en gris en la figura 7.3.6(b).

**Solución** Se procede como en el ejemplo 1. La región que se muestra en gris en la figura 7.3.6 (b) es una región poligonal no acotada con ángulos interiores $\alpha_1 = 3\pi/2$ y $\alpha_1 = \pi/2$ en los vértices $w_1 = i$ y $w_2 = 0$, respectivamente. Si elegimos $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$ para mapear sobre $w_1$ y $w_2$, respectivamente, entonces con (6) se obtiene

$$f'(z) = A\,(z+1)^{1/2}\,(z-1)^{-1/2}. \tag{10}$$

Ya que

$$(z+1)^{1/2}\,(z-1)^{-1/2} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{1/2}\left(\frac{z+1}{z+1}\right)^{1/2} = \frac{z+1}{(z^2-1)^{1/2}},$$

podemos reescribir a (10) como

$$f'(z) = A\left[\frac{z}{(z^2-1)^{1/2}} + \frac{1}{(z^2-1)^{1/2}}\right]. \qquad (11)$$

Una antiderivada de (11) está dada por

$$f(z) = A\left[\left(z^2-1\right)^{1/2} + \cosh^{-1} z\right] + B,$$

donde $A$ y $B$ son constantes complejas, y donde $(z^2-1)^{1/2}$ y $\cosh^{-1} z$ representan las ramas de la raíz cuadrada y funciones inversas coseno hiperbólico definido en el dominio $y > 0$. Ya que $f(-1) = i$ y $f(1) = 0$, las constantes $A$ y $B$ deben satisfacer el sistema de ecuaciones

$$A\left(0 + \cosh^{-1}(-1)\right) + B = A\pi i + B = i$$
$$A\left(0 + \cosh^{-1} 1\right) + B = B = 0.$$

Por tanto, $A = 1/\pi$, $B = 0$, y el mapeo deseado está dada por

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\left[\left(z^2-1\right)^{1/2} + \cosh^{-1} z\right].$$

El mapeo se ilustra en la figura 7.3.6. Los segmentos de recta etiquetados con $A$ y $B$ que se muestran a color en la figura 7.3.6(a) se mapean con $w = f(z)$ sobre los segmentos de recta etiquetados con $A'$ y $B'$ que se muestran en negro en la figura 7.3.6(b). ❑

Cuando se utiliza la fórmula de Schwarz-Christoffel, no siempre es posible expresar $f(z)$ en términos de funciones elementales. Sin embargo, en estos casos, se pueden utilizar técnicas numéricas para aproximar $f$ con gran precisión. El siguiente ejemplo muestra que, aún las regiones relativamente simples, pueden conducir a integrales que no se pueden expresar en términos de funciones elementales.

### EJEMPLO 3 Utilizando la fórmula de Schwarz-Christoffel

Utilice la fórmula de Schwarz-Christoffel (6) para construir un mapeo conforme del semiplano superior sobre la región poligonal acotada por el triángulo equilátero con vértices $w_1 = 0$, $w_2 = 1$, y $w_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$. Vea la figura 7.3.7.

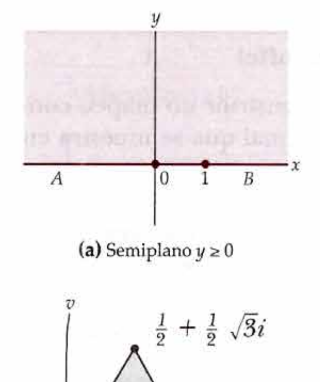



**Figura 7.3.7** Figura para el ejemplo 3

**Solución** La región acotada por el triángulo equilátero es una región poligonal acotada con ángulos interiores $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \pi/3$. Como se mencionó en la página 372, podemos encontrar un mapeo deseado con la fórmula de Schwarz-Christoffel (6) con $n - 1 = 2$ de los ángulos interiores. Después de seleccionar $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$, con (6) se obtiene

$$f'(z) = Az^{-2/3}(z-1)^{-2/3}. \qquad (12)$$

No hay antiderivada de la función dada en (12) que se pueda expresar en términos de funciones elementales. Sin embargo, $f'$ es analítica en el dominio simplemente conexo $y > 0$, y así, del teorema 5.4.3, una antiderivada $f$ existe en este dominio. La antiderivada está dada por la fórmula integral

$$f(z) = A\int_0^z \frac{1}{s^{2/3}(s-1)^{2/3}}\,ds + B, \qquad (13)$$

donde $A$ y $B$ son constantes complejas. Requiriendo que $f(0) = 0$ podemos resolver para la constante $B$. Ya que $\int_0^0 = 0$, tenemos

$$f(0) = A\int_0^0 \frac{1}{s^{2/3}(s-1)^{2/3}}\,ds + B = 0 + B = B,$$

por lo que $f(0) = 0$ implica que $B = 0$. Si también se requiere que $f(1) = 1$, entonces

$$f(1) = A\int_0^1 \frac{1}{s^{2/3}(s-1)^{2/3}}\,ds = 1.$$

Sea $\Gamma$ la integral

$$\Gamma = \int_0^1 \frac{1}{s^{2/3}(s-1)^{2/3}}\,ds.$$

Entonces $A = 1/\Gamma$ y $f$ se puede escribir como

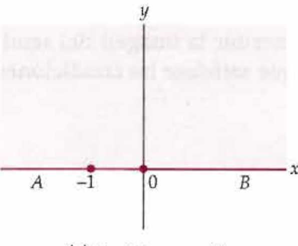
$$f(z) = \frac{1}{\Gamma}\int_0^z \frac{1}{s^{2/3}(s-1)^{2/3}}\,ds.$$

Utilizando un SAC se pueden aproximar valores de $f$. Por ejemplo, usando el comando **NIntegrate** en *Mathematica* encontramos que

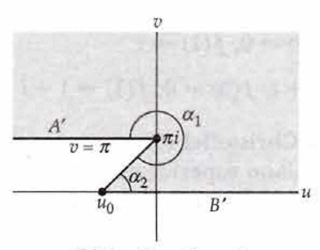
$$f(i) \approx 0.4244 + 0.3323i \quad \text{y} \quad f(1+i) \approx 0.5756 + 0.3323i.$$

❑

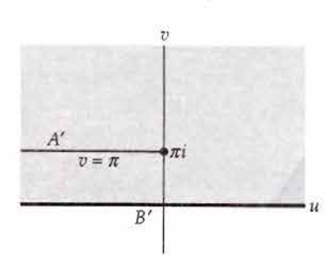
A veces la fórmula de Schwarz-Christoffel puede utilizarse para encontrar mapeos en regiones no poligonales. Este método requiere que la región no poligonal deseada pueda obtenerse como un "límite" de una sucesión de regiones poligonales. El siguiente ejemplo muestra esta técnica.



(a) Semiplano $y \geq 0$



(b) Región poligonal



(c) Límite de las regiones poligonales

**Figura 7.3.8** Figura para el ejemplo 4

## EJEMPLO 4 Utilizando la fórmula de Schwarz-Christoffel

Utilice la fórmula de Schwarz-Christoffel (6) para construir un mapeo conforme del semiplano superior en la región no poligonal definida por $v \geq 0$, con la semirrecta horizontal $v = \pi$, $-\infty < u \leq 0$, excluida. Vea la figura 7.3.8(c).

**Solución** Sea $u_0$ un punto del eje $u$ no positivo en el plano $w$. Podemos aproximar la región no poligonal definida por $v \geq 0$, con la semirrecta $v = \pi$, $-\infty < u \leq 0$, excluida por la región poligonal cuya frontera consiste de la semirrecta horizontal $v = \pi$, $-\infty < u \leq 0$, el segmento de recta de $\pi i$ a $u_0$, y la semirrecta horizontal $v = 0$, $u_0 \leq u < \infty$. Los vértices de esta región poligonal son $w_1 = \pi i$ y $w_2 = u_0$, con ángulos interiores correspondientes $\alpha_1$ y $\alpha_2$. Vea la figura 7.3.8(b). Si elegimos los puntos $z_1 = -1$ y $z_2 = 0$ para mapear sobre los vértices $w_1 = \pi i$ y $w_2 = u_0$, respectivamente, entonces con (6) se obtiene la derivada

$$A\,(z+1)^{(\alpha_1/\pi)-1}\,z^{(\alpha_2/\pi)-1}. \tag{14}$$

Observe en la figura 7.3.8(b) que cuando $u_0$ tiende a $-\infty$, a lo largo del eje $x$ el ángulo interior $\alpha_1$ tiende a $2\pi$ y el ángulo interior $\alpha_2$ tiende a 0. Con estos valores límite, (14) sugiere que nuestro mapeo deseado $f$ tiene la derivada

$$f'(z) = A\,(z+1)^1\,z^{-1} = A\left(1 + \frac{1}{z}\right). \tag{15}$$

Una antiderivada de la función en (15) está dada por

$$f(z) = A\,(z + \mathrm{Ln}\,z) + B, \tag{16}$$

donde $A$ y $B$ son constantes complejas.

Para determinar los valores apropiados de las constantes $A$ y $B$, primero consideramos el mapeo de $g(z) = z + \mathrm{Ln}\,z$ en el semiplano superior $y \geq 0$. La función $g$ tiene un punto de discontinuidad en $z = 0$, por lo que vamos a considerar por separado, las fronteras y las semirrectas $y = 0, -\infty < x < 0$, $y = 0$, $0 < x < \infty$, del semiplano $y \geq 0$. Si $z = x + 0i$ está en la semirrecta $y = 0$, $-\infty < x < 0$, entonces $\mathrm{Arg}(z) = \pi$, por lo que $g(z) = x + \log_e|x| + i\pi$.

Cuando $x < 0$, $x + \log_e|x|$ toma todos los valores de $-\infty$ a $-1$. Por lo que, la imagen del eje $x$ negativo bajo $g$ es la semirrecta horizontal $v = \pi$, $-\infty < u < -1$. Por otra parte, si $z = x + 0i$ está en la semirrecta $y = 0$, $0 < x < \infty$, entonces $\mathrm{Arg}(z) = 0$, por lo que $g(z) = x + \log_e|x|$. Cuando $x > 0$, $x + \log_e|x|$ toma todos los valores de $-\infty$ a $\infty$. Por tanto, la imagen del eje $x$ positivo bajo $g$ es el eje $u$. Por lo que se deduce que la imagen del semiplano $y \geq 0$ bajo $g(z) = z + \mathrm{Ln}\,z$ es la región definida por $v \geq 0$, con la semirrecta horizontal $v = \pi$, $-\infty < u < -1$ excluida. Con el fin de obtener la región que se muestra en la figura 7.3.8(c), se debe componer $g$ con una traslación en 1. Por tanto, el mapeo deseada está dado por

$$f(z) = z + \mathrm{Ln}\,(z) + 1.$$

❑

## EJERCICIOS 7.3 *Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-20.*

En los problemas 1 a 6 utilice el teorema 7.3.1 para describir la imagen del semiplano superior $y \geq 0$ bajo el mapeo conforme $w = f(z)$ que satisface las condiciones dadas. No trate de resolver para $f(z)$.

1. $f'(z) = (z-1)^{-1/2}$, $f(1) = 0$
2. $f'(z) = (z+1)^{-1/3}$, $f(-1) = 0$
3. $f'(z) = (z+1)^{-1/2}(z-1)^{1/2}$, $f(-1) = 0$, $f(1) = 1$
4. $f'(z) = (z+1)^{-1/2}(z-1)^{-3/4}$, $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$
5. $f'(z) = (z+1)^{1/2}z^{-1/2}(z-1)^{-1/4}$, $f(-1) = i$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$
6. $f'(z) = (z-1)^{-1/4}z^{-1/2}(z-1)^{-1/4}$, $f(-1) = -1+i$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1+i$

En los problemas 7 a 10 utilice la fórmula de Schwarz-Christoffel (6) para encontrar $f'(z)$ para un mapeo conforme $w = f(z)$ del semiplano superior en la región poligonal dada que se muestra en gris. Utilice el valor $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, y así sucesivamente en (6). No trate de resolver para $f(z)$.

7. $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$

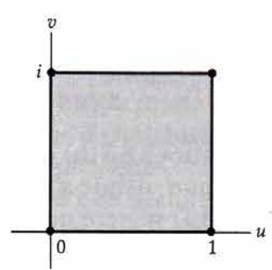



Figura 7.3.9 Figura para el problema 7

8. $f(-1) = -1$, $f(0) = 0$

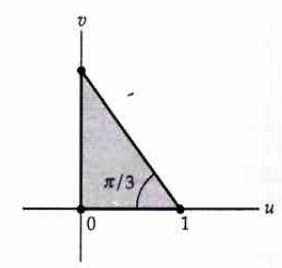
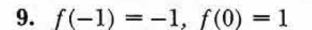



Figura 7.3.10 Figura para el problema 8


**9.** $f(-1) = -1$, $f(0) = 1$

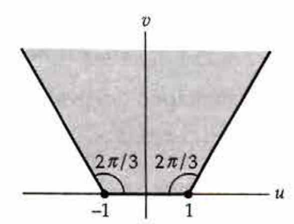
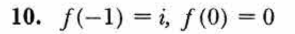



Figura 7.3.11 Figura para el problema 9


**10.** $f(-1) = i$, $f(0) = 0$

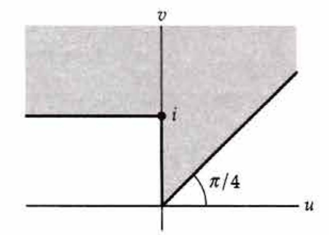



Figura 7.3.12 Figura para el problema 10

## Enfocando los conceptos

**11.** Utilice la fórmula de Schwarz-Christoffel (6) para construir un mapeo conforme del semiplano superior sobre la región poligonal que se muestra en gris en la figura 7.3.13. Se requiere que $f(-1) = \pi i$ y $f(1) = 0$.

**12.** Use la fórmula de Schwarz-Christoffel (6) para construir un mapeo conforme del semiplano superior sobre la región poligonal que se muestra en gris en la figura 7.3.14. Se requiere que $f(-1) = -ai$ y $f(1) = ai$.

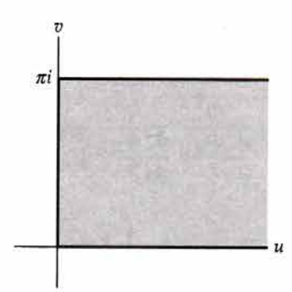



Figura 7.3.13 Figura para el problema 11

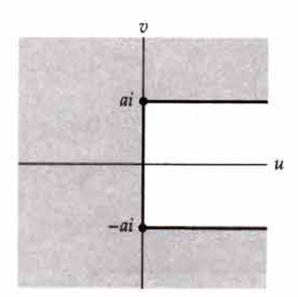



Figura 7.3.14 Figura para el problema 12

**13.** Utilice la fórmula de Schwarz-Christoffel (6) para comprobar el mapeo conforme de la entrada M-3 del apéndice III construyendo primero la derivada de un mapeo del semiplano superior en la región poligonal que se muestra en gris en la figura 7.3.15. Se requiere que $f(-1) = -a$, $f(0) = v_1 i$, y $f(1) = a$, y después haga que $v_1 \to -\infty$ a lo largo del eje $v$.

**14.** Utilice la fórmula de Schwarz-Christoffel (6) para comprobar el mapeo conforme de la entrada M-4 del apéndice III construyendo primero la derivada de un mapeo del semiplano superior sobre la región poligonal que se muestra en gris en la figura 7.3.16. Se requiere que $f(-1) = -u_1$, $f(0) = ai$, y $f(1) = u_1$, y después haga que $u_1 \to 0$ a lo largo del eje $u$.

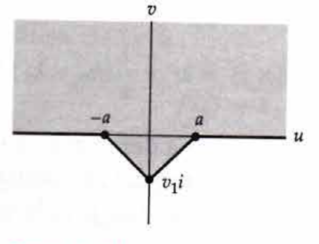



Figura 7.3.15 Figura para el problema 13

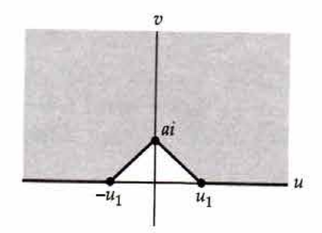



Figura 7.3.16 Figura para el problema 14

## Tarea de laboratorio de cómputo

En los problemas del 15 al 18, utilice un SAC para aproximar las imágenes de los puntos $z_1 = i$ y $z_2 = 1 + i$ en la función dada.

**15.** $w = f(z)$ es el mapeo del problema 3.

**16.** $w = f(z)$ es el mapeo del problema 6.

**17.** $w = f(z)$ es el mapeo del problema 8.

**18.** $w = f(z)$ es el mapeo del problema 9.

# 7.4 Fórmulas integrales de Poisson

El éxito de utilizar un mapeo conforme para resolver un problema con valores en la frontera asociado con la ecuación de Laplace depende con frecuencia de la capacidad de resolver un problema con valores en la frontera en un dominio simple, tal como el semiplano superior $y > 0$ o el disco abierto unitario $|z| < 1$. En esta sección se presentan dos fórmulas integrales importantes para resolver un problema de Dirichlet en estos dominios.

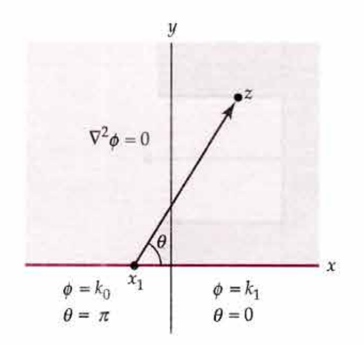



**Figura 7.4.1** Problema de Dirichlet (1)

**Fórmula para el semiplano superior** Empezamos por investigar el siguiente problema de Dirichlet:

$$\textit{Resuelva:} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \ -\infty < x < \infty, \ y > 0$$

$$\textit{Sujeto a:} \quad \phi(x, 0) = \begin{cases} k_0, & -\infty < x < x_1 \\ k_1, & x_1 < x < \infty, \end{cases} \tag{1}$$

donde $k_0$ y $k_1$ son constantes reales y $x_1$ es un punto en el eje $x$. El examen de la figura 7.4.1 sugiere que la función $\phi$ es constante en cada rayo que sale de $x_1$ en el semiplano superior y que los valores de $\phi$ en cada rayo varían de $k_1$ a $k_0$ cuando el ángulo $\theta$ que el rayo forma con los rayos que salen de $x_1$ y que contiene el punto $x_1 + 1$ varía de 0 a $\pi$. En otras palabras, buscamos una función $\phi(\theta)$ tal que $\phi(0) = k_1$ y $\phi(\pi) = k_0$. La función más simple es la función lineal:

$$\phi(\theta) = k_1 + \left(\frac{k_0 - k_1}{\pi}\right)\theta, \ 0 \le \theta \le \pi.$$

Después de aplicar la traslación $z - x_1$, observamos que $\theta = \text{Arg}(z - x_1)$ y así $\phi$ se puede reescribir como:

$$\phi(x, y) = k_1 + \frac{1}{\pi}(k_0 - k_1)\text{Arg}(z - x_1), \ 0 \le \text{Arg}(z - x_1) \le \pi. \tag{2}$$

Ahora vamos a demostrar que la función $\phi(x, y)$, definida en (2) es, de hecho, una solución del problema de Dirichlet (1). En el semiplano superior $y > 0$, tenemos que $\phi(x, y)$ es la parte real de la función

$$f(z) = k_1 - \frac{i}{\pi}(k_0 - k_1)\,\text{Ln}(z - x_1).$$

Debido a que $f$ es analítica cuando $y > 0$, se deduce del teorema 3.3.1 que su parte real es armónica. Por tanto, $\phi(x, y)$ satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \tag{3}$$

cuando $-\infty < x < \infty$ y $y > 0$.

A continuación compruebe que las condiciones frontera de (1) se satisfacen con $\phi(x, y)$. Supongamos que $z$ se encuentra en el intervalo $(x_1, \infty)$ en el eje real. Es decir, $z = x + 0i$ con $x_1 < x < \infty$. En este caso, $\operatorname{Arg}(z - x_1) = 0$, y así (2) da

$$\phi(x, 0) = k_1 + \frac{1}{\pi}(k_0 - k_1)\operatorname{Arg}(z - x_1) = k_1 + \frac{1}{\pi}(k_0 - k_1)\,0 = k_1. \tag{4}$$

Por otra parte, si $z = x + 0i$ con $-\infty < x < x_1$, entonces $\operatorname{Arg}(z - x_1) = \pi$, y así

$$\phi(x, 0) = k_1 + \frac{1}{\pi}(k_0 - k_1)\operatorname{Arg}(z - x_1) = k_1 + \frac{1}{\pi}(k_0 - k_1)\,\pi = k_0. \tag{5}$$

Por tanto, de (3), (4) y (5), se concluye que la función $\phi(x, y)$, definida por (2) es una solución del problema de Dirichlet (1).

El análisis anterior se puede generalizar. En particular, considerando el problema de Dirichlet

$$\textit{Resuelva:}\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0,\quad -\infty < x < \infty,\ y > 0$$

(6)

$$\textit{Sujeto a:}\ \phi(x, 0) = \begin{cases} k_0, & -\infty < x < x_1 \\ k_1, & x_1 < x < x_2 \\ \vdots & \vdots \\ k_n, & x_n < x < \infty, \end{cases}$$

donde $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ son $n$ puntos distintos sobre el eje $x$ y $k_0, k_1, \ldots, k_n$ son $n + 1$ constantes reales. Vea la figura 7.4.2. Observe que (1) es un caso simple especial de (6) correspondiente a $n = 1$. Con un razonamiento similar al utilizado para obtener (2) se construye la función

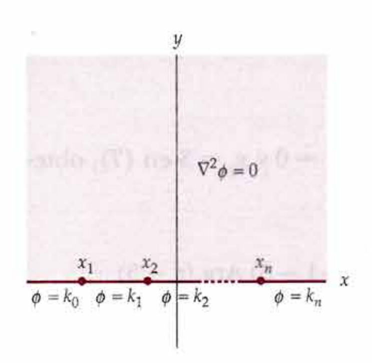



**Figura 7.4.2** Problema de Dirichlet (6)

$$\phi(x, y) = k_n + \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n}(k_{j-1} - k_j)\operatorname{Arg}(z - x_j). \tag{7}$$

Al igual que con (2), podemos comprobar que esta función es armónica en el dominio $y > 0$ observando que $\phi(x, y)$ es la parte real de la función analítica

$$f(z) = k_n - \frac{i}{\pi}\sum_{j=1}^{n}(k_{j-1} - k_j)\operatorname{Ln}(z - x_j).$$

Ahora demostramos que $\phi(x, y)$ satisface las condiciones frontera en (6). Sea $N$ un valor fijo de $j$. Si $z = x + 0i$ es un punto con $x_N < x < x_{N+1}$, entonces, $\operatorname{Arg}(z - x_j) = 0$ para $1 \le j \le N$, mientras que $\operatorname{Arg}(z - x_j) = \pi$ para $N + 1 \le j \le n$.

Por tanto, para $z = x + 0i$ con $x_N < x < x_{N+1}$, con (7) se obtiene

$$\begin{aligned}
\phi(x, 0) &= k_n + \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n} (k_{j-1} - k_j)\,\mathrm{Arg}(z - x_j) \\
&= k_n + \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{N} (k_{j-1} - k_j)\,\mathrm{Arg}(z - x_j) + \frac{1}{\pi}\sum_{j=N+1}^{n} (k_{j-1} - k_j)\,\mathrm{Arg}(z - x_j) \\
&= k_n + \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{N} (k_{j-1} - k_j)\cdot 0 + \frac{1}{\pi}\sum_{j=N+1}^{n} (k_{j-1} - k_j)\cdot \pi \\
&= k_n + (k_N - k_{N+1}) + (k_{N+1} - k_{N+2}) + \cdots + (k_{n-1} - k_n) \\
&= k_N.
\end{aligned}$$

Por tanto, la función $\phi(x, y)$ satisface las condiciones frontera de (6). En resumen, hemos demostrado que la función $\phi(x, y)$, definida en (7) es una solución del problema de Dirichlet dada por (6). Esta solución se utiliza para encontrar una fórmula integral de una solución de un tipo más general del problema de Dirichlet en el semiplano superior $y > 0$.

### EJEMPLO 1 Solución de un problema de Dirichlet en el semiplano superior

Utilice (7) para resolver el problema de Dirichlet

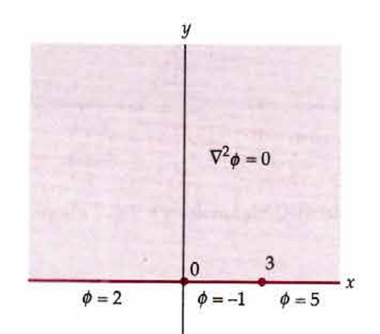



**Figura 7.4.3** Figura para el ejemplo 1

$$\textit{Resuelva:}\quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0,\ -\infty < x < \infty,\ y > 0$$

$$\textit{Sujeto a:}\quad \phi(x, 0) = \begin{cases} 2, & -\infty < x < 0 \\ -1, & 0 < x < 3 \\ 5, & 3 < x < \infty, \end{cases}$$

que se muestra en la figura 7.4.3.

**Solución** Identificando $k_0 = 2$, $k_1 = -1$, $k_2 = 5$, $x_1 = 0$ y $x_2 = 3$ en (7), obtenemos la solución

$$\begin{aligned}
\phi(x, y) &= 5 + \frac{1}{\pi}(2 + 1)\,\mathrm{Arg}\,(z - 0) + \frac{1}{\pi}(-1 - 5)\,\mathrm{Arg}\,(z - 3) \\
&= 5 + \frac{3}{\pi}\mathrm{Arg}\,(z) - \frac{6}{\pi}\mathrm{Arg}\,(z - 3).
\end{aligned}$$

**Fórmula integral de Poisson** Un caso especial del problema de Dirichlet (6) se produce cuando $k_0 = k_n = 0$.

$$\textit{Resuelva:}\quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0,\quad -\infty < x < \infty,\ y > 0 \qquad (8)$$

$$\textit{Sujeto a}: \quad \phi(x,0) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < x_1 \\ k_1, & x_1 < x < x_2 \\ \vdots & \vdots \\ k_{n-1}, & x_{n-1} < x < x_n \\ 0, & x_n < x < \infty. \end{cases}$$

Después de tomar $z_i = z - x_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ e identificando $k_0 = k_n = 0$, la solución dada por (7) puede escribirse como

$$\begin{aligned}\phi(x,y) &= 0 + \frac{1}{\pi}[(0 - k_1)\operatorname{Arg} z_1 + (k_1 - k_2)\operatorname{Arg} z_2 + \cdots + (k_{n-1} - 0)\operatorname{Arg} z_n] \\ &= \frac{1}{\pi}[k_1(\operatorname{Arg} z_2 - \operatorname{Arg} z_1) + k_2(\operatorname{Arg} z_3 - \operatorname{Arg} z_2) + \cdots + k_{n-1}(\operatorname{Arg} z_n - \operatorname{Arg} z_{n-1})] \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{k_j}{\pi}(\operatorname{Arg} z_{j+1} - \operatorname{Arg} z_j)\end{aligned}$$

Es decir, la función

$$\phi(x,y) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{k_j}{\pi}[\operatorname{Arg}(z - x_{j+1}) - \operatorname{Arg}(z - x_j)] \tag{9}$$

es una solución del problema de Dirichlet en (8). Podemos escribir (9) en términos de una integral real impropia. Para ello, sea $t$ una variable real y observe que si $y > 0$, entonces,

$$\operatorname{Arg}(z - t) = \cot^{-1}\left(\frac{x - t}{y}\right) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt}\operatorname{Arg}(z - t) = \frac{y}{(x - t)^2 + y^2}.$$

Dicho de otra manera,

$$\operatorname{Arg}(z_{j+1}) - \operatorname{Arg}(z_j) = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{d}{dt}\left[\frac{y}{(x - t)^2 + y^2}\right] dt.$$

Con estas sustituciones, (9) se convierte en

$$\phi(x,y) = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{k_j y}{(x - t)^2 + y^2} dt.$$

Puesto que $\phi(x, 0) = 0$ cuando $x < x_1$ o $x > x_n$, $\phi(x, y)$ también se puede escribir como

$$\phi(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t,0)}{(x - t)^2 + y^2} dt. \tag{10}$$

La fórmula integral en (10) se llama **fórmula integral de Poisson** para el semiplano superior $y > 0$, y da una solución $\phi(x, y)$ del problema de Dirichlet en (8). La fórmula integral de Poisson también se puede utilizar para resolver un tipo más general del problema de Dirichlet en el que las condiciones de frontera están dadas para cualquier función continua por tramos y acotada. Este es el contenido del siguiente teorema.

Por tanto,

$$\begin{aligned}\phi(x,y) &= -\frac{x}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{s}{y}\right)\Bigg|_{s=x+1}^{s=x-1} + \frac{y}{2\pi}\log_e\left(s^2+y^2\right)\Bigg|_{s=x+1}^{s=x-1}\\ &= \frac{x}{\pi}\left[\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{y}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x-1}{y}\right)\right] + \frac{y}{2\pi}\log_e\left[\frac{(x-1)^2+y^2}{(x+1)^2+y^2}\right]\end{aligned}$$

es una solución del problema de Dirichlet. ❑

**Fórmula para el disco unitario** Se puede deducir de una manera similar una fórmula integral de Poisson para el disco unitario. Esto proporciona una fórmula integral para una solución de un problema de Dirichlet en el disco unitario abierto $|z| < 1$ sujeta a ciertos tipos de condiciones de frontera. El siguiente teorema da la descripción exacta de este resultado.

**Teorema 7.4.2 Fórmula integral de Poisson para el disco unitario**

Sea $f(z)$ una función compleja para la cual los valores $f(e^{i\theta})$ en la circunferencia unitaria $z = e^{i\theta}$ dan una función continua por tramos y acotada para $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Entonces, la función definida por

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{it}\right)\frac{1-|z|^2}{\left|e^{it}-z\right|^2}\,dt \tag{12}$$

es una solución del problema de Dirichlet en el disco abierto unitario $|z| < 1$, con condición de frontera $\phi(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = f(e^{i\theta})$ en todos los puntos de continuidad de $f$.

Como con el teorema 7.4.1, la integral dada en (12) rara vez se puede expresar en términos de funciones elementales. Cuando no podemos evaluar la integral, utilizamos métodos numéricos para aproximar los valores de una solución dada por (12).

**EJEMPLO 3 Uso de la fórmula integral de Poisson**

Utilice la fórmula integral de Poisson (12) para encontrar una solución del problema de Dirichlet

*Resuelva:* $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0,\ \ x^2 + y^2 < 1$

*Sujeto a:* $\phi(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = |\theta|,\ \ -\pi < \theta \leq \pi,$

que se muestra en la figura 7.4.5.

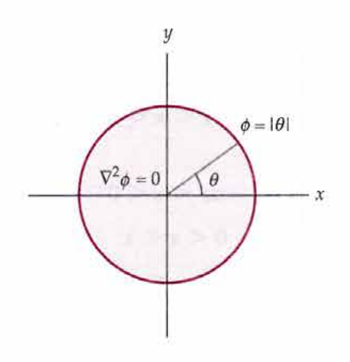


**Figura 7.4.5** Figura para el ejemplo 3

**Solución** La función $f(e^{i\theta}) = \phi(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = |\theta|$ es continua por tramos y acotada para $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Por tanto, después de identificar $f(e^{it}) = \phi(\cos t, \operatorname{sen} t) = |t|$ en (12) obtenemos la fórmula integral

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|\frac{1-|z|^2}{\left|e^{it}-z\right|^2}\,dt.$$

Esta integral no puede ser evaluada en términos de funciones elementales. Sin embargo, con el uso del comando **NIntegrate** en *Mathematica* podemos aproximar los valores de la función $\phi(x, y)$. Por ejemplo, *Mathematica* indica que $\phi\left(\frac{1}{2}, 0\right) \approx 0.9147$ y $\phi\left(0, \frac{1}{2}\right) \approx 1.5708$. ❑

## EJERCICIOS 7.4 *Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-20.*

En los problemas 1 a 4 utilice (7) para resolver el problema de Dirichlet dado en la parte superior del semiplano $y > 0$.

**1.**

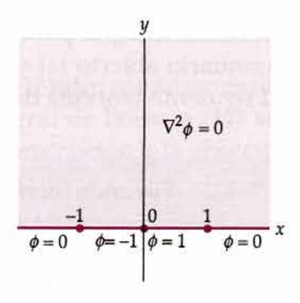



Figura 7.4.6 Figura para el problema 1

**2.**

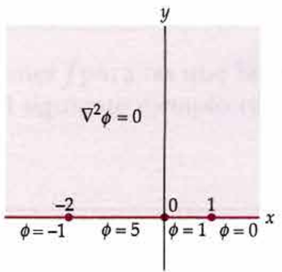



Figura 7.4.7 Figura para el problema 2

**3.**

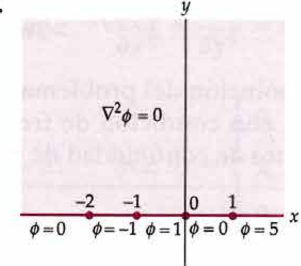



Figura 7.4.8 Figura para el problema 3

**4.**

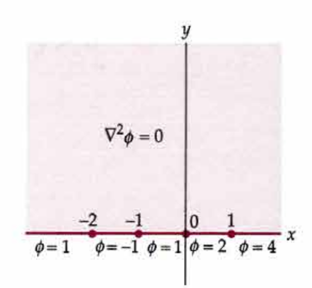



Figura 7.4.9 Figura para el problema 4

En los problemas 5 a 8 utilice la fórmula integral de Poisson (11) para resolver el problema de Dirichlet en el semiplano superior $y > 0$ sujeto a las condiciones de frontera dadas.

**5.** $\phi(x, 0) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ 2x - 1, & 0 < x < 2 \\ 0, & 2 < x < \infty \end{cases}$

**6.** $\phi(x, 0) = \begin{cases} -1, & -\infty < x < -1 \\ x, & -1 < x < 1 \\ 1, & 1 < x < \infty \end{cases}$

**7.** $\phi(x, 0) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < \infty \end{cases}$

**8.** $\phi(x, 0) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ x^2, & 0 < x < 1 \\ 1, & 1 < x < \infty \end{cases}$

**9.** **(a)** Utilice las técnicas presentadas en la sección 6.6 para establecer las fórmulas integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos s}{s^2 + a^2} ds = \frac{\pi e^{-a}}{a} \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} s}{s^2 + a^2} ds = 0 \text{ para } a > 0.$$

**(b)** Resuelva el problema de Dirichlet en el semiplano superior $y > 0$ sujeto a la condición de frontera $\phi(x, 0) = \cos x$, $-\infty < x < \infty$. [*Sugerencia*: Sustituya $s = t - x$ y utilice las fórmulas en el inciso (a).]

**10.** Resuelva el problema de Dirichlet en el semiplano superior $y > 0$ sujeto a la condición de frontera $\phi(x, 0) = \text{sen } x$, $-\infty < x < \infty$. [*Sugerencia:* Haga la sustitución $s = t - x$ y utilice las fórmulas del inciso (a) del problema 9.]

## Enfocando los conceptos

**11.** Sea $f(z)$ una función compleja y suponga que en el disco unitario de $z = e^{i\theta}$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$, tenemos que $f(e^{i\theta})$ es continua por tramos y acotada. Sea $z = re^{i\theta}$, $0 \leq r < 1$, un punto en el interior del disco unitario. Demuestre que la fórmula integral de Poisson (12) se puede escribir como

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(t - \theta)}\,dt. \quad (13)$$

**12.** En este problema se determina una solución del problema de Dirichlet en el disco unitario, sujeto a una condición de frontera constante por tramos. Es decir, deducimos una fórmula para una solución de un problema de Dirichlet en el disco unitario que es análogo al problema de Dirichlet (6) en el semiplano.

**(a)** Compruebe que

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(t - \theta)}\,dt = \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left[\frac{1 + r}{1 - r}\tan\left(\frac{t - \theta}{2}\right)\right] + C. \quad (14)$$

**(b)** Suponga que $\theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n$ son $n$ puntos distintos en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Explique cómo se puede utilizar (13) y (14) para resolver el problema de Dirichlet

*Resuelva:* $$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0, \quad x^2 + y^2 < 1$$

*Sujeto a:* $$\phi(\cos\theta, \text{sen }\theta) = \begin{cases} k_0, & -\pi < \theta < \theta_1 \\ k_1, & \theta_1 < \theta < \theta_2 \\ \vdots & \vdots \\ k_n, & \theta_n < \theta < \pi. \end{cases}$$

**13.** Utilice los problemas 11 y 12 para resolver el problema de Dirichlet en el disco unitario que se muestra en la figura 7.4.10.

**14.** Utilice los problemas 11 y 12 para resolver el problema de Dirichlet en el disco unitario que se muestra en la figura 7.4.11.

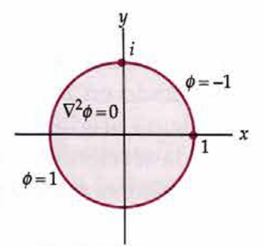



**Figura 7.4.10** Figura para el problema 13

**Figura 7.4.11** Figura para el problema 14

## Tarea de laboratorio de cómputo

En los problemas 15 y 16, (**a**) utilice la fórmula integral de Poisson (12) para encontrar una representación integral de una solución del problema de Dirichlet dado en el disco unitario, y (**b**) utilice un SAC para aproximar los valores de la solución en los puntos $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y $(0, \frac{1}{3})$.

**15.**

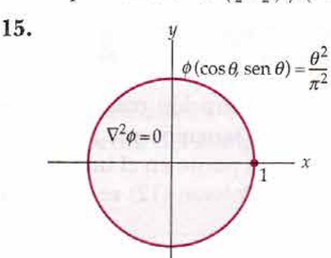



Figura 7.4.12 Figura para el problema 15

**16.**

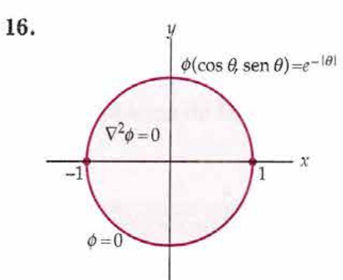



Figura 7.4.13 Figura para el problema 16

# 7.5 Aplicaciones

En esta sección, revisaremos el método presentado en la sección 4.5 para resolver problemas de Dirichlet; aquí incorporamos los nuevos mapeos definidos en el presente capítulo o en el apéndice III. También describimos un proceso similar para resolver un nuevo tipo de problemas con valores en la frontera que se basa en la búsqueda de un mapeo conforme entre dos dominios. Esto nos permite investigar problemas con valores en la frontera más complicados que surgen en el modelo de dos dimensiones de electrostática y de flujo de calor. Concluimos esta sección con una aplicación del mapeo conforme al problema de encontrar un flujo irrotacional de un fluido incompresible, es decir, el flujo de un fluido ideal, en una región del plano.

## 7.5.1 Problemas con valores en la frontera

**Repaso de problemas de Dirichlet** Supongamos que $D$ es un dominio en el plano $z$, y que $g$ es una función definida en la frontera $C$ de $D$. El problema de encontrar una función $\phi(x, y)$ que satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2\phi = 0$, o

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

en $D$ y que es igual a $g$ en la frontera de $D$, se llama **problema de Dirichlet**.

En la sección 4.5, vimos que las funciones analíticas se pueden utilizar para solucionar algunos problemas de Dirichlet. Se obtuvo una solución de un problema de Dirichlet en un dominio $D$ encontrando un mapeo analítico de $D$ sobre un dominio $D'$ en el que el problema de Dirichlet asociado, o transformado, se pueda resolver. Es decir, encontramos un mapeo $w = f(z)$ de $D$ sobre $D'$ tal que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en $D$. Por el teorema 4.5.1 de la sección 4.5, si $\Phi(u, v)$ es una solución del problema de Dirichlet transformado en $D'$, entonces $\phi(x, y) = \Phi(u(x, y), v(x, y))$ es una solución del problema original de Dirichlet en $D$. Por tanto, nuestro método presentado en la sección 4.5 para la solución de problemas de Dirichlet consistió en los siguientes cuatro pasos:

- Encontrar un mapeo analítico $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ del dominio $D$ sobre un dominio $D'$,

- transformar las condiciones de frontera de $D$ a $D'$,
- resolver el problema de Dirichlet transformado en $D'$, y
- hacer $\phi(x, y) = \Phi(u(x, y), v(x, y))$.

Para un análisis más detallado de estos pasos referirse a la sección 4.5.

En este capítulo se investiga una serie de temas que pueden ayudar a completar estos cuatro pasos. La tabla de mapeos conformes analizada en la sección 7.1, las transformaciones fraccionales lineales estudiadas en la sección 7.2, y la transformación de Schwarz-Christoffel de la sección 7.3 proporcionan una valiosa fuente de mapeos para utilizar en el paso 1. Además, si $D'$ se toma en el semiplano superior $y > 0$ o en el disco abierto unitario $|z| < 1$, entonces la fórmula integral de Poisson de la sección 7.4 proporciona un medio para determinar una solución del problema de Dirichlet asociado en $D'$.

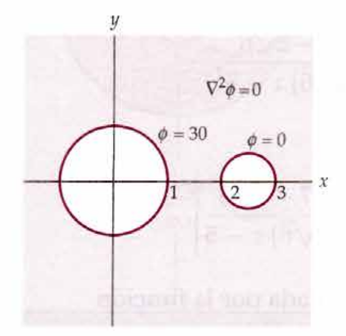
En los siguientes ejemplos, vamos a aplicar algunas ideas de las secciones anteriores de este capítulo para ayudar a resolver los problemas de Dirichlet que se presentan en las áreas de la electrostática, flujo de fluidos, y flujo de calor. Recuerde de la sección 3.3 que si una función $\phi(x, y)$ satisface la ecuación de Laplace (1) en un dominio $D$, entonces $\phi(x, y)$ es armónica en $D$. Además, si $\psi(x, y)$ es la armónica conjugada de $\phi(x, y)$ en $D$, entonces la función

$$\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

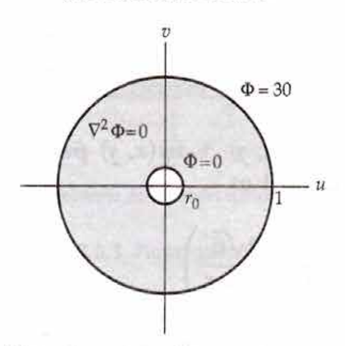
es analítica en $D$ y se denomina **función de potencial compleja**. Las curvas de nivel de $\phi$ y $\psi$ tienen interpretaciones físicas importantes en las matemáticas aplicadas. Sus interpretaciones se resumen en la tabla 3.4.1.

## EJEMPLO 1 Una aplicación al flujo de calor

Determine la temperatura de estado estable $\phi$ en el dominio $D$ que consiste en todos los puntos fuera de las circunferencias, $|z| = 1$ y $\left|z - \frac{5}{2}\right| = \frac{1}{2}$, que se muestran a color en la figura 7.5.1(a), que satisface las condiciones de frontera dadas.



(a) Problema de Dirichlet



(b) Problema de Dirichlet transformado

**Figura 7.5.1** Figura para el ejemplo 1

**Solución** La temperatura de estado estable $\phi$ es una solución de la ecuación de Laplace (1) en $D$ que satisface las condiciones de frontera

$$\phi(x, y) = 30 \quad \text{si } x^2 + y^2 = 1,$$
$$\phi(x, y) = 0 \quad \text{si } \left(x - \tfrac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}.$$

Resolvemos este problema utilizando los cuatro pasos que se indican en las páginas 386 y 387.

**Paso 1** La entrada C-l del apéndice III indica que se puede mapear a $D$ sobre un anillo. Identificando $b = 2$ y $c = 3$ en la entrada de C-1, encontramos que

$$a = \frac{bc + 1 + \sqrt{(b^2 - 1)(c^2 - 1)}}{b + c} = \frac{7 + 2\sqrt{6}}{5},$$

y

$$r_0 = \frac{bc - 1 - \sqrt{(b^2 - 1)(c^2 - 1)}}{c - b} = 5 - 2\sqrt{6}.$$

Así, el dominio $D$ se mapea sobre el anillo $5 - 2\sqrt{6} < w < 1$ que se muestra en gris en la figura 7.5.1(b) por el mapeo analítico $w = f(z)$, donde

$$f(z) = \frac{5z - 7 - 2\sqrt{6}}{(7 + 2\sqrt{6})\,z - 5}. \tag{2}$$

**Paso 2** Examinando la entrada de C-1 del apéndice III se encuentra que la circunferencia frontera $|z - \frac{5}{2}| = \frac{1}{2}$ se mapea sobre la circunferencia frontera $|w| = r_0 = 5 - 2\sqrt{6}$. Por tanto, la condición de frontera $\phi = 0$ se transforma en la condición frontera $\Phi = 0$ en la circunferencia $|w| = 5 - 2\sqrt{6}$. Del mismo modo, vemos que la condición de frontera $\phi = 30$ en la circunferencia $|z| = 1$ se transforma en la condición de frontera $\Phi = 30$ en la circunferencia $|w| = 1$. Vea la figura 7.5.1(b).

**Paso 3** La forma de anillo junto con el hecho de que las dos condiciones de frontera son constantes en la figura 7.5.1(b) sugiere que una solución del problema de Dirichlet transformado está dada por una función $\Phi(u, v)$ que se define en términos del módulo $r = \sqrt{u^2 + v^2}$ de $w = u + iv$. En el problema 14 de los ejercicios 3.4 se le pidió que demostrará que una solución está dada por

$$\Phi(u, v) = A \log_e \sqrt{u^2 + v^2} + B, \tag{3}$$

donde

$$A = \frac{k_0 - k_1}{\log_e (a/b)} \quad \text{y} \quad B = \frac{-k_0 \log_e b + k_1 \log_e a}{\log_e (a/b)}.$$

De acuerdo con las definiciones de $k_0$, $k_1$, $a$ y $b$, dadas en el problema 14, tenemos $a = 5 - 2\sqrt{6}$, $b = 1$, $k_0 = 0$ y $k_1 = 30$. Así, se obtiene la solución

$$\Phi(u, v) = \frac{-30 \log_e \sqrt{u^2 + v^2}}{\log_e (5 - 2\sqrt{6})} + 30 \tag{4}$$

del problema de Dirichlet transformado.

**Paso 4** El paso final es sustituir las partes real e imaginaria de la función $f$ dadas por (2) para la variables $u$ y $v$ en (4). Ya que

$$u(x, y) + iv(x, y) = \frac{5z - 7 - 2\sqrt{6}}{(7 + 2\sqrt{6})\, z - 5},$$

tenemos

$$\sqrt{u(x, y)^2 + v(x, y)^2} = \left| \frac{5z - 7 - 2\sqrt{6}}{(7 + 2\sqrt{6})\, z - 5} \right|.$$

Por tanto, la temperatura de estado estable está dada por la función

$$\phi(x, y) = \frac{-30}{\log_e (5 - 2\sqrt{6})} \log_e \left| \frac{5z - 7 - 2\sqrt{6}}{(7 + 2\sqrt{6})\, z - 5} \right| + 30.$$

❑

Una función de potencial complejo $\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ para la función armónica $\phi(x, y)$ encontrada en el ejemplo 1 es

$$\Omega(z) = \frac{-30}{\log_e (5 - 2\sqrt{6})} \operatorname{Ln} \left( \frac{5z - 7 - 2\sqrt{6}}{(7 - 2\sqrt{6})z - 5} \right)$$

Si se define esta función como **Ω[z]** en *Mathematica*, entonces las partes real e imaginaria $\phi(x, y)$ y $\psi(x, y)$ de $\Omega(z)$ están dadas por **Re[Ω[z]]** e **Im[Ω[z]]**, respectivamente. Entonces se puede utilizar el comando **ContourPlot** en

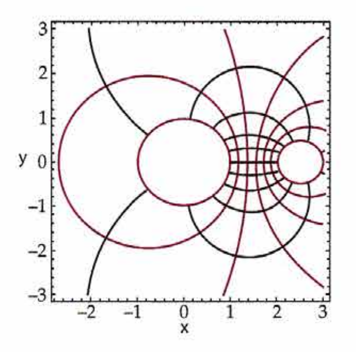



Figura 7.5.2 Isotermas y líneas de flujo de calor para el ejemplo 1

*Mathematica* para trazar las curvas de nivel de las partes real e imaginaria de $\Omega$. Por ejemplo, el comando

**ContourPlot[ Re[Ω[x + I y]] , {x, a, b }, {y, c, d } ]**

genera una gráfica de las curvas de nivel $\phi = c_1$ en la región rectangular $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ del plano. De acuerdo a la tabla 3.4.1, las curvas de nivel de $\phi$ y $\psi$ representan las isotermas y las líneas de flujo de calor, respectivamente. Ambos conjuntos de curvas de nivel se muestran en la figura 7.5.2. Las isotermas son las curvas que se muestran a color y las líneas de flujo de calor son las curvas que se muestran en negro.

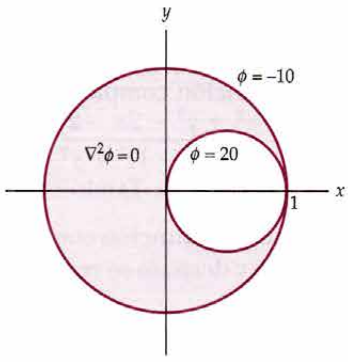
## EJEMPLO 2 Una aplicación a la electrostática

Determine el potencial electrostático $\phi$ en el dominio $D$ entre las circunferencias $|z| = 1$ y $\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$, que se muestra en color en la figura 7.5.3(a), que satisfaga las condiciones de frontera dadas.

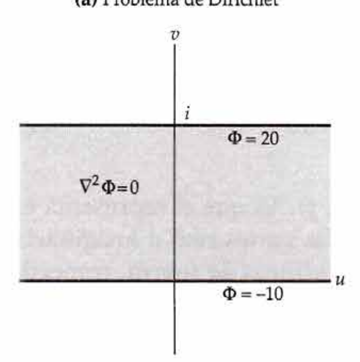
**Solución** El potencial electrostático $\phi$ es una solución de la ecuación de Laplace (1) en $D$ que satisface las condiciones de frontera

$$\phi(x, y) = -10 \quad \text{sobre } x^2 + y^2 = 1,$$
$$\phi(x, y) = 20 \quad \text{sobre } \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}.$$

Se procede como en el ejemplo 1.




(a) Problema de Dirichlet




(b) Problema de Dirichlet transformado

Figura 7.5.3 Figura para el ejemplo 2

**Paso 1** El dominio dado $D$ se puede mapear sobre la franja infinita horizontal $0 < v < 1$, que se muestra en gris en la figura 7.5.3(b), por una transformación fraccional lineal. Una forma de hacerlo es requerir que los puntos $1$, $i$ y $-1$ en la circunferencia $|z| = 1$ se mapean sobre los puntos $\infty$, 0 y 1, respectivamente. Por el teorema 7.2.2 la transformación fraccional lineal deseada $w = T(z)$ debe satisfacer

$$\frac{z-1}{z+1}\frac{i+1}{i-1} = \lim_{w_1 \to \infty} \frac{w - w_1}{w - 1}\frac{0-1}{0-w_1}, \quad \text{o} \quad \frac{z-1}{z+1}(-i) = \frac{-1}{w-1}.$$

Después de resolver para $w = T(z)$, obtenemos

$$T(z) = (1-i)\,\frac{z-i}{z-1}. \tag{5}$$

Por construcción, la circunferencia $|z| = 1$ se mapea sobre la recta $v = 0$ por $w = T(z)$. Además, ya que el polo $z = 1$ de (5) se encuentra en la circunferencia $\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$, se deduce que esta circunferencia se mapea sobre una recta. La recta imagen se puede encontrar determinando la imagen de los dos puntos en la circunferencia $\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$. Para los puntos $z = 0$ y $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ en la circunferencia $\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ tenemos que $T(0) = 1 + i$ y $T\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -1 + i$. Por tanto, la imagen de la circunferencia $\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ debe ser la recta horizontal $v = 1$. Usando el punto de prueba $z = -\frac{1}{2}$, encontramos que $T\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{3}i$, y así concluimos que el dominio que se muestra a color entre las circunferencias de la figura 7.5.3(a) se mapean con $w = T(z)$ sobre el dominio que se muestra en gris entre las rectas horizontales de la figura 7.5.3(b).

**Paso 2** Del paso 1 se tiene que $w = T(z)$ mapea la circunferencia $|z| = 1$ sobre la recta horizontal $v = 0$, y éste mapea la circunferencia $\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ sobre la recta horizontal $v = 1$. Por tanto, las condiciones de frontera transformadas son $\Phi = -10$ en la recta $v = 0$ y $\Phi = 20$ en la recta $v = 1$. Vea la figura 7.5.3(b).

**Paso 3** Modelando después del ejemplo 2 de la sección 3.4 y el problema 12 de los ejercicios 3.4, una solución del problema de Dirichlet transformado está dado por

$$\Phi(u, v) = 30v - 10.$$

**Paso 4** Una solución del problema de Dirichlet original se obtiene sustituyendo las partes real e imaginaria de $T(z)$ definida en (5) para las variables $u$ y $v$ en $\Phi(u, v)$. Al sustituir el símbolo $z$ con $x + iy$ en $T(z)$ y simplificando se obtiene:

$$T(x + iy) = (1 - i)\frac{x + iy - i}{x + iy - 1} = (1 - i)\frac{x + i(y - 1)}{x - 1 + yi}\,\frac{x - 1 - iy}{x - 1 - iy}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1}{(x - 1)^2 + y^2} + \frac{1 - x^2 - y^2}{(x - 1)^2 + y^2}i.$$

Por tanto,

$$\phi(x, y) = 30\frac{1 - x^2 - y^2}{(x - 1)^2 + y^2} - 10 \tag{6}$$

es la función de potencial electrostático deseada. ❑

Una función de potencial compleja de la función armónica $\phi(x, y)$ dada por (6) en el ejemplo 2 se puede encontrar de la siguiente manera. Si $\Omega(z)$ es un potencial complejo para $\phi$, entonces, $\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ y $\Omega(z)$ es analítica en $D$. Del paso 4 del ejemplo 2 tenemos que la función compleja $T(z)$ dada por (5) tiene las partes real e imaginaria $u = \dfrac{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1}{(x - 1)^2 + y^2}$ y $v = \dfrac{1 - x^2 - y^2}{(x - 1)^2 + y^2}$, respectivamente. Es decir, $T(z) = u + iv$. También tenemos del paso 4 que $\phi(x, y) = 30v - 10$. Para obtener una función con $30v - 10$ como su parte real, multiplicamos $T(z)$ por $-30i$ y después se resta 10:

$$-30iT(z) - 10 = -30i(u + iv) - 10 = 30v - 10 - 30ui.$$

Ya que $T(z) = (1 - i)\dfrac{z - i}{z - 1}$ es analítica en $D$, se tiene que la función $-30iT(z) - 10$ también es analítica en $D$. Por tanto,

$$\Omega(z) = -30i(1 - i)\frac{z - i}{z - 1} - 10 \tag{7}$$

es una función de potencial compleja para $\phi(x, y)$. Ya que $\phi$ representa el potencial electrostático, las curvas de nivel de las partes real e imaginaria de $\Omega$ representan las curvas equipotenciales y las líneas de fuerza, respectivamente. La figura generada en *Mathematica* de la figura 7.5.4 muestra las curvas equipotenciales a color y las líneas de fuerza en negro.

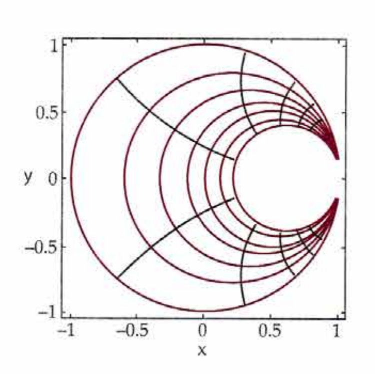
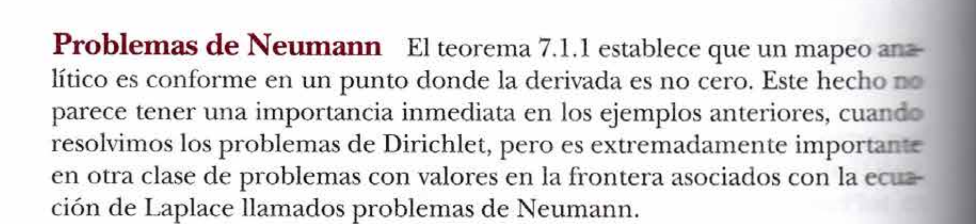



**Figura 7.5.4** Curvas equipotenciales y líneas de fuerza del ejemplo 2



**Problemas de Neumann** El teorema 7.1.1 establece que un mapeo analítico es conforme en un punto donde la derivada es no cero. Este hecho no parece tener una importancia inmediata en los ejemplos anteriores, cuando resolvimos los problemas de Dirichlet, pero es extremadamente importante en otra clase de problemas con valores en la frontera asociados con la ecuación de Laplace llamados problemas de Neumann.

### *Problema de Neumann*

*Suponga que D es un dominio en el plano y que h es una función definida en la frontera de C de D. El problema de encontrar una función $\phi(x, y)$ que satisface la ecuación de Laplace en D cuya derivada normal $d\phi/dn$ es igual a h en la frontera de C de D se llama* ***problema de Neumann.***

Ciertos tipos de problemas de Neumann se producen naturalmente en el estudio de la electrostática, flujo de fluidos y el flujo de calor. Por ejemplo, considere el problema de determinar la temperatura en estado estable $\phi$ en un dominio $D$ con frontera $C$. Si se especifican las temperaturas en la frontera $C$ de $D$, entonces tenemos un problema de Dirichlet. Sin embargo, también puede ser el caso de que toda o parte de la frontera está **aislada**. Esto significa que no hay flujo de calor a través de ella, y, se puede demostrar que esto implica que la derivada direccional de $\phi$ en la dirección del vector normal $\mathbf{n}$ a $C$ es 0. A esta derivada la llamamos **derivada normal** y la denotamos por $d\phi/dn$. En resumen, una curva frontera aislada en un problema de flujo de calor corresponde a una condición frontera de la forma $d\phi/dn = 0$, y, por tanto, es un ejemplo de un problema de Neumann. Como lo establece el siguiente teorema, los mapeos conformes conservan las condiciones de frontera de la forma $d\phi/dn = 0$.

**Teorema 7.5.1 Conservación de las condiciones frontera**

Supongamos que la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es conforme en todos los puntos de una curva suave $C$. Sea $C'$ la imagen de $C$ bajo $w = f(z)$. Si la derivada normal $d\Phi/dn$ de la función $\Phi(u, v)$ satisface

$$\frac{d\Phi}{dN} = 0$$

en cada punto en $C'$ en el plano $w$, entonces la derivada normal $d\phi/dn$ de la función $\phi(x, y) = \Phi(u(x, y), v(x, y))$ satisface

$$\frac{d\phi}{dn} = 0$$

en cada punto de $C$ en el plano $z$.

**Demostración** Supongamos que $f$ y $h$ satisfacen las hipótesis del teorema. Sea $z_0 = x_0 + iy_0$ un punto de $C$ y sea $w_0 = u_0 + iv_0 = f(z_0)$ su imagen en $C'$. Recuerde del cálculo de varias variables que si $\mathbf{N}$ es un vector normal a $C'$ en $w_0$, entonces la derivada normal en $w_0$ está dada por el producto escalar

$$\frac{d\Phi}{dN} = \nabla\Phi \cdot \mathrm{N},$$

donde $\nabla\Phi$ es el vector gradiente $\Phi_u(u_0, v_0)\mathbf{i} + \Phi_v(u_0, v_0)\mathbf{j}$. La condición $d\Phi/dN = 0$ implica que $\nabla\Phi$ y $\mathbf{N}$ son ortogonales, o, equivalentemente, que $\nabla\Phi$ es un vector tangente a $C'$ en $w_0$. Sea $B'$ la curva de nivel $\Phi(u, v) = c_0$ que contiene a $(u_0, v_0)$. En el cálculo de varias variables, aprendió que el vector gradiente $\nabla\Phi$ es ortogonal a la curva de nivel $B'$. Por tanto, ya que el gradiente es tangente a $C'$ y ortogonal a $B'$, concluimos que $C'$ es ortogonal a $B'$ en $w_0$. Vea la figura 7.5.5.

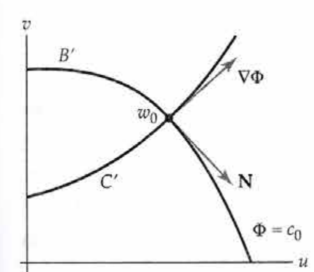


Figura 7.5.5 Figura para la demostración del teorema 7.5.1

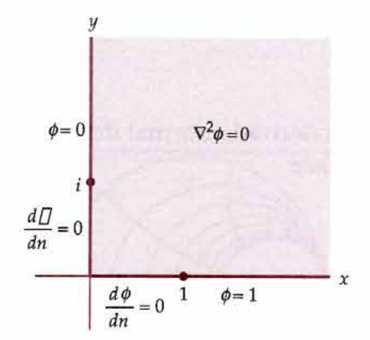
Consideremos ahora la curva de nivel $B$ en el plano $z$ dado por

$$\phi(x, y) = \Phi(u(x, y), v(x, y)) = c_0.$$

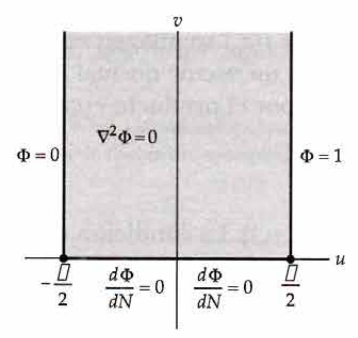
El punto $(x_0, y_0)$ está en $B$ y el vector gradiente $\nabla\phi$ es ortogonal a $B$ en este punto. Por otra parte, dado cualquier punto$(x, y)$ sobre $B$ en el plano $z$, tenemos que el punto $(u(x, y), v(x, y))$ está en $B'$ en el plano $w$. Es decir, la imagen de $B$ bajo $w = f(z)$ es $B'$. La curva $C$ intersecta $B$ en $z_0$, y ya que $f$ es conforme en $z_0$, se deduce que el ángulo entre $C$ y $B$ en $z_0$ es igual al ángulo entre $C'$ y $B'$ en $w_0$. En el párrafo anterior encontramos que este ángulo es $\pi/2$, y así $C$ y $B$ son ortogonales en $z_0$. Ya que $\nabla\phi$ es ortogonal a $B$, debemos tener que $\nabla\phi$ es tangente a $C$. Si $\mathbf{n}$ es un vector normal a $C$ en $z_0$, entonces, hemos demostrado que $\nabla\phi$ y $\mathbf{n}$ son ortogonales. Por tanto,

$$\frac{d\phi}{dn} = \nabla\phi \cdot \mathbf{n} = 0. \qquad \square$$

El teorema 7.5.1 nos da un procedimiento para resolver los problemas de Neumann asociados con condiciones de frontera de la forma $d\phi/dn = 0$. Es decir, seguimos los mismos cuatro pasos que se indican en las páginas 386 y 387 para resolver un problema de Dirichlet. En el paso 1, sin embargo, encontramos un mapeo conforme de $D$ sobre $D'$. Ya que los mapeos conformes conservan las condiciones de frontera de la forma $d\phi/dn = 0$, la solución del problema de Neumann asociado en $D'$, nos da una solución del problema original de Neumann. Dado que los mapeos analíticos son conformes en los puntos no críticos, este método también funciona con las condiciones de frontera **mixtas**. Generalmente, estas son las condiciones frontera donde los valores de $\phi$ se especifican en algunas curvas frontera, mientras que se requiere que la derivada normal satisfaga que $d\phi/dn = 0$ en las otras curvas frontera.




**(a)** Problema de valores en la frontera




**(b)** Problema de valores en la frontera transformada

**Figura 7.5.6** Figura para el ejemplo 3

### EJEMPLO 3 Una aplicación de flujo de calor

Encuentre la temperatura en estado estable $\phi$ en el primer cuadrante, que se muestra a color en la figura 7.5.6(a), que cumpla las condiciones de frontera mixtas dadas.

**Solución** La temperatura de estado estable $\phi$ es una solución de la ecuación de Laplace en el dominio $D$ definido por $0 < x < \infty$, $0 < y < \infty$, que satisfacen las condiciones de frontera

$$\begin{aligned}
\phi(0, y) &= 0, \quad y > 1 \\
\phi(x, 0) &= 1, \quad x > 1 \\
\frac{d\phi}{dn} &= 0, \text{ para } 0 < y < 1, x = 0, \text{ y } 0 < x < 1, y = 0.
\end{aligned}$$

Determinaremos $\phi$ utilizando los cuatro pasos que se indican en las páginas 386 y 387.

**Paso 1** Como veremos en el paso 3, este tipo particular de problema con valores en la frontera es fácil de resolver en la franja vertical semi−infinita $-a < u < a$, $v > 0$, cuando la curva frontera $-a < u < a$, $v = 0$ está aislada. Así, en este paso encontramos un mapeo conforme del primer cuadrante sobre una franja vertical semi-infinita. Identificando $\alpha = 2$ en la entrada E-4 del apéndice III, vemos que el primer cuadrante se mapea sobre el semiplano superior $v > 0$ con el mapeo $w = z^2$. Después se aplica el mapeo $w = \operatorname{sen}^{-1} z$ de la entrada E-6. Bajo este mapeo, el semiplano superior $y > 0$

se mapea sobre la franja vertical semi-infinita $-\frac{1}{2}\pi < u < \frac{1}{2}\pi$, $v > 0$. Por tanto, la composición

$$w = \operatorname{sen}^{-1}\left(z^2\right) \tag{8}$$

mapea el primer cuadrante $x > 0$, $y > 0$, sobre el dominio $D'$ definido por $-\frac{1}{2}\pi < u < \frac{1}{2}\pi$, $v > 0$.

**Paso 2** De las entradas E−4 y E−6 del apéndice III, vemos que las curvas frontera $1 < x < \infty$, $y = 0$, y $1 < y < \infty$, $x = 0$, se mapean con $w = \operatorname{sen}^{-1}(z^2)$ sobre las semirrectas $u = \frac{1}{2}\pi, v > 0$, y $u = -\frac{1}{2}\pi, v > 0$, respectivamente. También vemos que los segmentos $0 < x < 1$, $y = 0$, y $0 < y < 1$, $x = 0$, se mapean sobre los segmentos $0 < u < \frac{1}{2}\pi, v = 0$, y $-\frac{1}{2}\pi < u < 0, v = 0$, respectivamente. Por tanto, las condiciones de frontera se transforman

$$\Phi\left(-\frac{\pi}{2}, v\right) = 0, \quad \Phi\left(\frac{\pi}{2}, v\right) = 1, v > 0$$
$$\frac{d\Phi}{dN} = 0, \quad -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, v = 0.$$

**Paso 3** El examen del dominio $D'$ y las condiciones de frontera transformadas sugiere que una solución $\Phi$ es una función lineal en la variable $u$. Es decir,

$$\Phi(u, v) = Au + B$$

para algunas constantes reales $A$ y $B$. Ya que el vector $\mathbf{N} = 0\mathbf{i} + 1\mathbf{j}$ es normal a la curva frontera $-\frac{1}{2}\pi < u < \frac{1}{2}\pi$, $v = 0$, tenemos

$$\frac{d\Phi}{dN} = \nabla\Phi \cdot \mathbf{N} = A(0) + 0(1) = 0,$$

y así, para cualquier valor de $A$ y $B$, $\Phi$ que satisfacen la condición de frontera para la derivada normal. Al requerir que

$$\Phi\left(-\frac{\pi}{2}, v\right) = -A\frac{\pi}{2} + B = 0 \quad \text{y} \quad \Phi\left(\frac{\pi}{2}, v\right) = A\frac{\pi}{2} + B = 1,$$

podemos despejar las constantes $A$ y $B$ para obtener la solución

$$\Phi(u, v) = \frac{1}{\pi}u + \frac{1}{2}. \tag{9}$$

**Paso 4** Con el fin de encontrar una solución del problema original con valores en la frontera, sustituimos las partes real e imaginaria del mapeo en (8) para las variables $u$ y $v$ en (9). Ya que la fórmula para la parte real de la expresión $\operatorname{sen}^{-1}(z^2)$ es complicada, la forma más sencilla de escribir la solución $\phi$ es

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(z^2\right)\right] + \frac{1}{2}.$$

❑

Ya que tanto $1/\pi$ como $\frac{1}{2}$ son reales, una función de potencial compleja $\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ para la función de temperatura de estado estable $\phi$ que se encontró en el ejemplo 3 es

$$\Omega(z) = \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}^{-1}\left(z^2\right) + \frac{1}{2}.$$

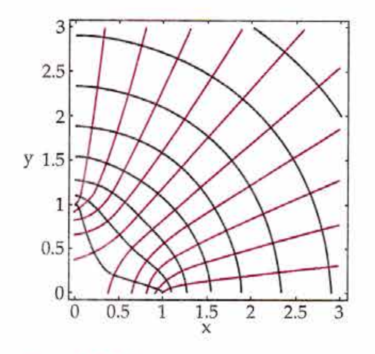



Figura 7.5.7 Isotermas y líneas de flujo de calor para el ejemplo 3

Las curvas de nivel de las partes real e imaginaria de $\Omega$ representan las isotermas y las líneas de flujo de calor, respectivamente. En la figura 7.5.7, hemos utilizado *Mathematica* para trazar las curvas. Las isotermas se muestran a color y las líneas de flujo de calor se muestran en negro.

## 7.5.2 Flujo de fluidos

**Líneas de corriente** Ahora veremos un método de uso de los mapeos conformes con el modelo del flujo planar de un fluido ideal. Recuerde de la sección 5.6 que un fluido ideal es un fluido incompresible no viscoso cuyo flujo es irrotacional. Si $\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ es el potencial de velocidad compleja de la corriente de un fluido ideal en un dominio $D$, entonces $\Omega(z)$ es analítica en $D$ y $f(z) = \overline{\Omega'(z)}$ es una representación compleja del campo de velocidades. Además, las **líneas de corriente** del flujo de un fluido ideal son las curvas de nivel $\psi(x, y) = c_2$, y, por esta razón, $\psi$, se llama **función de corriente** del flujo.

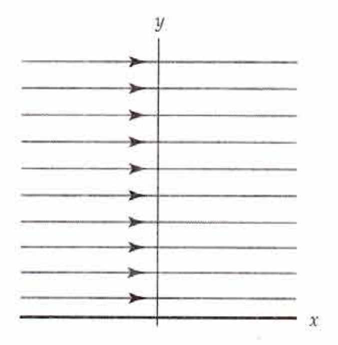



Figura 7.5.8 Flujo uniforme

Como un simple ejemplo considere la función analítica compleja $\Omega(z) = Az$, donde $A > 0$ es una constante real. Como se indica en el inciso (b) del ejemplo 3 de la sección 5.6, esta función es el potencial de velocidad complejo del campo de velocidades del flujo de un fluido ideal cuya representación compleja es $f(z) = \overline{\Omega'(z)} = A$. Ya que $\Omega(z) = Az = Ax + iAy$, las líneas de corriente de este flujo son las curvas $y = c_2$. Todas las líneas de corriente son, por tanto, horizontales. Vea la figura 7.5.8. Recuerde de la sección 5.6 que este flujo particular se denomina **flujo uniforme**.

El proceso de construcción de un flujo de un fluido ideal que se queda dentro de un dominio dado $D$ se llama **líneas de corriente**. Si $C$ es una curva frontera de $D$, entonces el requisito de que el flujo permanezca en el interior de $D$ significa que no hay flujo a través de $C$, o, equivalentemente, que la derivada direccional de $\psi$ en la dirección del vector normal $\mathbf{n}$ a $C$ es 0. Ya que el vector gradiente $\nabla\psi$ es siempre normal a la curva de nivel $\psi(x, y) = c_2$, esta condición es equivalente a que $\psi$ sea constante en $C$. Dicho de otra manera, la frontera de $D$ debe ser una línea de corriente del flujo. A continuación se resume este análisis.

***Líneas de corriente***

Supongamos que el potencial de velocidad complejo $\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ es analítica en un dominio $D$ y que $\psi$ es constante en la frontera de $D$. Entonces $f(z) = \overline{\Omega'(z)}$ es una representación compleja del campo de velocidades de un flujo de un fluido ideal en $D$. Además, si una partícula se coloca en $D$ y se deja fluir con el fluido, entonces su trayectoria $z(t)$ permanece en $D$.

Muchos problemas de líneas de corriente se pueden resolver usando mapeos conformes de manera similar a la que se presenta en la solución de problemas de Dirichlet y de Neumann. Para ello, consideramos el potencial de velocidad complejo como un mapeo conforme del plano $z$ al plano $w$. Si $z(t) = x(t) + iy(t)$ es una parametrización de una línea de corriente $\psi(x, y) = c_2$ en el plano $z$, entonces

$$w(t) = \Omega(z(t)) = \phi(x(t), y(t)) + i\psi(x(t), y(t)) = \phi(x(t), y(t)) + ic_2.$$

Así, la imagen de una línea de corriente bajo el mapeo conforme $w = \Omega(z)$ es una recta horizontal en el plano $w$. Dado que la frontera $C$ requiere que sea una línea de corriente, la imagen de $C$ bajo $w = \Omega(z)$ debe ser una recta horizontal. Es decir, podemos determinar el potencial de velocidad complejo

determinando un mapeo conforme de $D$ sobre un dominio en el plano $w$ que mapee la frontera $C$ de $D$ sobre una recta horizontal. Sin embargo, con frecuencia se presenta el caso, que es más fácil encontrar un mapeo conforme $z = \Omega^{-1}(w)$ de, digamos, el semiplano superior $v > 0$ sobre $D$ que toma la frontera $v = 0$ sobre la frontera $C$ de $D$. Si $z = \Omega^{-1}(z)$ es una función uno a uno, entonces su inversa $w = \Omega(z)$ es el potencial de velocidad complejo deseado. En resumen, tenemos el siguiente método para resolver los problemas de líneas de corriente.

***Solución de un problema de líneas de corriente***

Si $w = \Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ es un mapeo conforme unívoco del dominio $D$ en el plano $z$ sobre un dominio $D'$ en el plano $w$ tal que la imagen de la frontera de C de $D$ es una recta horizontal en el plano $w$, entonces $f(z) = \overline{\Omega'(z)}$ es una representación compleja de un flujo de un fluido ideal en $D$.

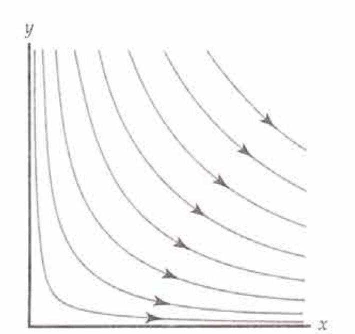



**Figura 7.5.9** Flujo alrededor de una esquina

**EJEMPLO 4 Flujo alrededor de una esquina**

Construya un flujo de un fluido ideal en el primer cuadrante.

**Solución** Sea $D$ el primer cuadrante $x > 0$, $y > 0$. De la entrada E-4 del apéndice III identificando $\alpha = 2$, vemos que $w = \Omega(z) = z^2$ es un mapeo conforme uno a uno del dominio $D$ sobre el semiplano superior $v > 0$ y que la imagen de la frontera de $D$ bajo este mapeo es el eje real $v = 0$. Por tanto, $f(z) = \overline{\Omega'(z)} = 2\bar{z}$ es una representación compleja del flujo un fluido ideal en el primer cuadrante. Ya que $\Omega(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, las líneas de corriente de este flujo son las curvas $2xy = c_2$. En la figura 7.5.9 se han dibujado algunas líneas de corriente. Debe quedar claro de esta figura por que este flujo se conoce como "flujo alrededor de una esquina". ❑

**EJEMPLO 5 Flujo alrededor de un cilindro**

Construya un flujo de un fluido ideal en el dominio que consiste de todos los puntos fuera de la circunferencia unitaria $|z| = 1$ y en el semiplano superior $y > 0$ que se muestra en la figura 7.5.10.

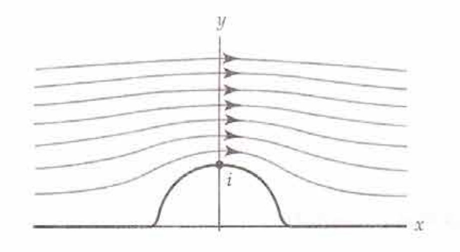



**Figura 7.5.10** Flujo alrededor de un cilindro

**Solución** Sea $D$ el dominio que se muestra en la figura 7.5.10. Identificando $a = 2$ en la entrada H-3 del apéndice III, se obtiene el mapeo conforme uno a uno

$$w = \Omega(z) = z + \frac{1}{z}$$

de $D$ sobre el semiplano superior $v > 0$. Además, la entrada H-3 indica que la frontera de $D$ es mapeada sobre el eje real $v = 0$. Por tanto,

$$f(z) = \overline{\Omega'(z)} = \overline{1 - \frac{1}{z^2}} = 1 - \frac{1}{\bar{z}^2}$$

es una representación compleja de un flujo de un fluido ideal en $D$. Ya que

$$\Omega(z) = z + \frac{1}{z} = x + \frac{x}{x^2 + y^2} + i\left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right),$$

las líneas de corriente de este flujo son las curvas

$$\psi(x, y) = c_2, \quad \text{o} \quad y - \frac{y}{x^2 + y^2} = c_2.$$

Algunas líneas de corriente de este flujo se han dibujado en la figura 7.5.10. ❑

No siempre es posible describir las líneas de corriente con una ecuación cartesiana de variables $x$ y $y$. Esta situación se presenta cuando se puede encontrar el mapeo adecuado $z = \Omega^{-1}(w)$ de un dominio $D'$ en el plano $w$ sobre el dominio $D$ en el plano $z$, pero no se puede resolver para el mapeo $w = \Omega(z)$. En estos casos, es posible describir las líneas de corriente paramétricamente.

## EJEMPLO 6 Líneas de corriente definidas paramétricamente

Construya un flujo de un fluido ideal en el dominio $D$ que consiste de todos los puntos del semiplano superior $y > 0$ excluyendo los puntos del rayo $y = \pi, -\infty < x \leq 0$, que se muestra en la figura 7.5.11.

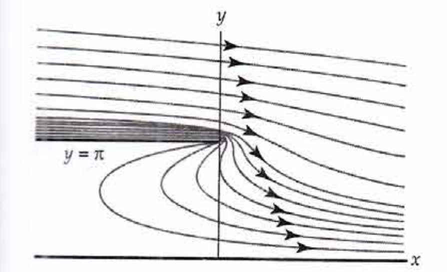



**Figura 7.5.11** Flujo para el ejemplo 6

**Solución** En el ejemplo 4 de la sección 7.3 se utilizó la fórmula de Schwarz-Christoffel para encontrar un mapeo conforme del semiplano superior $y > 0$ sobre el dominio $D$. Sustituyendo el símbolo $z$ con el símbolo $w$ en la solución del ejemplo 4, obtenemos el mapeo

$$z = \Omega^{-1}(w) = w + \text{Ln}(w) + 1 \tag{10}$$

del semiplano superior $v > 0$ en $D$. La inversa $\Omega$ del mapeo en (10) es un potencial de velocidad complejo de un flujo de un fluido ideal en $D$, pero no podemos resolver para $w$ para obtener una fórmula explícita para $\Omega$. Con el fin de describir las líneas de corriente, recordamos que las líneas de corriente en $D$ son las imágenes de rectas horizontales $v = c_2$ en el semiplano superior $v > 0$ bajo el mapeo $z = w + \text{Ln}(w) + 1$. Ya que una recta horizontal se puede describir por $w(t) = t + ic_2$, $-\infty < t < \infty$, se deduce que las líneas de corriente en $D$ están dadas paramétricamente por

$$z(t) = \Omega^{-1}(w(t)) = w(t) + \text{Ln}[w(t)] + 1 = t + ic_2 + \text{Ln}[t + ic_2] + 1,$$

o $x(t) = t + \frac{1}{2}\log_e(t^2 + c_2^2) + 1$, $y(t) = c_2 + \text{Arg}(t + ic_2)$, $-\infty < t < \infty$. En la figura 7.5.11 se han dibujado algunas líneas de corriente de este flujo utilizando *Mathematica.* ❑

Una función de corriente $\psi(x, y)$ es armónica, pero a diferencia de una solución de un problema de Dirichlet, $\psi(x, y)$ no tiene que ser acotada en $D$ ni satisface una condición de frontera fija. Por tanto, puede haber muchas funciones de líneas de corriente diferentes para un determinado dominio $D$. Se ilustra esto en el siguiente ejemplo.

## EJEMPLO 7 Líneas de corriente definidas paramétricamente

El mapeo conforme uno a uno

$$z = \Omega^{-1}(w) = w + e^{w} + 1$$

también mapea el semiplano superior $v > 0$ sobre el dominio $D$ de la figura 7.5.11. Las líneas de corriente de este flujo se parametrizan con

$$z(t) = t + ic_2 + e^{t + ic_2} + 1,$$

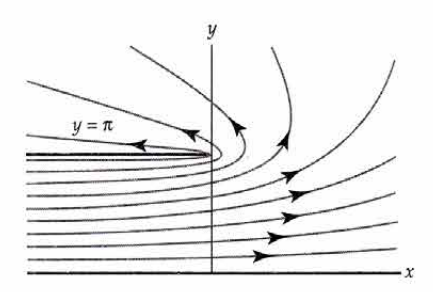



Figura 7.5.12 Flujo para el ejemplo 7

o $x(t) = t + e^t \cos c_2 + 1$, $y(t) = c_2 + e^t \operatorname{sen} c_2$, $-\infty < t < \infty$. De la gráfica generada con *Mathematica* de las líneas de corriente en la figura 7.5.12, se observa que este flujo es diferente del construido en el ejemplo 6. ❑

## Fuentes y sumideros

Recuerde de la sección 5.6 que si **F** es el campo de velocidades de un flujo de fluido planar, entonces, una **fuente** es un punto $z_0$ punto en el que el fluido se produce y un **sumidero** es un punto $z_0$ en el que el fluido desaparece. Si $C$ es un contorno cerrado simple, entonces un valor distinto de cero del flujo neto a través de $C$, es decir, un valor distinto de cero de la integral $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, ds$, indica la presencia de ya sea una fuente o un sumidero en el interior de $C$. Vimos en la sección 5.6 que si **F** es el campo de velocidad del flujo de un fluido incompresible en un dominio $D$, entonces no hay fuentes o sumideros en $D$. Sin embargo, la incompresibilidad no descarta la existencia de una fuente o sumidero en la frontera de $D$. Fuentes y sumideros en la frontera de $D$ se utilizan para modelar los flujos planares en los cuales el fluido sale o entra en $D$ a través de una pequeña rendija en la frontera.

En el problema 23 de los ejercicios 5.6 encontramos que una fuente en un punto $z = x_1$ en la frontera $y = 0$ del semiplano superior $y > 0$ se puede describir por el potencial de velocidad complejo

$$\Omega(z) = k\mathrm{Ln}\,(z - x_1), \tag{11}$$

donde $k$ es una constante positiva. Del mismo modo, $z = x_1$ es un sumidero cuando $k$ es una constante negativa. La fuerza de la fuente o sumidero es proporcional a $|k|$. Un flujo que contiene tanto fuentes como sumideros se puede describir mediante la suma de funciones de la forma (11). Por ejemplo,

$$\Omega(z) = \mathrm{Ln}(z + 1) - \mathrm{Ln}(z - 1) = \mathrm{Ln}\frac{z + 1}{z - 1} \tag{12}$$

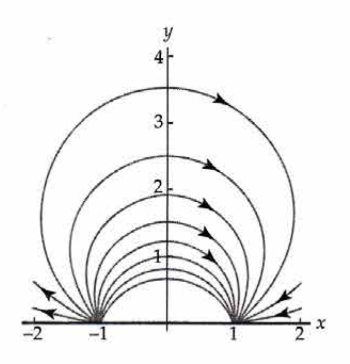



Figura 7.5.13 Fuente y sumidero

es un potencial de velocidad complejo para el flujo de un fluido ideal en el semiplano superior $y > 0$ que tiene una fuente en $x_1 = -1$ y un sumidero en $x_2 = 1$ de igual intensidad. Vea la figura 7.5.13. También debe comparar (12) con el problema 24 de los ejercicios 5.6.

Nuestro método para determinar la función de corriente en un dominio con las fuentes o sumideros en la frontera es similar al utilizado en ausencia de fuentes y sumideros. Sea $\psi(u, v)$ la función de corriente de un flujo de un fluido ideal en un dominio $D'$ en el plano $w$ con fuentes o sumideros en la frontera. Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es un mapeo conforme de un dominio $D$ en el plano $z$ sobre el dominio $D'$, entonces $\psi(x, y) = \psi(u(x, y), v(x, y))$ es una función de corriente para un flujo de un fluido ideal en $D$ con fuentes y sumideros en la frontera. Se ilustra este método en nuestro ejemplo final.

### EJEMPLO 8 Flujo con una fuente y sumidero de igual intensidad

Construya un flujo de un fluido ideal en el dominio $D$ dado por $0 < \arg(z) < \pi/4$ con una fuente en el punto frontera $x_1 = 1$ y un sumidero de igual intensidad en el punto frontera de $x_2 = 3$.

**Solución** A partir de la entrada E-4 del apéndice III, con $\alpha = 4$, tenemos que $f(z) = z^4$ es un mapeo conforme uno a uno de $D$ sobre el semiplano superior $v > 0$. Bajo este mapeo, la imagen de $x_1 = 1$ es $u_1 = 1^4 = 1$ y la imagen

de $x_2 = 3$ es $u_2 = 3^4 = 81$. Con las modificaciones evidentes para (12), obtenemos el potencial de velocidad complejo

$$\text{Ln}(w-1) - \text{Ln}(w-81), \tag{13}$$

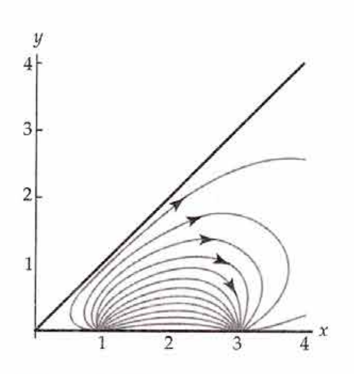



Figura 7.5.14 Figura para el ejemplo 8

que describe el flujo de un fluido ideal en el semiplano superior $v > 0$ que tiene una fuente en $u_1 = 1$ y un sumidero de igual intensidad en $u_2 = 81$. Dado que el dominio $D$ se mapea en el dominio $v > 0$ con el mapeo conforme $w = z^4$, se obtiene una función de potencial complejo para un flujo en $D$ al sustituir el símbolo $w$ con $z^4$ en (13). De esto se obtiene

$$\Omega(z) = \text{Ln}\left(z^4 - 1\right) - \text{Ln}\left(z^4 - 81\right). \tag{14}$$

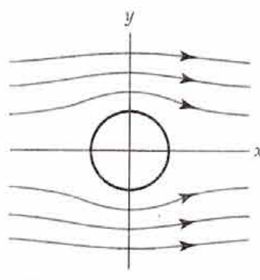
Las líneas de corriente de este flujo están dadas por $\psi(x, y) = c_2$, o

$$\text{Arg}\left(z^4 - 1\right) - \text{Arg}\left(z^4 - 81\right) = c_2.$$

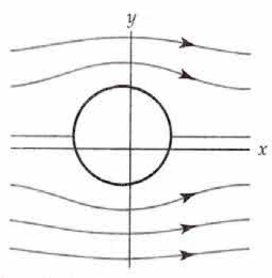
Vea la figura 7.5.14. ❑

## Comentarios

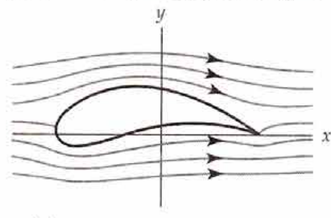
El mapeo complejo $w = J(z) = z + k^2/z$ se llama **transformación de Joukowski**. Bajo este mapeo, una circunferencia en el plano $z$ que contiene al punto $z_1 = -1$ y pasa a través del punto de $z_2 = 1$ se mapea sobre una curva en el plano $w$ que se asemeja la sección transversal del ala de un avión. Vea la figura 7.5.15(c). La curva imagen se llama **perfil de Joukowski** y el flujo de aire alrededor de esta curva se puede determinar utilizando las técnicas de esta sección. Comenzamos con el flujo de muestra en la figura 7.5.15(a) dada por $\Omega(z) = z + 1/z$ alrededor de la circunferencia unitaria $|z| = 1$. Usando un mapeo lineal apropiado, se puede ajustar este flujo para ser uno en torno a una circunferencia que contiene al punto $z_1 = -1$ y pasa por el punto $z_2 = 1$. Vea la figura 7.5.15(b). La transformación Joukowski se utiliza para "transformar" este flujo a uno alrededor del perfil, como se muestra en la figura 7.5.15(c).




(a) Flujo alrededor de una circunferencia unitaria




(b) Flujo alrededor de una circunferencia que contiene a $z_1 = -1$ y pasa por $z_2 = 1$




(c) Flujo alrededor de un perfil

Figura 7.5.15 Flujo alrededor de un perfil de Joukowski

## EJERCICIOS 7.5.1 *Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP-20.*

### 7.5.1 Problemas con valores en la frontera

En los problemas 1 a 6, **(a)** determine un mapeo conforme del dominio que se muestra a color en el semiplano superior, y **(b)** utilice el mapeo de (a) y la solución (7) en la sección 7.4 para encontrar la temperatura de estado estable $\phi(x, y)$ en el dominio sujeto a las condiciones de frontera dadas.



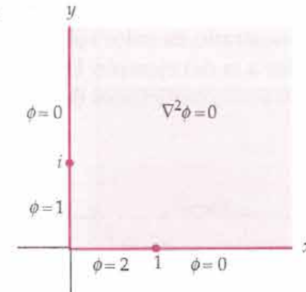




**Figura 7.5.16** Figura para el problema 1



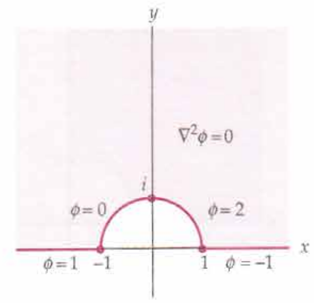




**Figura 7.5.17** Figura para el problema 2

**3.**

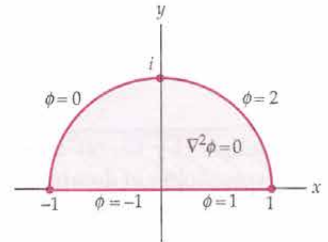



**Figura 7.5.18** Figura para el problema 3

**4.**

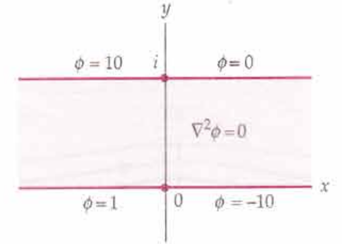



**Figura 7.5.19** Figura para el problema 4

**5.**

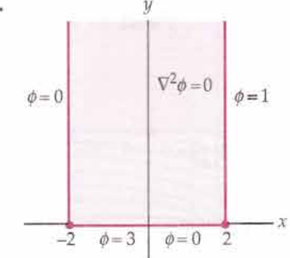



**Figura 7.5.20** Figura para el problema 5

**6.**

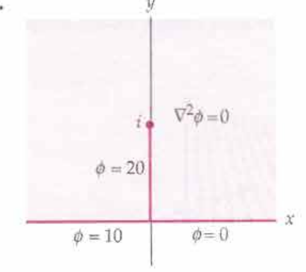



**Figura 7.5.21** Figura para el problema 6 [*Sugerencia*: Use la inversa del mapeo en la entrada M-4 del apéndice III.]

En los problemas 7 y 8, **(a)** determine una transformación fraccional lineal del dominio mostrado a color sobre una franja infinita, y **(b)** utilice el mapeo de (a) y la solución del ejemplo 2 de la sección 3.4 para encontrar el potencial electrostático $\phi\,(x, y)$ en el dominio sujeto a las condiciones de frontera dadas.

**7.**

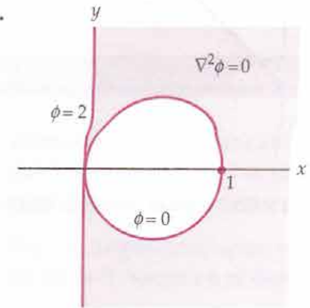



**Figura 7.5.22** Figura para el problema 7

**8.**

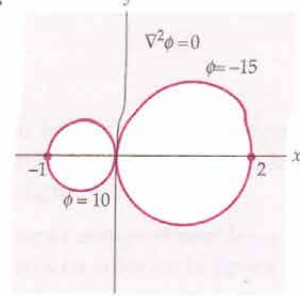



**Figura 7.5.23** Figura para el problema 8

En los problemas 9 y 10, (**a**) determine una transformación fraccional lineal del dominio mostrado en color sobre un anillo, y (**b**) utilice el mapeo de (a) y una solución similar a la del ejemplo 1 para encontrar el potencial electrostático $\phi(x, y)$ en el dominio a las condiciones de frontera dadas.

**9.**

Figura 7.5.24 Figura para el problema 9

**10.**

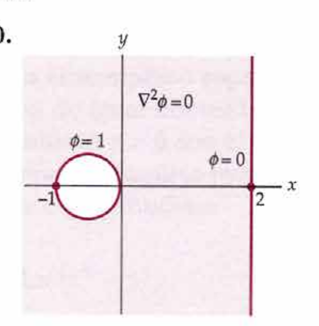



Figura 7.5.25 Figura para el problema 10

En los problemas 11 y 12, (**a**) determine un mapeo conforme del dominio que se muestra en color sobre el dominio que se utiliza en el ejemplo 3, y (**b**) utilice el mapeo de (a) y una solución similar a la del ejemplo 3 para encontrar la temperatura de estado estable $\phi(x, y)$ en el dominio sujeto a las condiciones de frontera dadas.

**11.**

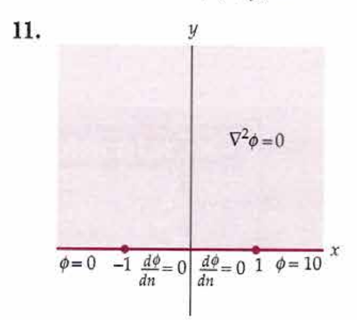



Figura 7.5.26 Figura para el problema 11

**12.**

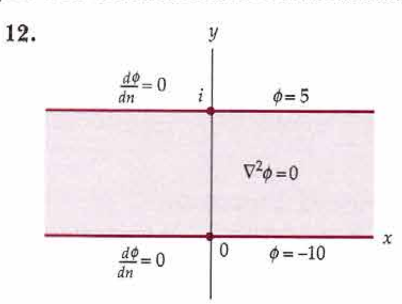



Figura 7.5.27 Figura para el problema 12

## 7.5.2 Flujo de fluidos

En los problemas 13 a 16 determine el potencial de velocidad complejo $\Omega(z)$ para el flujo de un fluido ideal en el dominio que se muestra a color.

**13.**

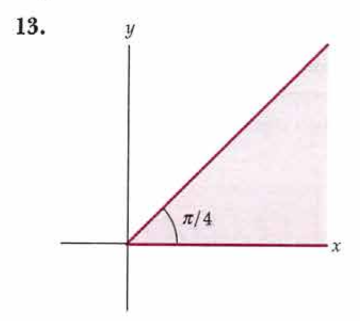



Figura 7.5.28 Figura para el problema 13

**14.**

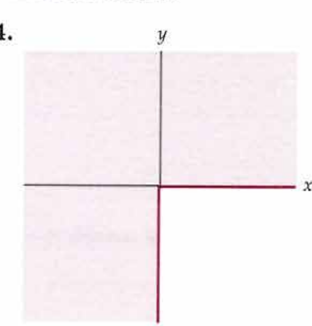



Figura 7.5.29 Figura para el problema 14



**15.**

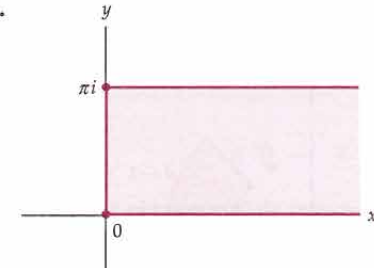



Figura 7.5.30 Figura para el problema 15

**16.**

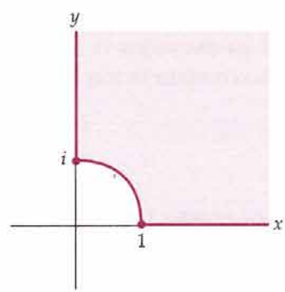



Figura 7.5.31 Figura para el problema 16

En los problemas 17 a 20 el flujo de un fluido ideal se muestra en un dominio en el plano $z$. (**a**) Determine un mapeo conforme del semiplano superior $w > 0$ sobre el dominio en el plano $z$, y (**b**) encuentre una representación paramétrica de las líneas de corriente del flujo.

**17.**

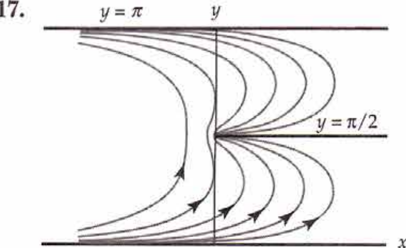



Figura 7.5.32 Figura para el problema 17

**18.**

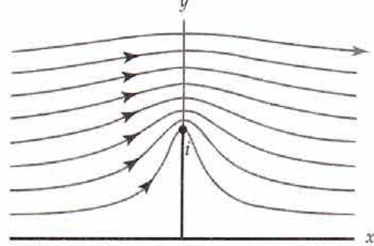



Figura 7.5.33 Figura para el problema 18

**19.**

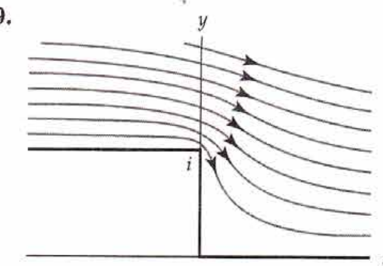



Figura 7.5.34 Figura para el problema 19

**20.**

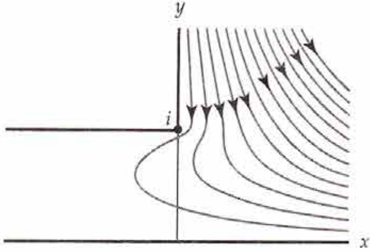



Figura 7.5.35 Figura para el problema 20

En los problemas 21 y 22 construya el flujo de un fluido ideal en el dominio dado, con los sumideros o fuentes en la frontera del dominio.

**21.** El dominio del problema 13 con una fuente en $z_1 = 1 + i$ y un sumidero en $z_2 = 2$

**22.** El dominio del problema 16 con una fuente en $z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i$ y sumideros en $z_2 = 2$ y $z_3 = 3i$

## Enfocando los conceptos

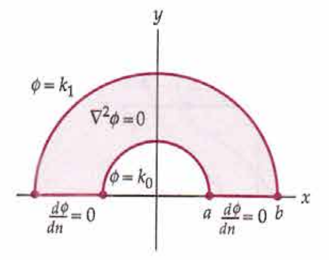



Figura 7.5.36 Figura para el problema 23

**23.** Demuestre que la función dada por (3) con los símbolos $u$ y $v$ reemplazados por los símbolos $x$ y $y$ es una solución del problema con valores en la frontera en el dominio que se muestra en color en la figura 7.5.36.

**24.** Use un mapeo conforme y el problema 23 para resolver el problema con valores en la frontera en el dominio que se muestra en color en la figura 7.5.37.

**25.** Use un mapeo conforme y el problema 23 para resolver el problema con valores en la frontera en el dominio que se muestra a color en la figura 7.5.38.

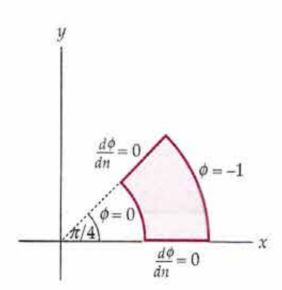



**Figura 7.5.37** Figura para el problema 24

**Figura 7.5.38** Figura para el problema 25

**26.** En el problema 22 de los ejercicios 5.6 definimos **un punto de estancamiento** de un flujo a un punto en el que $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{0}$. Encuentre los puntos de estancamiento para:

(**a**) el flujo en el ejemplo 5

(**b**) el flujo en el problema 16.

**27.** En este problema se va a construir el flujo de un fluido ideal a través de una rendija de la figura 7.5.40.

(**a**) Determine un potencial de velocidad para el flujo de un fluido ideal en el dominio $-\pi/2 < x < \pi/2$, $-\infty < y < \infty$, que se muestra en la figura 7.5.39.

(**b**) Utilice el potencial del inciso (a) y un mapeo conforme para encontrar el potencial de velocidad para el flujo de un fluido ideal en la región que se muestra en la figura 7.5.40.

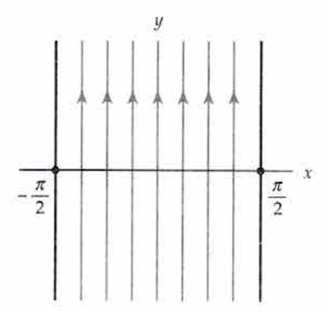



**Figura 7.5.39** Figura para el problema 27

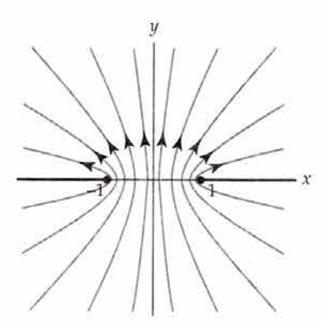



**Figura 7.5.40** Figura para el problema 27

**28.** En este problema se va a construir el flujo de un fluido ideal en torno a una placa que se muestra en la figura 7.5.42.

(**a**) Utilice un mapeo lineal y el potencial de velocidad del ejemplo 5 para demostrar que el potencial de velocidades de un fluido ideal en el dominio que se muestra en la figura 7.5.41 está dada por

$$\Omega(z) = \frac{z}{e^{i\alpha}} + \frac{e^{i\alpha}}{z}.$$

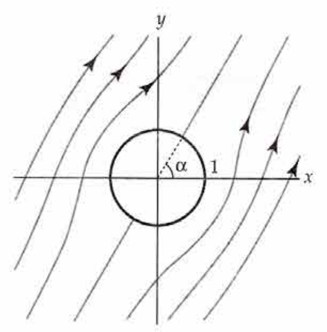



**Figura 7.5.41** Figura para el problema 28

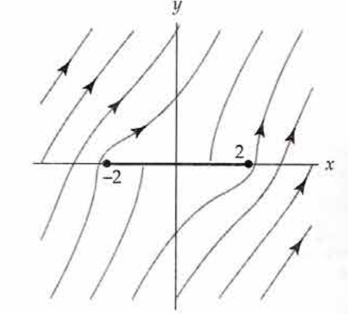



**Figura 7.5.42** Figura para el problema 28

(**b**) El dominio fuera de la circunferencia unitaria se muestra en la figura 7.5.41 se mapea sobre el plano complejo excluyendo el segmento de recta $y = 0$, $-2 \leq x \leq 2$, que se muestra en la figura 7.5.42 por el mapeo conforme

$$w = \frac{z + \left(z^2 - 4\right)^{1/2}}{2}.$$

Utilice el potencial de velocidad del inciso (**a**) y este mapeo conforme para encontrar el potencial de velocidad para el flujo de un fluido ideal en la región que se muestra en la figura 7.5.42.

## Tarea del laboratorio de cómputo

En los problemas 29 a 36 utilice un SAC para trazar las isotermas para la temperatura en estado estable $\phi(x, y)$ dada.

**29.** $\phi(x, y)$ es la temperatura de estado estable del problema 1.

**30.** $\phi(x, y)$ es la temperatura de estado estable del problema 2.

**31.** $\phi(x, y)$ es la temperatura de estado estable del problema 3.

**32.** $\phi(x, y)$ es la temperatura de estado estable del problema 4.

**33.** $\phi(x, y)$ es la temperatura de estado estable del problema 5.

**34.** $\phi(x, y)$ es la temperatura de estado estable del problema 6.

**35.** $\phi(x, y)$ es la temperatura de estado estable del problema 11.

**36.** $\phi(x, y)$ es la temperatura de estado estable del problema 12.

En los problemas 37 a 40 utilice un SAC para trazar las curvas equipotenciales para el potencial electrostático $\phi(x, y)$.

**37.** $\phi(x, y)$ es el potencial electrostático del problema 7.

**38.** $\phi(x, y)$ es el potencial electrostático del problema 8.

**39.** $\phi(x, y)$ es el potencial electrostático del problema 9.

**40.** $\phi(x, y)$ es el potencial electrostático del problema 10.

En los problemas 41 a 44 utilice un SAC para trazar las líneas de corriente del flujo determinado.

**41.** El flujo del problema 13.

**42.** El flujo del problema 14.

**43.** El flujo del problema 15.

**44.** El flujo del problema 16.

## CAPÍTULO 7 PREGUNTAS DE REPASO

*Las respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar inician en la página RESP–21.*

En los problemas 1 a 15 la respuesta es verdadero o falso. Si el enunciado es falso, justifique su respuesta ya sea explicando por qué es falso o dando un contraejemplo: si el enunciado es verdadero, justifique su respuesta, ya sea justificando el enunciado o citando un resultado adecuado en este capítulo.

**1.** Si $f(z)$ es analítica en un punto $z_0$, entonces el mapeo $w = f(z)$ es conforme en $z_0$.

**2.** El mapeo $w = z^2 + iz + 1$ no es conforme en $z = -\frac{1}{2}i.$.

**3.** El mapeo $w = z^2 + 1$ no es conforme en $z = \pm\, i$.

4. El mapeo $w = \bar{z}$ no es conforme en todos los puntos en el plano complejo.

5. Una transformación fraccional lineal es conforme en todos los puntos de su dominio.

6. La imagen de una circunferencia bajo una transformación fraccional lineal es una circunferencia.

7. La transformación fraccional lineal $T(z) = \dfrac{z - i}{z + 1}$ mapea los puntos 0, $-1$ e $i$ sobre los puntos $-i$, $\infty$ y 0, respectivamente.

8. Dados los tres puntos distintos cualesquier $z_1$, $z_2$ y $z_3$, hay una transformación fraccional lineal que mapea $z_1$, $z_2$ y $z_3$ sobre 0, 1 e $\infty$.

9. La inversa de la transformación fraccional lineal $T(z) = (az + b)/(cz + d)$ es $T^{-1}(z) = (cz + d)/(az + b)$.

10. Si $f'(z) = A(z + 1)^{-1/2}(z - 1)^{-3/4}$, entonces $w = f(z)$ mapea el semiplano superior sobre una región poligonal no acotada.

11. Si $f'(z) = A(z + 1)^{-1/2}z^{-1/2}(z - 1)^{-1/2}$, entonces $w = f(z)$ mapea el semiplano superior sobre un rectángulo.

12. Cada problema de Dirichlet en el semiplano superior se puede resolver utilizando la fórmula integral de Poisson.

13. Si $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es un mapeo conforme de un dominio $D$ sobre el semiplano superior $v > 0$ y si $\Phi(u, v)$ es una función armónica para $v > 0$, entonces $\phi(x, y) = \Phi(u(x, y), v(x, y))$ es armónica en $D$.

14. Si $\psi(x, y)$ es una función definida en un dominio $D$ y si la frontera de $D$ es una curva de nivel de $\psi(x, y)$, entonces $\psi(x, y)$ es la función de corriente de un fluido ideal en $D$.

15. Dado un dominio $D$, puede haber más de un flujo de un fluido ideal que se queda dentro de $D$.

En los problemas 16 a 30 trate de completar los espacios en blanco, sin consultar el libro.

16. La función analítica $f(z) = \cosh z$ es conforme excepto en $z =$ ________.

17. Los mapeos conformes conservan tanto la magnitud como el ________ de un ángulo.

18. El mapeo ________ es un ejemplo de un mapeo que es conforme en todos los puntos del plano complejo.

19. Si $f'(z_0) = f''(z_0) = 0$ y $f'''(z_0) \neq 0$, entonces el mapeo $w = f(z)$ ________ la magnitud de los ángulos en el punto $z_0$.

20. $T(z) =$ ________ es una transformación fraccional lineal que mapea los puntos 0, $1 + i$, y $i$ sobre los puntos 1, $i$ e $\infty$.

21. La imagen de la circunferencia $|z - 1| = 2$ bajo la transformación fraccional lineal $T(z) = (2z - i)/(iz + 1)$ es una ________.

22. La imagen de una recta $L$ bajo la transformación fraccional lineal $T(z) = (iz - 2)/(3z + 1 - i)$ es una circunferencia si y sólo si el punto $z =$ ________ está en $L$.

23. La razón cruzada de los puntos $z$, $z_1$, $z_2$ y $z_3$ es ________ y ________.

24. La derivada de un mapeo de Schwarz-Christoffel del semiplano superior sobre el triángulo con vértices en 0, 1 y $1 + i$ es $f'(z) =$ ________.

25. Si $f'(z) = A(z + 1)^{-1/2}\, z^{-1/4}$, entonces $w = f(z)$ mapea el semiplano superior sobre una región poligonal con ángulos interiores ________.

26. La fórmula integral de Poisson da una solución integral $\phi(x, y)$ a un problema de Dirichlet en el semiplano superior $y > 0$ siempre que la función $f(x) = \phi(x, 0)$ es ________ y ________ en $-\infty < x < \infty$.

**27.** El potencial de velocidad complejo $\Omega(z) = z^5$ describe el flujo de un fluido ideal en el dominio $0 < \arg z <$ ________.

**28.** Si $\Omega(z) = e^z + e^{-z}$ es el potencial de velocidad complejo para el flujo de un fluido ideal en un dominio $D$, entonces una representación compleja del campo de velocidades está dada por $f(z) =$ ________________.

**29.** Si $z = \left(\dfrac{1+w}{1-w}\right)^2$ es un mapeo conforme uno a uno del semiplano superior en un dominio $D$, entonces, una línea de corriente del flujo de un fluido ideal en $D$ se parametriza con $z(t) =$ ________________

**30.** El potencial de velocidad complejo $\Omega(z) = \text{Ln}(z-2) + \text{Ln}(z-3) - \text{Ln}(z-4)$ describe el flujo de un fluido ideal en el semiplano superior $y > 0$ con un ________ en $z = 2$ y $z = 3$ y un ________________ en $z = 4$.

# Apéndices

## Apéndice I Demostración del teorema 2.6.1

El siguiente teorema se presentó en el punto 2.6 como un método práctico para el cálculo de límites complejos. En este apéndice damos la demostración completa épsilon-delta de este teorema.

**Teorema A.1 Partes real e imaginaria de un límite**

Suponga que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$, y $L = u_0 + iv_0$. Entonces $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ si y sólo si

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0.$$

**Demostración** El teorema A.1 establece que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L \tag{1}$$

si y sólo si

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0. \tag{2}$$

Ya que el teorema A.1 involucra un enunciado "si y sólo si", debemos demostrar dos cosas:

($i$) que (1) implica (2), y
($ii$) que (2) implica (1).

Comenzamos con la primera.

($i$) Si suponemos que $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$, entonces por la definición 2.6.1 de la sección 2.6 tenemos:

*Para toda* $\varepsilon > 0$ *existe una* $\delta > 0$ *tal que* $|f(z) - L| < \varepsilon$ *siempre que* $0 < |z - z_0| < \delta$. (3)

Usando las identificaciones $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y $L = u_0 + iv_0$ se obtiene:

$$|f(z) - L| = \sqrt{(u(x, y) - u_0)^2 + (v(x, y) - v_0)^2}.$$

Además, ya que $0 \leq (v(x, y) - v_0)^2$, se deduce que:

$$|u(x, y) - u_0| = \sqrt{(u(x, y) - u_0)^2} \leq \sqrt{(u(x, y) - u_0)^2 + (v(x, y) - v_0)^2}.$$

Por tanto, para todo $z = x + iy$ se tiene:

$$|u(x, y) - u_0| \leq |f(z) - L|. \tag{4}$$

En particular, si $|f(z) - L| < \varepsilon$, entonces $|u(x, y) - u_0| < \varepsilon$. Ahora al hacer las identificaciones $z = x + iy$ y $z_0 = x_0 + iy_0$ también encontramos que

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \tag{5}$$

Por tanto, se deduce de (3), (4) y (5) que para todo $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que $|u(x, y) - u_0| < \varepsilon$ siempre que $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$. Por tanto, por (7) en la sección 2.6, hemos demostrado que $\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} u(x, y) = u_0$.

Ya que $0 \leq (u(x, y) - u_0)^2$, podemos usar un argumento similar para establecer el límite en (2): $\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} v(x, y) = v_0$. Esto completa la demostración de que (1) implica (2).

($ii$) En esta parte se empieza por tomar los límites

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} u(x, y) = u_0 \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} v(x, y) = v_0$$

y después procedemos a demostrar que $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$. Dado que para cualquier $\varepsilon > 0$, entonces $\varepsilon/2 > 0$. Por tanto, de nuestra suposición de que $\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} u(x, y) = u_0$ y de (7) de la sección 2.6, tenemos que existe una $\delta_1 > 0$ tal que

$$|u(x, y) - u_0| < \varepsilon/2 \text{ siempre que } 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_1.$$

De manera similar, ya que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y) = v_0$, también existe una $\delta_2 > 0$ tal que

$$|v(x,y) - v_0| < \varepsilon/2 \text{ siempre } 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta_2.$$

Si hacemos que $\delta$ sea el mínimo de $\delta_1$ y $\delta_2$, es decir $\delta \leq \delta_1$ y $\delta \leq \delta_2$, entonces tenemos garantizado que $|u(x, y) - u_0| < \varepsilon/2$ y $|v(x, y) - v_0| < \varepsilon/2$ siempre que $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$. Así, de (5) obtenemos

$$|u(x,y) - u_0| + |v(x,y) - v_0| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |z - z_0| < \delta. \quad (6)$$

Por otra parte, identificando $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y $L = u_0 + iv_0$, la desigualdad del triángulo da

$$|f(z) - L| \leq |u(x,y) - u_0| + |v(x,y) - v_0|.$$

Por tanto, se deduce de (6) que $|f(z) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |z - z_0| < \delta$. Puesto que a $\varepsilon$ se le permitió ser cualquier número positivo, hemos demostrado que para cada $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que $|f(z) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |z - z_0| < \delta$, y por la definición 2.6.1 $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$. ❑

## Apéndice II Demostración del teorema de Cauchy-Goursat

En la sección 5.3 hemos demostrado el teorema de Cauchy, usando el teorema de Green. Esta simple demostración fue posible gracias a la hipótesis de continuidad de $f'$ a través de un dominio simplemente conexo $D$. El matemático francés Edouard Goursat (1858-1936) publicó una demostración del teorema de Cauchy en 1900 sin la suposición de continuidad. Como resultado se vinculó su nombre con el de Cauchy en el título de uno de los más fundamentales de todos los teoremas del análisis complejo.

En este apéndice se analiza cómo se realiza la demostración completa del teorema de Cauchy-Goursat. Para evitar repeticiones innecesarias durante el análisis vamos a dar por sentado que estamos trabajando en un dominio simplemente conexo $D$ y que $f$ representa una función analítica compleja en $D$.

*Nota* ➡

La demostración del teorema de Cauchy-Goursat se realiza en tres pasos. Los dos primeros son teoremas auxiliares, algunas veces llamados *lemas*, que en realidad son casos especiales del teorema de Cauchy-Goursat. El primero de estos teoremas auxiliares trata con las integrales a lo largo de un contorno triangular, y el segundo trata con integrales a lo largo de un contorno poligonal cerrado. El primer teorema se utiliza en la demostración del segundo, y el segundo se utiliza para establecer el teorema de Cauchy-Goursat en toda su generalidad.

Vamos a demostrar el teorema en primer lugar, pero debido a lo extenso de estas demostraciones, nos limitaremos a esbozar las demostraciones de los dos restantes.

**Teorema A.2 Contorno triangular**

Si $\Delta$ es un contorno triangular situado totalmente en $D$, entonces $\int_\Delta f(z)\,dz = 0$.

**Demostración.** Sea $\Delta$ el contorno triangular de la figura AII.1; los vértices de $\Delta$ están marcados con $A$, $B$ y $C$. Formamos cuatro triángulos más pequeños $C_1$, $C_2$, $C_3$ y $C_4$ uniendo los puntos medios $E$, $F$ y $G$ de los lados de $\Delta$ con segmentos de rectas como se muestra en la figura AII.2. Por el teorema 5.2.2(*iii*) se puede escribir

$$\begin{aligned}\oint_\Delta f(z)\,dz &= \int_{EBF} + \int_{FCG} + \int_{GAE}\\ &= \left(\int_{EBF} + \int_{FE}\right) + \left(\int_{FCG} + \int_{GF}\right)\\ &\quad + \left(\int_{GAE} + \int_{EG}\right) + \left(\int_{EF} + \int_{FG} + \int_{GE}\right)\\ &= \int_{EBFE} + \int_{FCGF} + \int_{GAEG} + \int_{EFGE}\end{aligned}$$

Las integrales $\int_{FE}$, $\int_{GF}$, $\int_{EG}$ se eliminan con $\int_{EF}$, $\int_{FG}$, $\int_{GE}$. ➡

o
$$\oint_\Delta f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz + \oint_{C_3} f(z)\,dz + \oint_{C_4} f(z)\,dz. \quad (1)$$

Entonces por (6) de la sección 1.2, la desigualdad del triángulo,

$$\left|\oint_\Delta f(z)\,dz\right| \le \left|\oint_{C_1} f(z)\,dz\right| + \left|\oint_{C_2} f(z)\,dz\right| + \left|\oint_{C_3} f(z)\,dz\right| + \left|\oint_{C_4} f(z)\,dz\right|. \quad (2)$$

En el simbolismo $\varepsilon$-$\delta$ de la definición 2.6.1, para todo $\varepsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que

$$|\eta(z)| < \varepsilon \quad \text{siempre que } |z - z_0| < \delta. \tag{7}$$

En este momento queremos resolver (6) para $f(z)$ y usarla para sustituir el integrando en la integral de contorno $\oint_{\Delta_n} f(z)\,dz$ que se presenta en (5). Los dos resultados son:

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + (z - z_0)\eta(z)$$

y

$$\oint_{\Delta n} f(z)dz = f(z_0)\oint_{\Delta n} dz + f'(z_0)\oint_{\Delta n}(z - z_0)dz + \oint_{\Delta n}(z - z_0)\eta(z)dz. \tag{8}$$

En (8) pudimos escribir $f(z_0)$ y $f'(z_0)$ fuera de la integral ya que estas cantidades son constantes. Además, en (8), $\oint_{\Delta_n} dz = 0$ y $\oint_{\Delta_n}(z - z_0)dz = 0$.

Los dos últimos resultados son ciertos para *cualquier* contorno cerrado simple (tal como $\Delta_n$) y se puede demostrar directamente de la definición 5.2.1 (vea el problema 29 de los ejercicios 5.2), o del teorema de Cauchy. (Ese último enunciado puede sorprender al lector; no, no lo estamos usando, lo que estamos tratando de demostrar, recuerde, es que la función constante 1 y la función polinomial $z - z_0$ son analíticas en $D$ y *tienen* derivadas continuas). Por lo que el lado derecho de (8) se reduce a un solo término:

$$\oint_{\Delta n} f(z)\,dz = \oint_{\Delta n}(z - z_0)\eta(z)\,dz. \tag{9}$$

Ahora, sean $L$ y $L_1$ las longitudes de los contornos triangulares $\Delta$ y $\Delta_1$, respectivamente. Entonces, considerando cómo se construyó el triángulo $\Delta_1$, es un problema sencillo con triángulos semejantes demostrar que $L_1$ está relacionado con $L$ por $L_1 = \frac{1}{2}L$. Del mismo modo, si $L_2$ es la longitud de $\Delta_2$, entonces $L_2 = \frac{1}{2}L_1 = \dfrac{1}{2^2}L$. En general, si $L_n$ es la longitud de $\Delta_n$, entonces $L_n = \dfrac{1}{2^n}L$.

Estamos casi terminando. Ahora para cualquier punto $z$ en $\Delta_n$, $|z - z_0| < L_n$, donde $L_n = \dfrac{1}{2^n}L$. Si elegimos $n$ lo suficientemente grande para que $|z - z_0| < \dfrac{1}{2^n}L < \delta$, entonces se tiene de (9) (7) y de la desigualdad $ML$ que

$$\left|\oint_{\Delta n} f(z)\,dz\right| = \left|\oint_{\Delta n}(z - z_0)\eta(z)\,dz\right| \le \frac{L}{2^n}\cdot\varepsilon\cdot\frac{L}{2^n} = \frac{\varepsilon}{4^n}L^2. \tag{10}$$

Poniendo (5) junto con (10) obtenemos una cota para el módulo de la integral en $\Delta$:

$$\left|\oint_{\Delta} f(z)\,dz\right| \le 4^n\frac{\varepsilon}{4^n}L^2 = \varepsilon L^2. \tag{11}$$

El resultado en (11) completa la demostración. Ya que $\varepsilon > 0$ se puede hacer arbitrariamente pequeño, debemos tener que $\left|\oint_{\Delta} f(z)\,dz\right| = 0$ y así $\oint_{\Delta} f(z)\,dz = 0$. ❑

**Teorema A.3 Contorno poligonal cerrado**

Si $C$ es un contorno cerrado poligonal situado totalmente en $D$, entonces $\int_C f(z)\, dz = 0$.

La demostración de este teorema depende del teorema A.2 y en el hecho de que cualquier contorno poligonal cerrado $C$, tal como el de la figura AII.3, puede ser "triangulado". A grandes rasgos, esto significa que el polígono cerrado $C$ se puede descomponer en un número finito de triángulos agregando rectas como se muestra en la figura AII.4. Podemos entonces proceder como

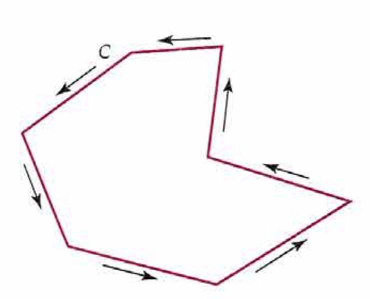



Figura AII.3 Contorno poligonal cerrado $C$ dentro de $D$

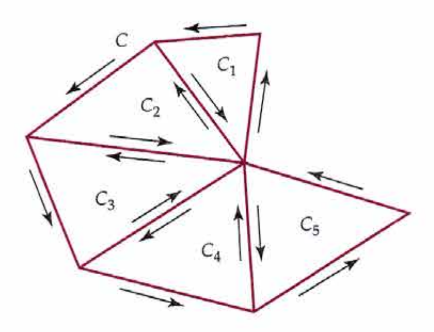



Figura AII.4 Triangulación del contorno poligonal $C$

en la demostración del teorema A.2 e integrar dos veces a lo largo de estos segmentos de recta agregados pero en direcciones opuestas. Si el polígono cerrado $C$ tiene $n$ lados, entonces se puede descomponer en $n$ triángulos $C_1$, $C_2, \ldots, C_n$ y eventualmente llegar a la siguiente analogía de (1):

$$\oint_C f(z)\, dz = \oint_{C_1} f(z)\, dz + \oint_{C_2} f(z)\, dz + \cdots + \oint_{C_n} f(z)\, dz. \qquad (12)$$

De acuerdo con el teorema A.2, cada una de las integrales del lado derecho de (12) es cero y llegamos a la conclusión deseada de que $\oint_C f(z)\, dz = 0$.

De paso hay que señalar que el contorno poligonal cerrado $C$ del teorema A.3 no tiene por qué ser simple, como se muestra en la figura AII.3, es decir, $C$ se puede intersectar a sí mismo.

La demostración de la parte final del teorema de Cauchy-Goursat demuestra que cualquier contorno cerrado $C$ se puede aproximar a cualquier grado de exactitud deseado con una trayectoria poligonal cerrada.

**Teorema A.4 Cualquier trayectoria cerrada simple**

Si $C$ es un contorno cerrado simple situado totalmente en $D$, entonces $\oint_C f(z)\, dz = 0$.

En la figura AII.5 hemos mostrado un contorno cerrado simple $C$ y $n$ puntos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ en $C$ a través de los cuales se ha construido una curva poligonal $P$. Entonces se puede demostrar que la diferencia entre la integral a lo largo de $C$, $\oint_C f(z)\, dz$, y la integral a lo largo del contorno poligonal $P$, $\oint_P f(z)\, dz$, se puede hacer arbitrariamente pequeña cuando $n \to \infty$. Como consecuencia del teorema A.3, $\oint_P f(z)\, dz = 0$ para cualquier $n$ y, por tanto, la integral a lo largo de $C$ también debe ser igual a cero.

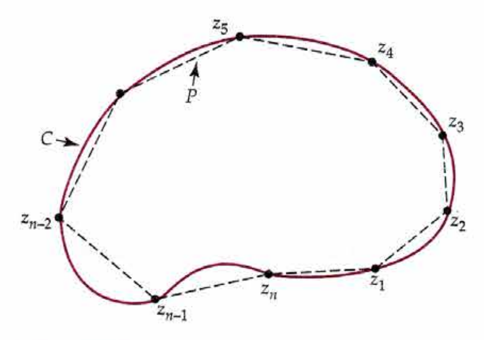
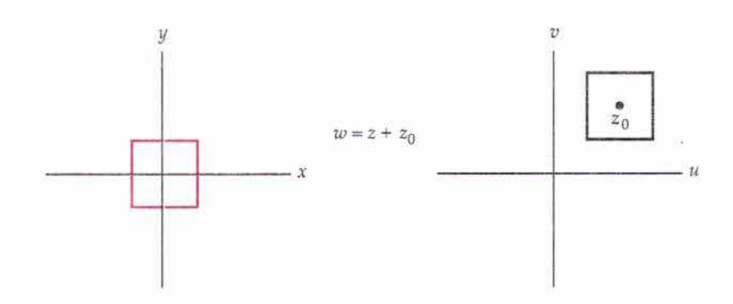



**Figura AII.5** Contorno cerrado simple $C$ aproximado por una curva cerrada poligonal $P$

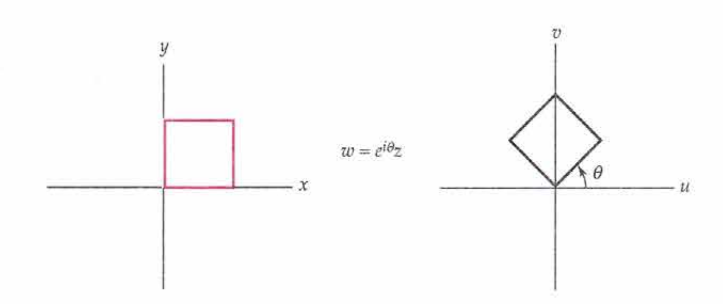
# Apéndice III Tabla de mapeos conformes

## Mapeos elementales

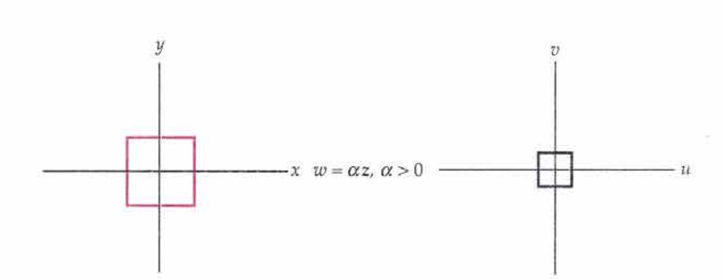
*E-1*



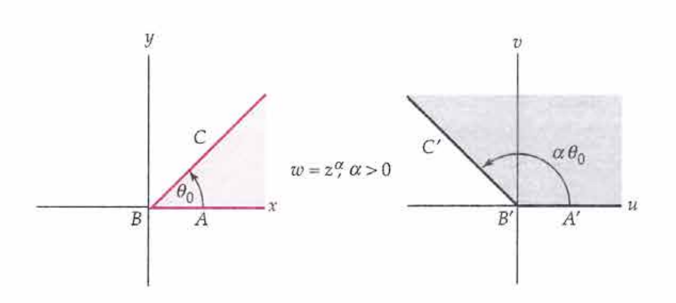

*E-2*



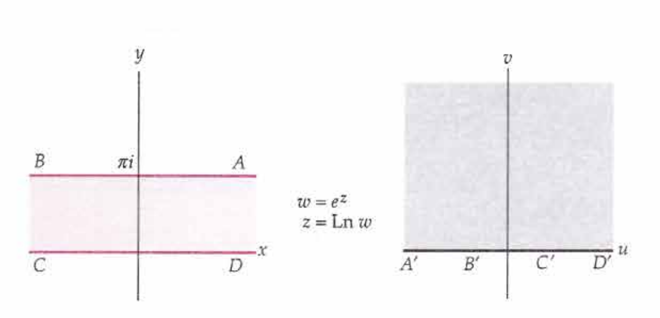

*E-3*



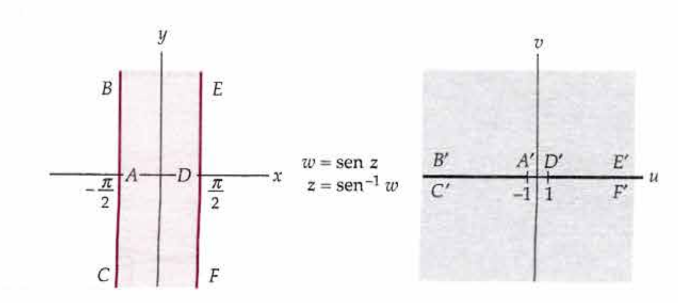

*E-4*



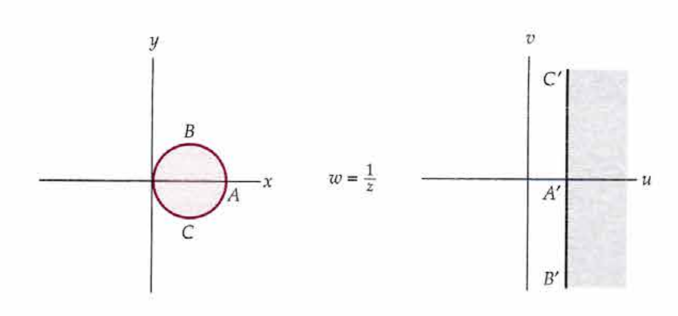

*E-5*



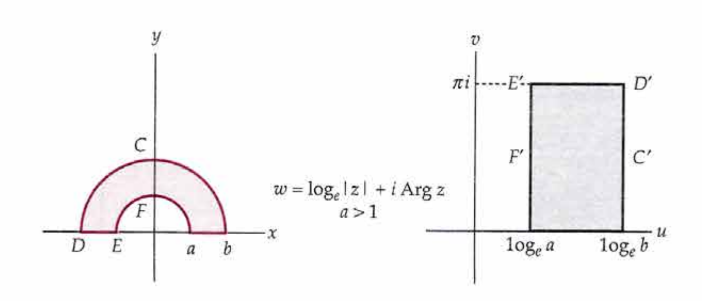
*E-6*


y
B
E
A
D
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
x
C
F
$w = \text{sen } z$
$z = \text{sen}^{-1}\, w$
v
B′
A′
D′
E′
C′
−1
1
F′
u

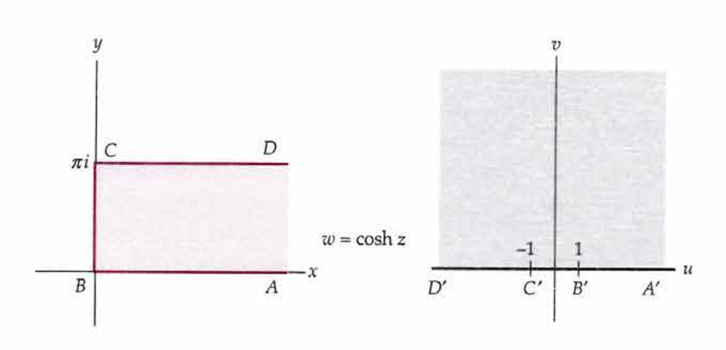
*E-7*


y
B
A
C
x
$w = \frac{1}{z}$
v
C′
A′
B′
u

*E-8*

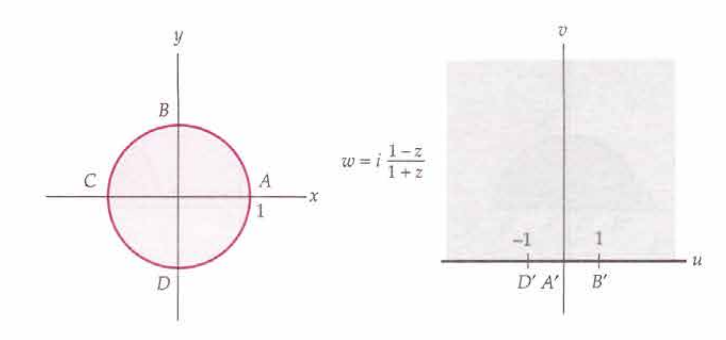

y
C
F
D
E
a
b
x
$w = \log_e |z| + i \text{ Arg } z$
$a > 1$
v
πi
E′
D′
F′
C′
$\log_e a$
$\log_e b$
u

*E-9*

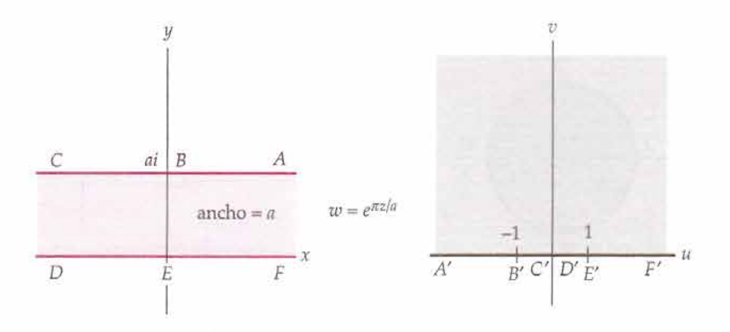

y
πi
C
D
B
A
x
$w = \cosh z$
v
−1
1
D′
C′
B′
A′
u

## Mapeos sobre semiplanos

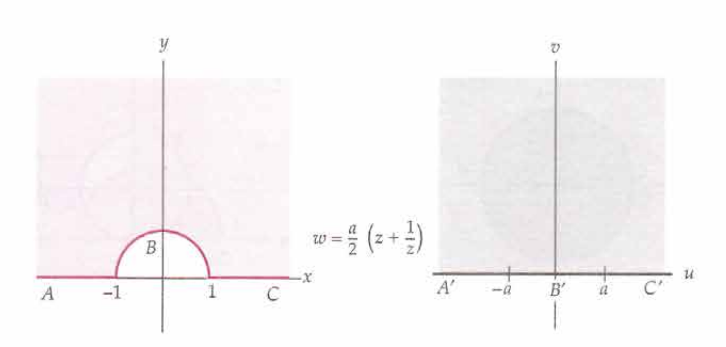
*H-1*



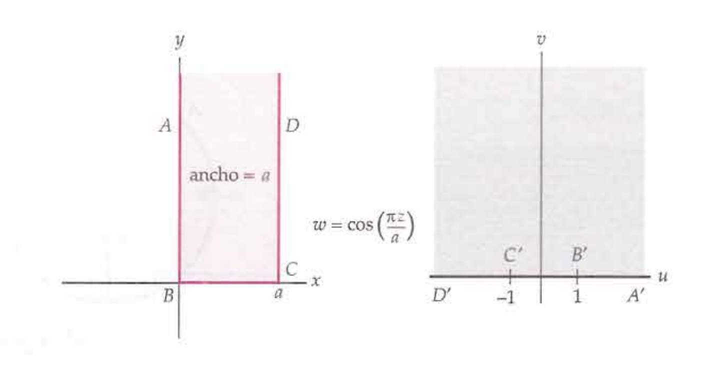

*H-2*



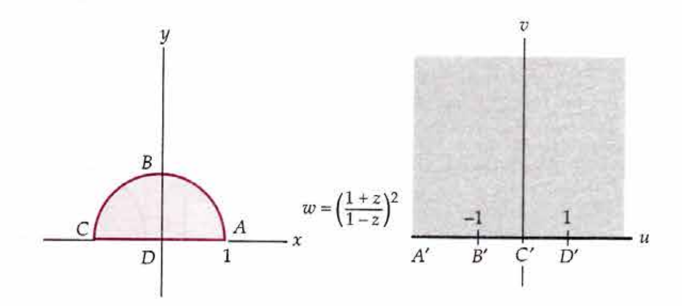

*H-3*



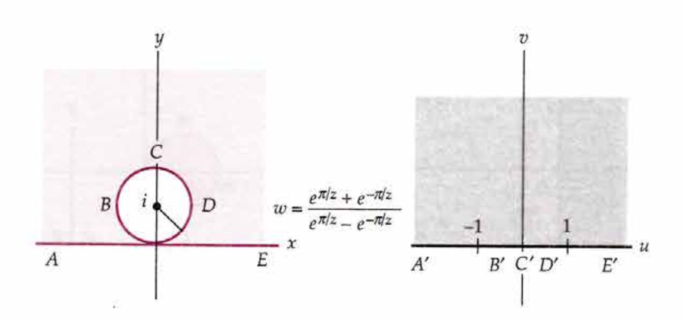

*H-4*



***H-5***

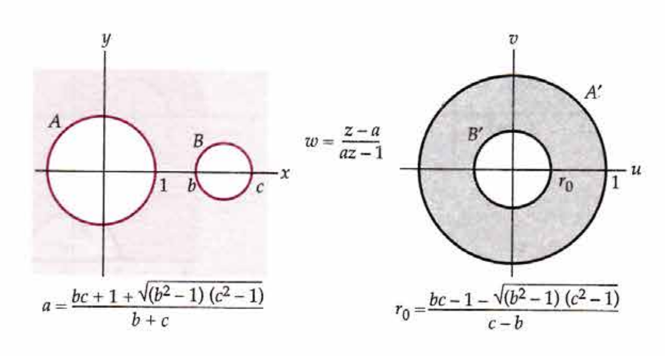



***H-6***

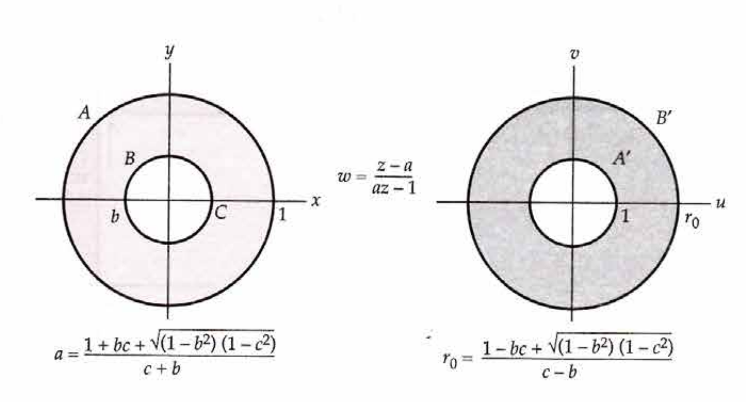



## Mapeos sobre regiones circulares

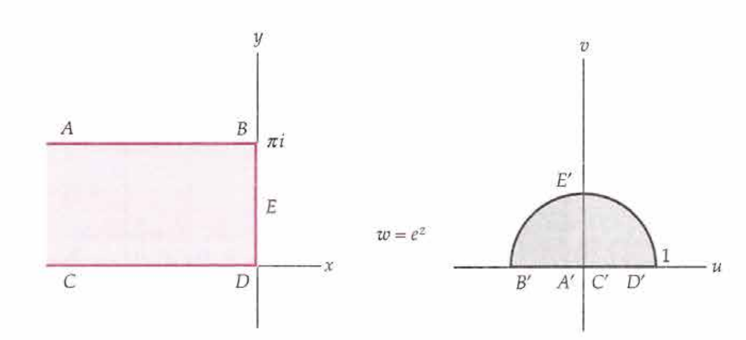
***C-1***



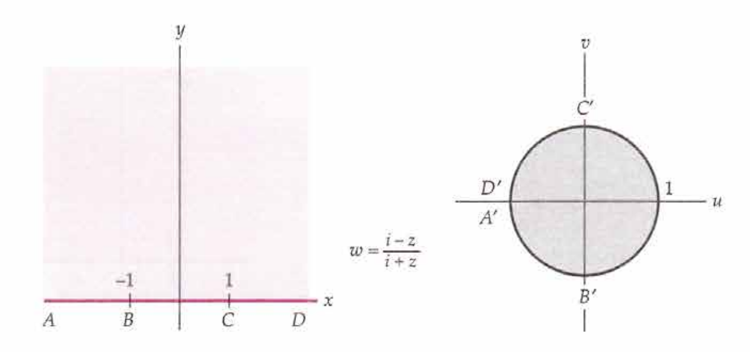

***C-2***



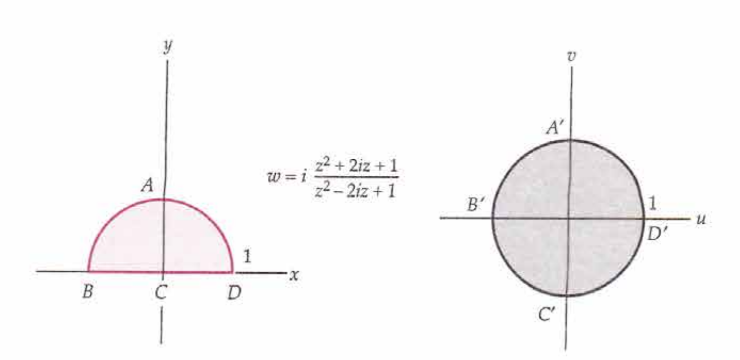
*C-3*




*C-4*

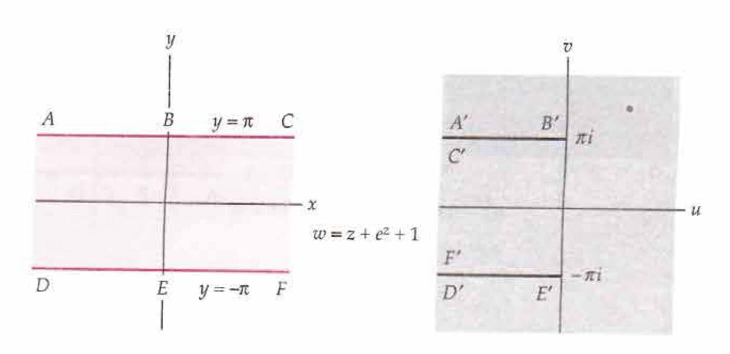



*C-5*

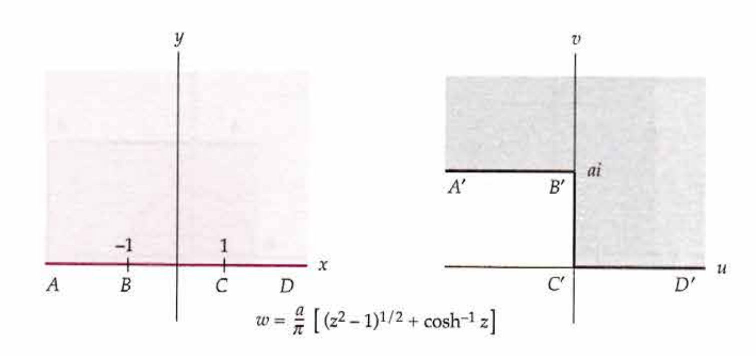



## Miscelánea de mapeos

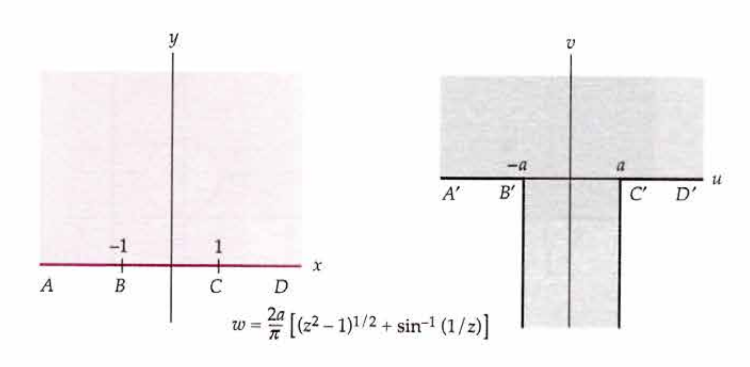
*M-1*



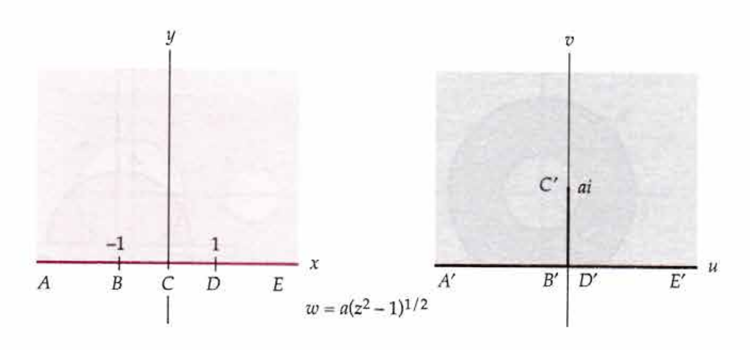
*M-2*


y
v
ai
A′
B′
−1
1
x
u
A
B
C
D
C′
D′
$w = \frac{a}{\pi}\left[(z^2-1)^{1/2} + \cosh^{-1} z\right]$

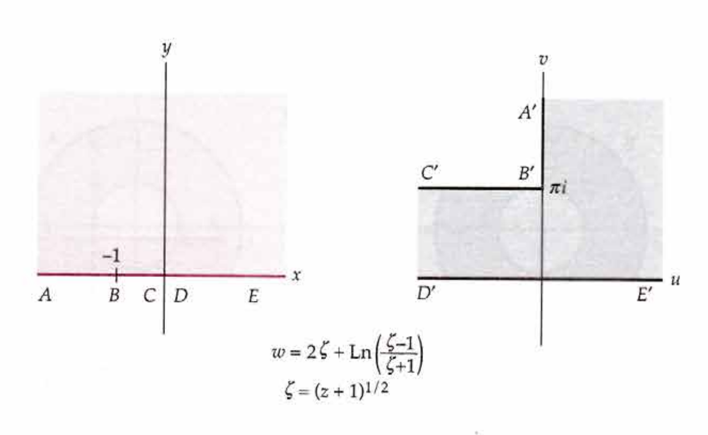
*M-3*


y
v
−a
a
u
A′
B′
C′
D′
−1
1
x
A
B
C
D
$w = \frac{2a}{\pi}\left[(z^2-1)^{1/2} + \sin^{-1}(1/z)\right]$

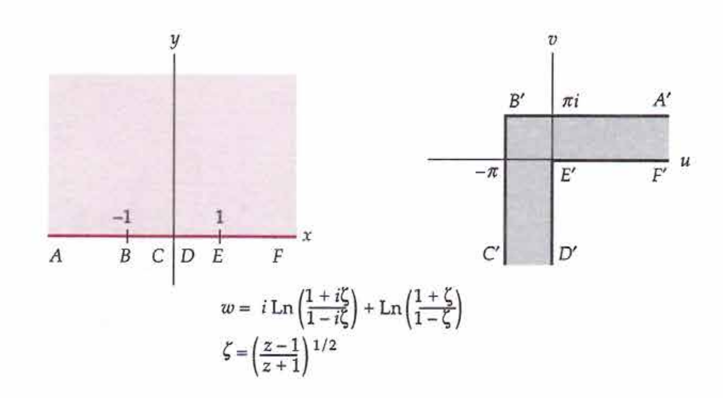
*M-4*


y
v
C′
ai
−1
1
x
u
A
B
C
D
E
A′
B′
D′
E′
$w = a(z^2-1)^{1/2}$

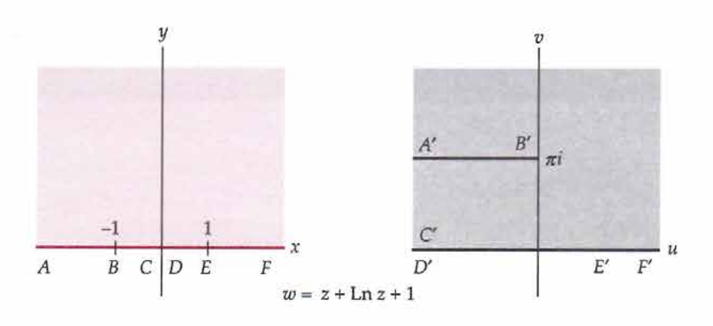
*M-5*


y
v
A′
C′
B′
πi
−1
x
u
A
B
C
D
E
D′
E′
$w = 2\zeta + \mathrm{Ln}\left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right)$
$\zeta = (z+1)^{1/2}$

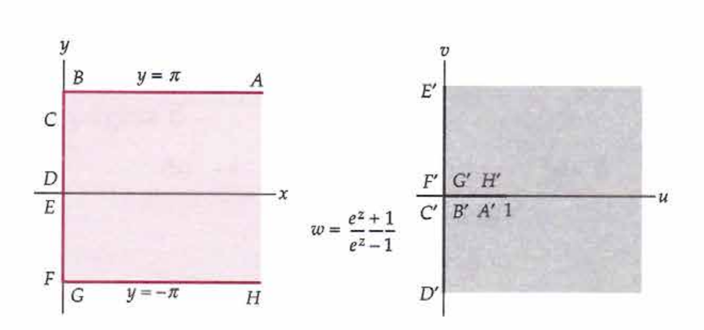
*M-6*


y
-1
1
x
A
B
C
D
E
F
v
B′
πi
A′
u
−π
E′
F′
C′
D′
$w = i\,\mathrm{Ln}\left(\frac{1+i\zeta}{1-i\zeta}\right) + \mathrm{Ln}\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)$
$\zeta = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{1/2}$

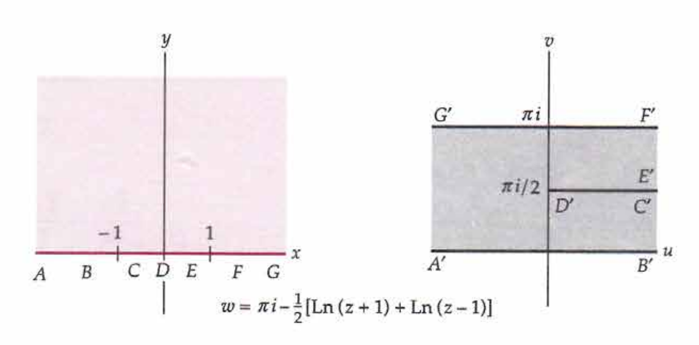
*M-7*


y
-1
1
x
A
B
C
D
E
F
v
A′
B′
πi
C′
u
D′
E′
F′
$w = z + \mathrm{Ln}\, z + 1$

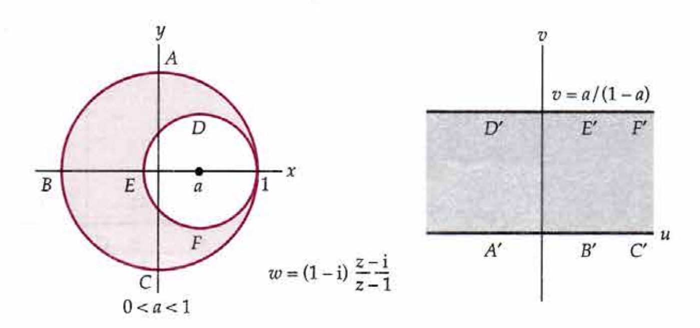
*M-8*


y
B
y = π
A
C
D
x
E
F
G
y = −π
H
$w = \frac{e^z + 1}{e^z - 1}$
v
E′
F′
G′
H′
u
C′
B′
A′
1
D′

*M-9*


y
-1
1
x
A
B
C
D
E
F
G
v
G′
πi
F′
E′
πi/2
D′
C′
u
A′
B′
$w = \pi i - \frac{1}{2}[\mathrm{Ln}\,(z+1) + \mathrm{Ln}\,(z-1)]$

*M-10*



# Respuestas a los problemas seleccionados con numeración impar

## Capítulo 1

### Ejercicios 1.1, página 6

1. (a) 1 (b) $-i$ (c) $-1$ (d) $i$

3. $7 - 13i$

5. $-7 + 5i$

7. $11 - 10i$

9. $\frac{2}{5} + \frac{16}{5}i$

11. $-\frac{7}{17} - \frac{11}{17}i$

13. $8 - i$

15. $\frac{23}{37} - \frac{64}{37}i$

17. $20i$

19. $\frac{102}{5} + \frac{116}{5}i$

21. $-5 + 12i$

23. $128 - 128i$

25. $\text{Re}(z) = \frac{7}{130}$, $\text{Im}(z) = \frac{9}{130}$

27. $\dfrac{x}{x^2 + y^2}$

29. $-2y - 4$

31. $-\text{Im}(z)$

33. $\text{Re}(z) + \text{Im}(z)$

35. $z_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

37. $z = -\frac{9}{2} + i$

39. $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ o $z = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

41. $z = -\frac{1}{30} + \frac{7}{10}i$

43. $z_1 = 17 + 11i$, $z_2 = 7 + 13i$

## Ejercicios 1.2, página 12

5. $16 - 12i$
7. triángulo rectángulo
9. 2
11. $\frac{2}{5}$
13. $(x-1)^2 + (y-3)^2$
15. $11 - 6i$; $10 + 8i$
17. la recta $x - y = 1$
19. la recta $y = x$
21. la hipérbola $xy = 1$
23. la circunferencia centrada en $(1, 0)$ de radio 1
25. la parábola $y^2 = 4(x-1)$
29. 6
31. $z = -\frac{3}{4} - i$

## Ejercicios 1.3, página 19

1. $z = 2(\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi)$; $z = 2(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$
3. $z = 3\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}\right)$; $z = 3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$
5. $z = \sqrt{2}\left(\cos \frac{9\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{9\pi}{4}\right)$; $z = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)$
7. $z = 2\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right]$; $z = 2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}\right)$
9. $z = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4}\right)$; $z = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$
11. $z = 3(\cos 8.34486 + i \operatorname{sen} 8.34486)$; $z = 3(\cos 2.06168 + i \operatorname{sen} 2.06168)$
13. $2 + 2\sqrt{3}\, i$
15. $-\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}i$
17. $5.5433 + 2.2961i$
19. $8i$; $\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i$
21. $30\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{12}\right) \approx 40.9808 + 10.9808i$
23. $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
25. $-512$
27. $\frac{1}{32}i$
29. $-64i$
31. $32\left(\cos \frac{13\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{13\pi}{6}\right) = 16\sqrt{3} + 16i$
33. $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$, $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$
35. $n = 6$

## Ejercicios 1.4, página 24

En las respuestas de la 1 a la 13, la $n$-ésima raíz principal está dada primero

1. $w_0 = 2$, $w_1 = -1 + \sqrt{3}i$ $w_2 = -1 - \sqrt{3}i$
3. $w_0 = 3i$, $w_1 = -3i$
5. $w_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $w_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
7. $w_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}i$, $w_1 \approx -1.0842 + 0.2905i$, $w_2 \approx 0.2905 - 1.0842i$
9. $w_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$, $w_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$

**11.** $w_0 = 2 + i$, $w_1 = -2 - i$

**13.** $w_0 \approx 1.3477 + 0.1327i$, $w_1 \approx 0.8591 + 1.0469i$,

$w_2 \approx -0.1327 + 1.3477i$, $w_3 \approx -1.0469 + 0.8591i$,

$w_4 \approx -1.3477 - 0.1327i$, $w_5 \approx -0.8591 - 1.0469i$,

$w_6 \approx 0.1327 - 1.3477i$, $w_7 \approx 1.0469 - 0.8591i$

**15.** **(b)** $4 + 3i$, $-4 - 3i$

**17.** $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ ; $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$

**19.** **(b)** $n = 3 : 1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i;$

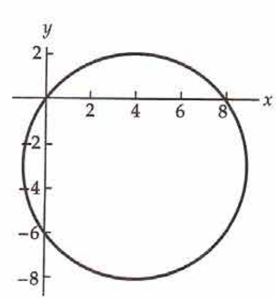
$n = 4 : 1, i, -1, -i;$

$n = 5 :$
$1, 0.3090 + 0.9511i, -0.8090 + 0.5878i, -0.8090 - 0.5878i, 0.3090 - 0.9511i,$

**25.** **(c)** $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

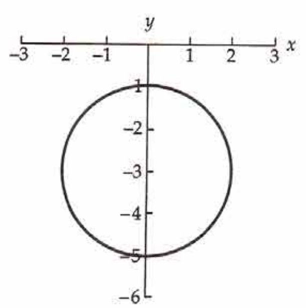
## Ejercicios 1.5, página 31

**1.**



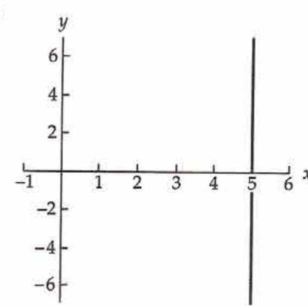
Circunferencia centrada en $4 - 3i$ de radio 5

**3.**



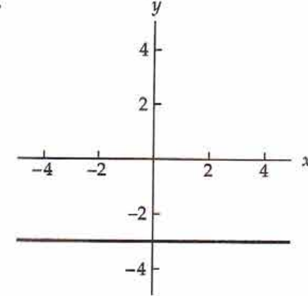
Circunferencia centrada en $-3i$ de radio 2

**5.**



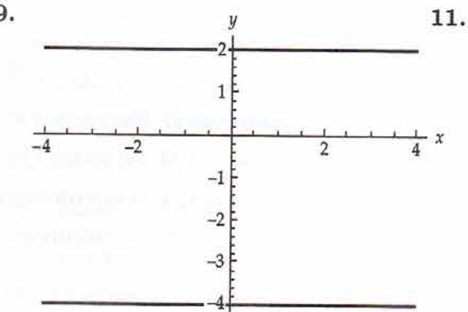
Recta vertical $x = 5$

**7.**



Recta horizontal $y = -3$

**9.**

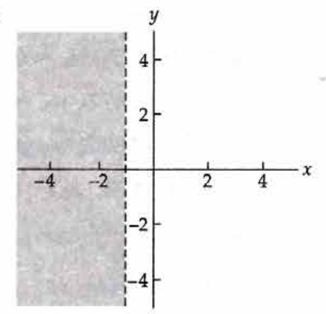


Rectas horizontales $y = 2$, $y = -4$

**11.**

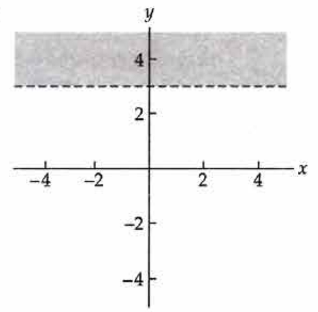
Hipérbola $x^2 - y^2 = 1$

**13.**



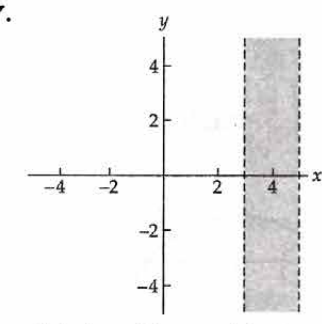

(**a**) sí (**b**) no (**c**) sí
(**d**) no (**e**) sí

**15.**



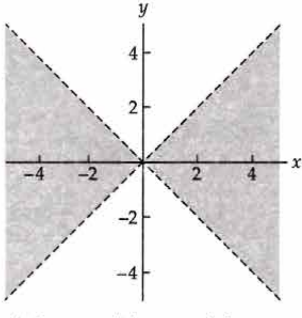

(**a**) sí (**b**) no (**c**) sí
(**d**) no (**e**) sí

**17.**



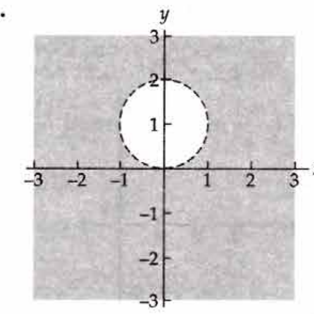

(**a**) sí (**b**) no (**c**) sí
(**d**) no (**e**) sí

**19.**



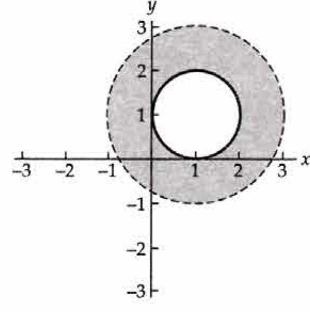

(**a**) sí (**b**) no (**c**) no
(**d**) no (**e**) no

**21.**




(**a**) sí (**b**) no (**c**) sí
(**d**) no (**e**) sí

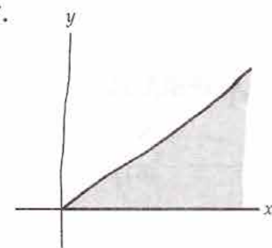
**23.**




(**a**) no (**b**) no (**c**) no
(**d**) sí (**e**) sí

**25.** Para el problema 13: la recta $x = -1$;
Para el problema 15: la recta $y = 3$;
Para el problema 17: las rectas $x = 3$ y $x = 5$;
Para el problema 19: las rectas $y = x$ y $y = -x$;
Para el problema 21: la circunferencia $|z - i| = 1$;
Para el problema 23: las circunferencias $|z - 1 - i| = 1$ y $|z - 1 - i| = 2$

27. 




29. $|\arg(z)| \leq 2\pi/3$

31. $z = 1 + \sqrt{3}i$ o $z = 1 - \sqrt{3}i$

## Ejercicios 1.6, página 38

1. $\frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{1}{2}i; \left(z - \frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(z + \frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

3. $-2 - 3i,\ 3 + 4i;\ (z + 2 + 3i)(z - 3 - 4i)$

5. $-1 - \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, -1 + \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i;$
$\left(z + 1 + \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(z + 1 - \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

7. $10e^{\pi i}$

9. $4\sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi i}$

11. $10e^{i\tan^{-1}(-\frac{3}{4})}$

13. $y_1 = e^{2x}\cos 3x,\ y_2 = e^{2x}\,\mathrm{sen}\,3x$

15. $y_1 = e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x,\ y_2 = e^{-\frac{1}{2}x}\,\mathrm{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x$

17. $q_p(t) = \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,5t,\ i_p(t) = \frac{5}{3}\cos 5t,\ Z_C = 6 + 0j,\ Z = 6$

19. $q_p(t) = 50(\mathrm{sen}\,t - \cos t),\ i_p(t) = 50(\mathrm{sen}\,t + \cos t),\ Z_C = 1 - j,\ Z = \sqrt{2}$

## Capítulo 1 Preguntas de repaso, página 42

1. falso
3. verdadero
5. falso
7. verdadero
9. verdadero
11. falso
13. verdadero
15. falso
17. verdadero
19. falso
21. verdadero
23. $\frac{9}{13}, -\frac{7}{13}$
25. un número real no negativo
27. $-3\pi/4$
29. $\frac{5\pi}{4}$, 8, −8, 16
31. cuarto
33. $z_2$
35. $z = -3 - i$
37. 1
39. primero
41. el conjunto de todos los puntos $z$ arriba de la recta $y = x$
43. eje real
45. $n = 24$
47. $\cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta + \mathrm{sen}^4\theta$,
$\mathrm{sen}\,4\theta = 4\cos^3\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - 4\cos\theta\,\mathrm{sen}^3\theta$
49. La ecuación no puede tener tres raíces complejas ya que las raíces complejas se deben presentar en pares conjugados.

# Capítulo 2

## Ejercicios 2.1, página 51

**1.** (**a**) $6i$ (**b**) $2$ (**c**) $39 - 28i$

**3.** (**a**) $0$ (**b**) $\log_e 4 + \frac{1}{2}\pi i$ (**c**) $\frac{1}{2}\log_e 2 + \frac{1}{4}\pi i$

**5.** (**a**) $3i$ (**b**) $-12 + 13i$ (**c**) $-24 + 4i$

**7.** (**a**) $3 + i$ (**b**) $2$ (**c**) $\sqrt{5} + \frac{4}{5}i$

**9.** $u = 6x - 5$; $v = 6y + 9$

**11.** $u = x^3 - 2x - 3xy^2 + 6$; $v = 3x^2y - 2y - y^3$

**13.** $u = \dfrac{x^2 + x - y^2}{(x+1)^2 + y^2}$; $v = -\dfrac{2xy + y}{(x+1)^2 + y^2}$

**15.** $u = e^{2x}\cos(2y + 1)$; $v = e^{2x}\,\text{sen}(2y + 1)$

**17.** $u = r\cos\theta$; $v = -r\,\text{sen}\,\theta$

**19.** $u = r^4\cos 4\theta$; $v = r^4\,\text{sen}\,4\theta$

**21.** $u = e^{r\cos\theta}\cos(r\,\text{sen}\theta)$; $v = e^{r\cos\theta}\,\text{sen}(r\,\text{sen}\,\theta)$

**23.** C

**25.** toda $z$ tal que $z \neq 1$

## Ejercicios 2.2, página 60

**1.** la recta vertical $u = 3$

**3.** el semiplano $\text{Im}(w) > 6$

**5.** la recta $v = 4 - u$

**7.** el semiplano $\text{Re}(w) \geq 3$

**9.** la parábola $u = \frac{1}{4}v^2 - 1$

**11.** el rayo $-\infty < u \leq 0$, $v = 0$

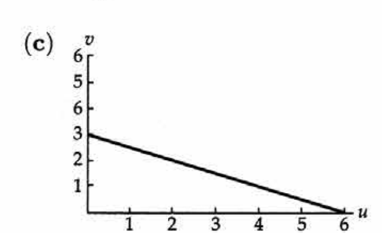
**13.** el rayo $u = 0$, $0 \leq v < \infty$

**15.** (**a**)

Segmento de recta de 2 a $i$

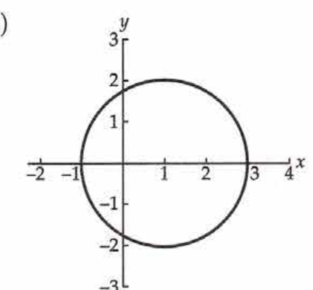
(**b**) $w(t) = 6(1 - t) + 3it$

(**c**)



Segmento de recta de 6 a $3i$

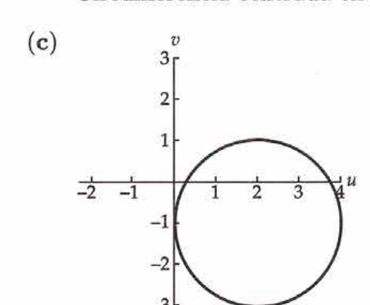
**17.** (a)




Circunferencia centrada en 1 con radio 2

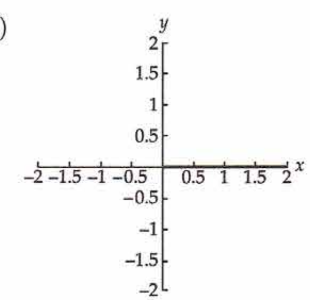
(b) $w(t) = 2 - i + 2e^{it}$

(c)




Circunferencia centrada en $2 - i$ con radio 2

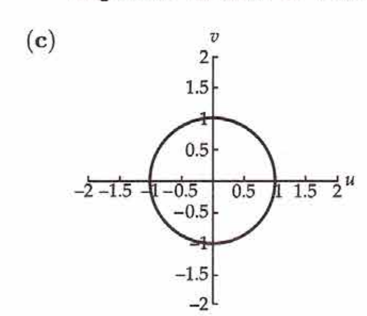
**19.** (a)




Segmento de recta de 0 a 2

(b) $w(t) = e^{i\pi t}$

(c)




Circunferencia unitaria

**21.** el eje imaginario negativo **23.** la circunferencia $|w| = \frac{1}{2}$

**25.** el segmento de recta de $-2$ a 2 sobre el eje real

## Ejercicios 2.3, página 69

**1.** $|w - 3i| \leq 1$ **3.** $|w| \leq 3$

**5.** $|w + i| \leq 2$ **7.** triángulo con vértices $2i$, $1 + 2i$ y $3i$

**9.** triángulo con vértices 0, $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i$ y $-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i$

11. triángulo con vértices $i$, $-3+i$ y $-2i$

13. $f(z) = T \circ M \circ R(z)$ donde $R(z) = e^{\pi i/2}z$, $M(z) = 3z$ y $T(z) = z + 4$

15. $f(z) = T \circ M \circ R(z)$ donde $R(z) = e^{\pi i}z$, $M(z) = \frac{1}{2}z$ y $T(z) = z + 1 - \sqrt{3}i$

17. $f(z) = iz + 2i$

19. $f(z) = e^{-\pi i/4}z + i$

21. $f(z) = z - 1, g(z) = iz$

23. (a) $w(t) = (z_0 + b)(1 - t) + (z_1 + b)t, 0 \le t \le 1$, el segmento de recta de $z_0 + b$ a $z_1 + b$

(b) $w(t) = az_0(1 - t) + az_1 t, 0 \le t \le 1$, el segmento de recta de $az_0$ a $az_1$

(c) $w(t) = az_0(1 - t) + az_1 t, 0 \le t \le 1$, el segmento de recta de $az_0$ a $az_1$

25. (a) $f(z) = 2e^{\pi i/4}z + 1 + i$ (b) $f(z) = 2e^{\pi i/4}z + 1 + i$

(c) $f(z) = 2e^{\pi i/4}z + 1 + i$

## Ejercicios 2.4, página 88

1. $\arg(w) = \frac{2}{3}\pi$

3. $u = 9 - \frac{1}{36}v^2, -\infty < v < \infty$

5. $u = 4v^2 - \frac{1}{16}, -\infty < v < \infty$

7. $v = 0, -\infty < u < 0$

9. $|w| = \frac{1}{4}$

11. La imagen consiste de los arcos: $v = 0$, $0 \le u \le 1$; $u = 0$, $0 \le v \le 2$; $u = 1 - \frac{1}{4}v^2, 0 \le v \le 2$.

13. La imagen consiste de los arcos: $v = 0$, $-1 \le u \le 1$; $u = 1 - \frac{1}{4}v^2$, $0 \le v \le 2$; $u = \frac{1}{4}v^2 - 1, 0 \le v \le 2$.

15. La imagen es un rayo que sale de $1 - i$ y contiene a $(\sqrt{3} - 1)i$; $1 - i$ no está en la imagen.

17. $v = 4 - \frac{1}{16}(u + 3)^2, -\infty < u < \infty$

19. $|w| = 1$, $\frac{1}{4}\pi \le \arg(w) \le \frac{5}{4}\pi$

21. (a) $\arg(w) = \frac{1}{2}\pi$ (b) $\arg(w) = \frac{2}{3}\pi$ (c) $\arg(w) = \frac{5}{6}\pi$

23. (a) $1 \le |w| \le 4$, $\frac{1}{2}\pi \le \arg(w) \le \frac{3}{2}\pi$ (b) $1 \le |w| \le 8$, $\frac{3}{4}\pi \le \arg(w) \le \frac{9}{4}\pi$

(c) $1 \le |w| \le 16$

25. $\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i$

27. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$

29. $\frac{1}{2}\sqrt[4]{18} + \frac{1}{2}\sqrt[4]{2}i$

31. $\arg(w) = \frac{1}{8}\pi$

33. $\arg(w) = \frac{1}{4}\pi$

35. $|w| = 3, -\frac{1}{4}\pi \le \arg(w) \le \frac{1}{2}\pi$

37. $u = \frac{3}{2}$

39. la región acotada por las rectas $u = 2$ y $v = u$ contiene al punto $w = 3 + 4i$

## Ejercicios 2.5, página 97

1. $|w| = \frac{1}{5}$

3. $|w| = \frac{1}{3}$, $-3\pi/4 \le \arg(w) \le \pi/4$

5. $\frac{1}{2} \le |w| \le 3$

7. $\arg(w) = -\frac{1}{4}\pi$

9. $|w + \frac{1}{8}i| = \frac{1}{8}$

11. $v = \frac{1}{2}$

13. $u = \frac{1}{4}$

15. La imagen es la región acotada por $|w + \frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$ y $|w + \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$.

17. La imagen es la región acotada por $v = 0$, $v = -u$, y $|w| = 2$ y contiene al punto $-3 + 2i$

**19.** **(a)** Se invierte en la circunferencia unitaria, se refleja a traves del eje real, se gira $\pi/2$ en contra de las manecillas del reloj alrededor del origen, ampliando en 2, y después trasladando en 1.

**(b)** $\left|w - 1 - \frac{1}{4}i\right| = \frac{1}{4}$ **(c)** $v = -\frac{1}{2}$

**21.** **(a)** si $f(z) = 1/z$ y $g(z) = z^2$, entonces $h(z) = g(f(z))$

**(b)** $u = \frac{1}{4}v^2 - 1$ **(c)** $u = \frac{1}{4} - v^2$

## Ejercicios 2.6, página 116

**1.** $-4 + 2i$ **3.** $3 - i$

**5.** $-1$ **7.** $2i$

**9.** $1 - 3i$ **11.** $\sqrt{2}$

**13.** $4i$ **15.** $a$

**17.** **(a)** 1 **(b)** 0 **(c)** no existe

**19.** **(a)** 1 **(b)** 1 **(c)** no

**(d)** $-1$ **(e)** no existe

**21.** $\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$ **23.** $\infty$

**25.** $\infty$ **27.** $\lim_{z \to 2-i} f(z) = f(2 - i) = 5 - 8i$

**29.** $\lim_{z \to i} f(z) = f(i) = \frac{1}{3}i$ **31.** $\lim_{z \to 1} f(z) = f(1) = 3$

**33.** $\lim_{z \to 3-2i} f(z) = f(3 - 2i) = -6 + 3i$ **35.** $f(-i)$ no está definida

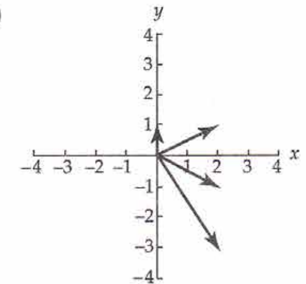
**37.** $\lim_{z \to -1} f(z)$ no existe **39.** $\lim_{z \to i} f(z) \neq f(i)$

**41.** el plano complejo completo **C**

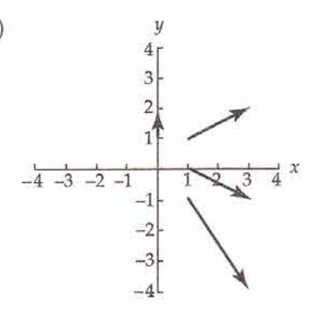
**43.** todos los puntos en el plano complejo excepto los de la circunferencia $|z| = 2$

## Ejercicios 2.7, página 124

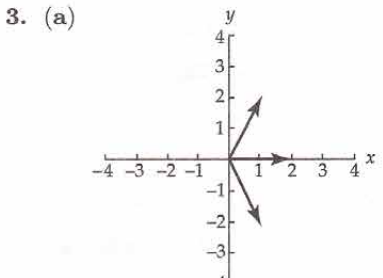
**1.** (a)



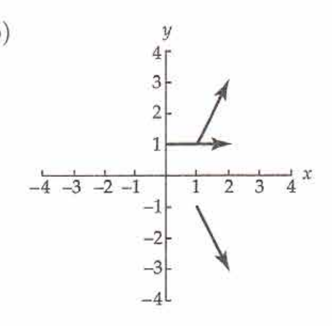

(b)

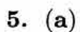



**3.** (a)

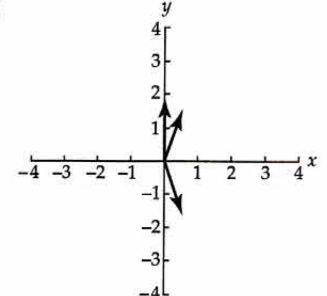



(b)

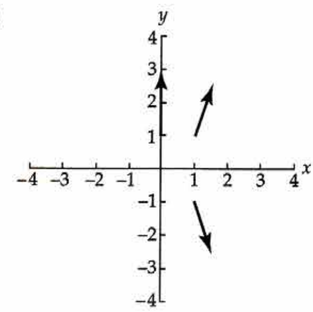


**5.** 

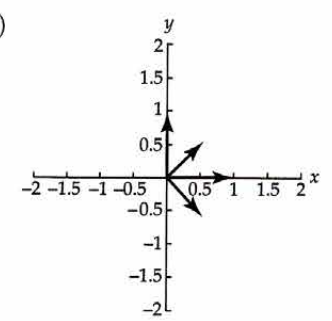
(a)



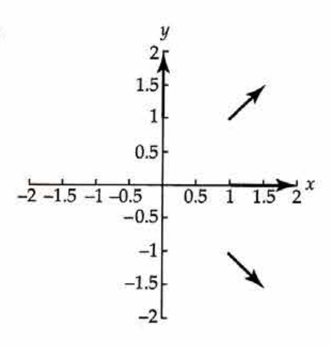

(b)




**7.** (a)

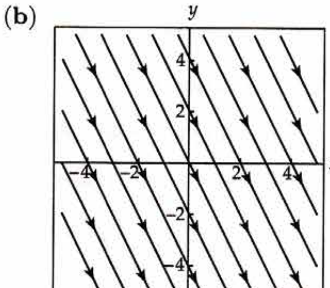



(b)



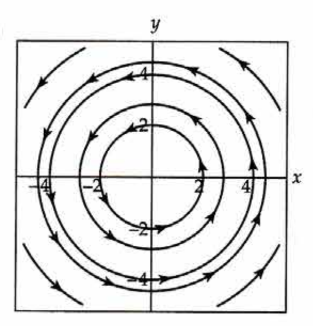

**9.** (a) $y = -2x + c$

(b)




**11.** (a) $x^2 + y^2 = c$

(b)




## Capítulo 2 Preguntas de repaso, página 125

**1.** falso

**3.** falso

**5.** verdadero

**7.** falso

**9.** falso

**11.** verdadero

**13.** falso

**15.** verdadero

**17.** verdadero

**19.** verdadero

**21.** $x^2 - y^2 + y,\ x + 2xy$

**23.** imaginario

**25.** $(1 + i)(1 - t) + 2ti,\ 0 \leq t \leq 1$

**27.** rotación, ampliación, traslación

**29.** dobles

**31.** parábolas

**33.** $\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$

**35.** $z^2 + 4,\ -4 - i$

**37.** $f(z_0)$

**39.** $0 < x < \infty,\ y \neq 0$

# Capítulo 3

## Ejercicios 3.1, página 135

**1.** $f'(z) = 9i$

**3.** $f'(z) = 3iz^2 - 14z$

**5.** $f'(z) = 1 + \frac{1}{z^2}$

**7.** $f'(z) = 10z - 10$

**9.** $f'(z) = 4z^3 - 2z$

**11.** $f'(z) = (10 - 5i)z^4 + 4iz^3 - 6z$

**13.** $f'(z) = 8z^7 - 7z^6 + (6 - 30i)z^5 - 2z + 1$

**15.** $f'(z) = \dfrac{3iz^2 + (2 + 2i)z - 2 + 2i}{(3z + 1 - i)^2}$

**17.** $f'(z) = 10\left(z^4 - 2iz^2 + z\right)^9\left(4z^3 - 4iz + 1\right)$

**23.** $\frac{1}{2}i$

**25.** $8i$

**27.** $f$ es no analítica en $z = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}i$

**29.** $f$ es analítica para toda $z$

## Ejercicios 3.2, página 141

**9.** **(b)** $f'(z) = -e^{-x}\cos x + i - e^{-x}\operatorname{sen} y$

**11.** **(b)** $f'(z) = 2e^{x^2-y^2}(x\cos 2xy - y\operatorname{sen} 2xy) + i2e^{x^2-y^2}(x\operatorname{sen} 2xy - y\cos 2xy)$

**13.** **(b)** $f'(z) = \dfrac{-(x-1)^2 + y^2}{((x-1)^2 + y^2)^2} + i\dfrac{2(x-1)y}{((x-1)^2 + y^2)^2}$

**15.** **(b)** $f'(z) = e^{-i\theta}\left(-\dfrac{\cos\theta}{r^2} + i\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{r^2}\right)$

**17.** $a = 1,\ b = 3$

**19.** **(b)** $f'(z) = 2x$ en el eje $x$

**21.** **(b)** $f'(z) = 3x^2 - 1$ en el eje $x$; $f'(z) = 3y^2 - 1$ en el eje $y$

## Ejercicios 3.3, página 147

**1.** **(c)** $f(z) = x + i(y + C)$

**3.** **(c)** $f(z) = x^2 - y^2 + i(2xy + C)$

**5.** **(c)** $f(z) = \log_e(x^2 + y^2) + i\left(2\tan^{-1}\frac{y}{x} + C\right)$

**7.** **(c)** $f(z) = e^x(x\cos y - y\operatorname{sen} y) + i(e^x(x\operatorname{sen} y + y\cos y) + C)$

**9.** **(c)** $f(z) = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\left(\dfrac{-y}{x^2 + y^2} + C\right)$

**11.** $f(z) = xy + x + 2y - 5 + i\left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + y - 2x + 1\right)$

**13.** **(b)** $f(z) = \dfrac{y}{x^2 + y^2} + i\dfrac{x}{x^2 + y^2}$ **(c)** $f(z) = \dfrac{i}{z}$

## Ejercicios 3.4, página 153

**1.** $x = c_1,\ y = c_2$

**3.** $c_1 x = x^2 + y^2,\ c_2 y = x^2 + y^2$; las curvas de nivel $u(x, y) = 0$ y $v(x, y) = 0$ corresponden a $x = 0$ y $y = 0$, respectivamente.

**11.** **(a)** $\phi(x) = -50x + 50$ **(b)** $\Omega(z) = -50x + 50 - 50yi$

**13.** **(a)** $\phi(\theta) = \dfrac{120}{\pi}\theta$ **(b)** $\Omega(z) = \dfrac{120}{\pi}\theta - \dfrac{120}{\pi}\log_e r$

## Capítulo 3 Preguntas de repaso, página 155

**1.** falso

**3.** verdadero

**5.** verdadero

**7.** verdadero

**9.** verdadero

**11.** verdadero

**13.** $-\dfrac{2z+5i}{(z^2+5iz-4)^2}$

**15.** $2+i$

**17.** $f'(z)=\dfrac{(y-1)^2-(x-1)^2}{[(x-1)^2+(y-1)^2]^2}+i\dfrac{2(x-1)(y-1)}{[(x-1)^2+(y-1)^2]^2}$

**19.** constante

**21.** $v(x, y)=e^{-x}(x\cos y+y\operatorname{sen} y)$

# Capítulo 4

## Ejercicios 4.1, página 172

**1.** $z^2e^{z+i}+2ze^{z+i}$

**3.** $ie^{iz}+ie^{-iz}$

**5.** $e^{x^2-x-y^2}$

**7.** $2x+2n\pi,\ n=0, \pm1, \pm2, \ldots$

**9.** $e^y\cos x-ie^y\operatorname{sen} x$

**11.** $e^{x^2-y^2}\cos(2xy)+ie^{x^2-y^2}\operatorname{sen}(2xy)$

**13.** $f$ no es derivable en ningún punto

**15.** $\arg(w)=-2$

**17.** $e<|w|\leq e^2$

**19.** $1\leq|w|\leq 2,\ -\pi/4\leq\arg(w)\leq\pi/2$

**21.** $\log_e 5+(2n+1)\pi i$

**23.** $\frac{3}{2}\log_e 2+\frac{1}{4}(8n+3)\pi i$

**25.** $\frac{3}{2}\log_e 2+\frac{1}{3}(6n+1)\pi i$

**27.** $\frac{1}{2}\log_e 72-\frac{1}{4}\pi i$

**29.** $2.5650+2.7468i$

**31.** $5\log_e 2-\frac{1}{3}\pi i$

**33.** $2\log_e 2+\frac{1}{2}(4n+1)\pi i$

**35.** $4+\frac{1}{2}(4n-1)\pi i$

**37.** derivable en el dominio $|z|>0,\ -\pi<\arg(z)<\pi,\ f'(z)=6z-2ie^{2iz}+\dfrac{i}{z}$

**39.** derivable cuando $z$ no está en el rayo que sale de $\frac{1}{2}i$ que contiene $-1+\frac{1}{2}i$;

$$z\neq -i, \text{ y } z\neq i,\ f'(z)=\frac{2\dfrac{z^2+1}{2z-i}-2z\operatorname{Ln}(2z-i)}{(z^2+1)^2}$$

**41.** $v=\frac{1}{6}\pi$

**43.** $u=2\log_e 2,\ -\pi<v\leq\pi$

**45.** $\log_e 3\leq u\leq\log_e 5,\ -\pi<v\leq\pi$

## Ejercicios 4.2, página 179

**1.** $e^{-3(2n+1)\pi},\ n=0, \pm1, \pm2, \ldots$

**3.** $\sqrt{2}e^{(8n+1)\pi/4+i[(8n+1)\pi/4-(\log_e 2)/2]},\ n=0, \pm1, \pm2, \ldots$

**5.** $e^{(-4n+1)\pi/2},\ n=0, \pm1, \pm2, \ldots$

**7.** $e^{-3\pi}$

**9.** $e^{i4\log_e 2}$

**11.** $e^{-\pi+i3\log_e 2}$

**15.** $\frac{3}{2}\sqrt[4]{2}e^{\pi i/8}$

**17.** $\sqrt{2}e^{-\pi/3+i[(\pi/4)+\log_e 2]}$

## Ejercicios 4.3, página 191

**1.** $i\,\text{senh}\,4 \approx 27.2899i$

**3.** $\cos 2\cosh 4 + i\,\text{sen}2\,\text{senh}\,4 \approx -11.3642 + 24.8147i$

**5.** $i\tanh 2 \approx 0.9640i$

**7.** $-i\,\text{csch}\,1 \approx -0.8509i$

**9.** $z = 2n\pi - i\log_e\left(\sqrt{2}-1\right)$ o $z = (2n+1)\pi - i\log_e\left(\sqrt{2}+1\right)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**11.** $z = \frac{1}{4}(4n+1)\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**17.** $2z\cos\left(z^2\right)$

**19.** $\tan\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{z}\sec^2\left(\frac{1}{z}\right)$

**21.** $-1$

**23.** $\frac{1}{2}\sqrt{3}\cosh 1 + i\frac{1}{2}\,\text{senh}\,1 \approx 1.3364 + 0.5876i$

**25.** $z = \log_e\left(1+\sqrt{2}\right) + \frac{1}{2}(2n+1)\pi i$ o $z = \log_e\left(-1+\sqrt{2}\right) + \frac{1}{2}(2n-1)\pi i$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**27.** No hay soluciones

**33.** $\cos z\,\text{senh} z + \text{sen}\, z\cosh z$

**35.** $i\,\text{sech}^2\,(iz-2)$

## Ejercicios 4.4, página 199

**1.** $\frac{1}{2}(4n+1)\pi - i\log_e\left(\sqrt{2}+1\right)$ y $\frac{1}{2}(4n-1)\pi - i\log_e\left(\sqrt{2}-1\right)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**3.** $\frac{1}{2}(4n+1)\pi - i\log_e\left(\sqrt{2}\pm 1\right)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**5.** $-\frac{1}{4}(4n-1)\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**7.** $\frac{1}{2}(4n+1)\pi i$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**9.** $\frac{1}{4}\log_e 2 + \frac{1}{8}(8n+3)\pi i$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**11.** **(a)** $-i\log_e\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\right)$ **(b)** $\frac{2}{5}\sqrt{5}$

**13.** **(a)** $\frac{1}{2}(\pi - \arctan 2) + i\frac{1}{4}\log_e 5$ **(b)** $\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$

**15.** **(a)** $\log_e\left(\sqrt{2}+1\right) - \frac{1}{2}\pi i$ **(b)** $\frac{1}{2}\sqrt{2}i$

## Ejercicios 4.5, página 207

**1.** $\phi(x, y) = -x + 5$

**3.** $\phi(x, y) = \frac{5}{4}\sqrt{3}x - \frac{5}{4}y + 10$

**5.** $\phi(x, y) = 12 + \dfrac{33}{\pi}\text{Arg}(\text{sen}(z-\pi)+1) - \dfrac{25}{\pi}\text{Arg}(\text{sen}(z-\pi)-1)$

**7.** $\phi(x, y) = 15 - \dfrac{9}{\pi}\text{Arg}(\text{sen}(iz)+1) + \dfrac{17}{\pi}\text{Arg}(\text{sen}(iz)-1)$

## Capítulo 4 Preguntas de repaso, página 209

**1.** verdadero

**3.** falso

**5.** falso

**7.** verdadero

**9.** falso

**11.** falso

**13.** falso

**15.** verdadero

**17.** verdadero

**19.** verdadero

**21.** $e^x\cos y$, $e^x\,\text{sen}\,y$

**23.** $\log_e 2 + \frac{1}{6}\pi i$

**25.** $2n\pi - i\log_e 2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**27.** eje real no positivo

**29.** $\frac{1}{2}\log_e 2 + \frac{1}{4}(8n+1)\pi i$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**31.** $z_2 = e^{2\pi}$

**35.** $\cosh 4$

**37.** $\text{sen}\,x\cosh y$, $\cos x\,\text{senh} y$

**39.** $\pm 1$

# Capítulo 5

## Ejercicios 5.1, página 218

1. $\frac{64}{3}$
3. $-\frac{1}{\pi}$
5. $\frac{1}{2}\ln 9$
7. $8e^{-1} - 12e^{-2}$
9. $-\frac{1}{2}\ln 3$
11. $-125/3\sqrt{2}$; $-250(\sqrt{2}-4)/12$; $\frac{125}{2}$
13. 3; 6; $3\sqrt{5}$
15. 21
17. 30
19. 1
21. 1
23. 460
25. $\frac{26}{9}$
27. $-\frac{64}{3}$
29. $-\frac{8}{3}$
31. 0
33. En cada curva la integral de línea tiene el valor $\frac{208}{3}$.
35. Con $\rho = kx$, $m = k\pi$.

## Ejercicios 5.2, página 228

1. $-28 + 84i$
3. $-48 + \frac{736}{3}i$
5. $(2+\pi)i$
7. $\pi i$
9. $-\frac{7}{12} + \frac{1}{12}i$
11. $-e - 1$
13. $\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}$
15. 0
17. $\frac{1}{2}i$
19. 0
21. $\frac{4}{3} - \frac{5}{3}i$
23. $\frac{4}{3} - \frac{5}{3}i$
25. $\frac{5}{12}\pi e^5$
27. $6\sqrt{2}$
31. (a) $-11 + 38i$ (b) 0

## Ejercicios 5.3, página 236

9. $2\pi i$
11. $2\pi i$
13. 0
15. (a) $2\pi i$ (b) $4\pi i$ (c) 0
17. (a) $-8\pi i$ (b) $-6\pi i$
19. $-\pi(1+i)$
21. 0
23. $-4\pi i$
25. $-6\pi i$

## Ejercicios 5.4, página 244

1. $-2i$
3. $48 + 24i$
5. $6 + \frac{26}{3}i$
7. 0
9. $-\frac{7}{6} - \frac{22}{3}i$
11. $-\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi}i$
13. $2.3504i$
15. 0
17. $\pi i$
19. $\frac{1}{2}i$
21. $11.4928 + 0.9667i$
23. $-0.9056 + 1.7699i$
25. $\sqrt{2}\,i$

## Ejercicios 5.5, página 253

1. $8\pi i$
3. $-2\pi i$
5. $-\pi(20+8i)$
7. (a) $-2\pi$ (b) $2\pi$
9. $-8\pi$
11. $-2\pi e^{-1} i$
13. $\frac{4}{3}\pi i$
15. (a) $-5\pi i$ (b) $-5\pi i$ (c) $9\pi i$ (d) 0
17. (a) $-\pi(3+i)$ (b) $\pi(3+i)$
19. $\pi\left(\frac{8}{3}+12i\right)$
21. 0
23. $-\pi i$
25. 6
27. (a) 16; 4 (b) 25; 9 (c) 7; 3

## Ejercicios 5.6, página 265

5. $f(z)=\cos\theta_0+i\operatorname{sen}\theta_0=e^{i\theta_0}$, $g(z)=\overline{f(z)}=\cos\theta_0-i\operatorname{sen}\theta_0=e^{-i\theta_0}$ es constante y, por tanto, es analítica en todo punto.
7. $f(z)=2\bar{z}+3i$, $g(z)=\overline{f(z)}=2z-3i$ es una función polinomial y, por tanto, es analítica para toda $z$.
9. $\mathbf{F}(x, y)=(x^2-y^2-2xy)\mathbf{i}+(y^2-x^2-2xy)\mathbf{j}$
11. $\mathbf{F}(x, y)=(e^x\cos y)\mathbf{i}-(e^x\operatorname{sen} y)\mathbf{j}$
13. $\Omega(z)=e^{-i\theta_0}z$ las rectas equipotenciales son la familia de líneas rectas $x\cos\theta_0+y\operatorname{sen}\theta_0=c_1$; las líneas de corriente son la familia de líneas rectas $-x\operatorname{sen}\theta_0+y\cos\theta_0=c_2$.
15. $\Omega(z)=z^2-3iz$ las rectas equipotenciales son la familia de hipérbolas $x^2-y^2+3y=c_1$; las líneas de corriente son la familia de hipérbolas $2xy-3x=c_2$.
17. $\mathbf{F}(x, y)=-2xy\,\mathbf{i}+(y^2-x^2)\mathbf{j}$
21. (a) Para un punto $(x, y)$ lejos del origen, el campo de velocidad está dado por $F(x, y)\approx A\mathbf{i}$, es decir, el flujo es casi uniforme.
23. (a) Las líneas de corriente son $\operatorname{Arg}(z-x_1)=c_1$, que son rayos con vértice en $z=x_1$.
25. La circulación es 0; el flujo neto es 0.
27. La circulación es 0; el flujo neto es $2\pi$.
29. La circulación es $-4\pi$; el flujo neto es $12\pi$.

## Capítulo 5 Preguntas de repaso, página 267

1. falso
3. verdadero
5. verdadero
7. verdadero
9. verdadero
11. verdadero
13. falso
15. verdadero
17. verdadero
19. verdadero
21. circunferencia unitaria centrada en el origen
23. Tanto $z_1(t)$ como $z_2(t)$ describen una circunferencia unitaria centrada en el origen pero que tienen orientaciones opuestas.

**25.** 0

**27.** $\frac{8}{3}$

**29.** $2\cos(2+i) - 2\cos 3i$

**31.** $2\pi i$

**33.** $6\pi^2 - \pi i$

**35.** $2\pi i/(n-1)!$

**37.** 0 para $n \neq -1$ y $2\pi i$ para $n = -1$.

**39.** $i - 1$

# Capítulo 6

## Ejercicios 6.1, página 280

**1.** $5i,\ -5,\ -5i,\ 5,\ 5i$

**3.** $0, 2, 0, 2, 0$

**5.** converge

**7.** converge

**9.** diverge

**11.** $\lim_{n\to\infty} \text{Re}(z_n) = 2$ y $\lim_{n\to\infty} \text{Im}(z_n) = \frac{3}{2}$ y así $L = 2 + \frac{3}{2}i$.

**13.** La serie converge a $\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$.

**15.** divergente

**17.** convergente, $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$

**19.** convergente, $\frac{9}{5} - \frac{12}{5}i$

**21.** $|z - 2i| = \sqrt{5},\ R = \sqrt{5}$

**23.** $|z - 1 - i| = 2,\ R = 2$

**25.** $|z - i| = 1/\sqrt{10},\ R = 1/\sqrt{10}$

**27.** $|z - 4 - 3i| = 25,\ \ R = 25$

**29.** $|z - i| = \frac{1}{2},\ R = \frac{1}{2}$

**31.** $z = -2 + i$

**33.** $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ diverge.

## Ejercicios 6.2, página 289

**1.** $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} z^k,\ R = 1$

**3.** $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k(2z)^{k-1},\ R = \frac{1}{2}$

**5.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}(2z)^k,\ R = \infty$

**7.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1},\ R = \infty$

**9.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k},\ R = \infty$

**11.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{4k+2},\ R = \infty$

**13.** $e^{3i}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(z - 3i)^k,\ R = \infty$

**15.** $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k,\ R = 1$

**17.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3-2i)^{k+1}}(z - 2i)^k,\ R = \sqrt{13}$

**19.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}(z-1)^k,\ R = 2$

**21.** $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2\cdot 1!}\left(z - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2\cdot 2!}\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2\cdot 3!}\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \cdots,\ R = \infty$

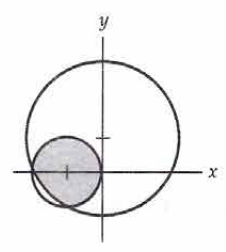
**23.** $z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \cdots$

**25.** $\frac{1}{2i} + \frac{3}{(2i)^2}z + \frac{7}{(2i)^3}z^2 + \frac{15}{(2i)^4}z^3 + \cdots,\ R = 1$

**27.** $R = 2\sqrt{5}$

**29.** $R = \frac{\pi}{2}$

**31.** $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z+1)^k,\ R=\sqrt{2};\quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2+i)^{k+1}}(z-i)^k,\ R=\sqrt{5}$




**33.** $\frac{1}{1-3z}$

**37.** $1.1+0.12i$

## Ejercicios 6.3, página 300

**1.** $\frac{1}{z}-\frac{z}{2!}+\frac{z^3}{4!}-\frac{z^5}{6!}+\cdots$

**3.** $1-\frac{1}{1!\cdot z^2}+\frac{1}{2!\cdot z^4}-\frac{1}{3!\cdot z^6}+\cdots$

**5.** $\frac{e}{z-1}+e+\frac{e(z-1)}{2!}+\frac{e(z-1)^2}{3!}+\cdots$

**7.** $-\frac{1}{3z}-\frac{1}{3^2}-\frac{z}{3^3}-\frac{z^2}{3^4}-\cdots$

**9.** $\frac{1}{3(z-3)}-\frac{1}{3^2}+\frac{z-3}{3^3}-\frac{(z-3)^2}{3^4}+\cdots$

**11.** $\cdots-\frac{1}{3(z-4)^2}+\frac{1}{3(z-4)}-\frac{1}{12}+\frac{z-4}{3\cdot 4^2}-\frac{(z-4)^2}{3\cdot 4^3}+\cdots$

**13.** $\cdots-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}-\frac{1}{2}-\frac{z}{2^2}-\frac{z^2}{2^3}-\cdots$

**15.** $\frac{-1}{z-1}-1-(z-1)-(z-1)^2-\cdots$

**17.** $\frac{1}{3(z+1)}-\frac{2}{3^2}-\frac{2(z+1)}{3^3}-\frac{2(z+1)^2}{3^4}-\cdots$

**19.** $\cdots-\frac{1}{3z^2}+\frac{1}{3z}-\frac{1}{3}-\frac{z}{3\cdot 2}-\frac{z^2}{3\cdot 2^2}-\cdots$

**21.** $\frac{1}{z}+2+3z+4z^2+\cdots$

**23.** $\frac{1}{z-2}-3+6(z-2)-10(z-2)^2+\cdots$

**25.** $\frac{3}{z}-4-4z-4z^2-\cdots$

**27.** $\cdots+\frac{2}{(z-1)^3}+\frac{2}{(z-1)^2}+\frac{2}{z-1}+1+(z-1)$

**29.** $\frac{1}{z}+\frac{z}{6}+\frac{7z^3}{360}+\cdots$

## Ejercicios 6.4, página 307

**1.** Define $f(0)=2$.

**3.** Define $f(0)=0$.

**5.** $-2+i$ es un cero de orden 2.

**7.** 0 es un cero de orden 2; $i$ y $-i$ son ceros simples.

**9.** $2n\pi i,\ n=0,\pm1,\ldots$, son ceros simples.

**11.** orden 5

**13.** orden 1

**15.** $-1+2i$ y $-1-2i$ son polos simples.

**17.** $-2$ es un polo simple; $-i$ es un polo de orden 4.

**19.** $(2n+1)\pi/2$, $n = 0, \pm1, \ldots$, son polos simples.

**21.** 0 es un polo de orden 2.

**23.** $(2n+1)\pi i$, $n = 0, \pm1, \ldots$, son polos simples.

**25.** 1 es un polo simple

**27.** singularidad esencial

## Ejercicios 6.5, página 315

**1.** $\frac{2}{5}$

**3.** $-3$

**5.** $0$

**7.** $\text{Res}(f(z), -4i) = \frac{1}{2}$, $\text{Res}(f(z), 4i) = \frac{1}{2}$

**9.** $\text{Res}(f(z), 1) = \frac{1}{3}$, $\text{Res}(f(z), -2) = -\frac{1}{12}$, $\text{Res}(f(z), 0) = -\frac{1}{4}$

**11.** $\text{Res}(f(z), -1) = 6$, $\text{Res}(f(z), -2) = -31$, $\text{Res}(f(z), -3) = 30$

**13.** $\text{Res}(f(z), 0) = -3/\pi^4$, $\text{Res}(f(z), \pi) = (\pi^2 - 6)/2\pi^4$

**15.** $\text{Res}(f(z), (2n+1)\pi/2) = (-1)^{n+1}$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

**17.** $0$; $2\pi i/9$; $0$

**19.** $\pi i$; $\pi i$; $0$

**21.** $\pi/3$

**23.** $0$

**25.** $2\pi i \cosh 1$

**27.** $-4i$

**29.** $6i$

**31.** $\left(\frac{1}{3\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right) i$

**33.** $2\pi/3$

## Ejercicios 6.6, página 333

**1.** $\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$

**3.** $0$

**5.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

**7.** $\frac{\pi}{4}$

**9.** $\frac{\pi}{6}$

**11.** $\pi\left(\frac{90 - 52\sqrt{3}}{12 - 7\sqrt{3}}\right)$

**15.** $\pi$

**17.** $\frac{\pi}{16}$

**19.** $\frac{3\pi}{8}$

**21.** $\frac{\pi}{2}$

**23.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

**25.** $\frac{\pi}{6}$

**27.** $\pi e^{-1}$

**29.** $\pi e^{-1}$

**31.** $\pi e^{-3}$

**33.** $\frac{\pi e^{-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}\left(\cos\sqrt{2} + \text{sen}\sqrt{2}\right)$

**35.** $-\frac{\pi}{8}\left(\frac{e^{-3}}{3} - e^{-1}\right)$

**37.** $\pi e^{-1}$

**57.** $\log_e 2$

**59.** $12\pi i$

**61.** $4\pi i$

**63.** $10\pi i$

**69.** $\frac{\pi^2}{8}$

**71.** $\frac{\sqrt{2}\pi^2}{16}$

## Ejercicios 6.7, página 347

1. $\dfrac{1}{s-5},\ s>5$
3. $\dfrac{3}{s^2+9},\ s>0$
5. $s>k$
7. $\dfrac{k}{s^2-k^2},\ \dfrac{s}{s^2-k^2}$
9. $\frac{1}{120}t^5$
11. $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t$
13. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{senh}\sqrt{3}t$
15. $e^{3(t-a)}\mathcal{U}(t-a) - e^{2(t-a)}\mathcal{U}(t-a)$
17. $\frac{1}{2}\operatorname{senh} t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t$
19. $\dfrac{1}{1-i\alpha}$

## Capítulo 6 Preguntas de repaso, página 348

1. verdadero
3. verdadero
5. verdadero
7. verdadero
9. falso
11. falso
13. verdadero
15. verdadero
17. verdadero
19. falso
21. $-3+6i$
23. $\frac{125}{26} - \frac{25}{26}i$
25. $|z-2-i| = \frac{1}{13}$
27. $1/R$
29. $\frac{1}{5}(z+1) - \frac{1}{5^2}(z+1)^2 + \frac{1}{5^3}(z+1)^3 - \cdots;\ R=5$
31. $\dfrac{7}{(z+1)^2} + \dfrac{4}{z+1} - 2 + (z+1)$
33. $1$
35. $\frac{1}{6}$
37. $1,\ \dfrac{1}{z-\pi},\ \pi$
39. (a) $\pi + \pi i$

(b) 0 para $n=0$; 0 para $n=1$; $2\pi i(1/1!)$ para $n=2$; 0 para $n=3$; $2\pi i(-1/3!)$ para $n=4$; 0 para $n=5$; $2\pi i(1/5!)$ para $n=6$; y así sucesivamente.

# Capítulo 7

## Ejercicios 7.1, página 357

1. $f$ no es conforme en $z=\pm 1$.
3. $f$ no es conforme en $z=(2n+1)\pi i,\ n=0,\pm 1,\pm 2,\dots$
5. $f$ no es conforme en $z=\frac{1}{2}(2n+1)\pi,\ n=0,\pm 1,\pm 2,\dots$
11. $w=\cos\dfrac{\pi z}{2}$ por la entrada H-4 del Apéndice III.
13. $w=\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^{1/2}$ por las entradas H-5 y E-4 del Apéndice III.
15. $w=\left(\dfrac{e^{\pi/z}+e^{-\pi/z}}{e^{\pi/z}-e^{-\pi/z}}\right)^{1/2}$ por las entradas H-6 y E-4 del Apéndice III.

## Ejercicios 7.2, página 368

1. $T(0)=\infty,\ T(1)=i,\ T(i)=1,\ T(\infty)=0$

3. $T(0)=-1,\ T(1)=i,\ T(i)=\infty,\ T(\infty)=1$

5. $|w|\geq 1$ y $u\geq \frac{1}{2}$

7. $u\leq 0$ y $|w-1|\geq 2$

9. $v\geq 0$ y $|w-\frac{1}{2}|\geq \frac{1}{2}$

11. $v\geq 0$ y $u\leq 1$

13. La imagen consiste de un conjunto de todos los puntos $w=u+iv$ tales que $|w+\frac{1}{3}|\geq \frac{2}{3}$ y $v\leq 0$.

15. La imagen consiste de un conjunto de todos los puntos $w=u+iv$ tales que $|w+\frac{1}{20}|\geq \frac{9}{20}$ y $u\geq -\frac{1}{2}$.

17. (a) $S^{-1}(z)=\dfrac{z+1}{z-i}$ (b) $S^{-1}(T(z))=\dfrac{(1+i)z-1}{2z+i}$

19. (a) $S^{-1}(z)=\dfrac{z-2}{z-1}$ (b) $S^{-1}(T(z))=\dfrac{3}{z}$

21. $T(z)=\dfrac{2z+2}{-z+2}$

23. $T(z)=\dfrac{2z}{z+i}$

25. $T(z)=\dfrac{3z-3i}{(1+4i)z-(4+i)}$

## Ejercicios 7.3, página 376

1. el primer cuadrante $u\geq 0,\ v\geq 0$

3. la región acotada por el rayo $u=0,\ 0\leq v<\infty$, el segmento de recta $v=0,\ 0\leq u\leq 1$, y el rayo $u=1,\ -\infty<v\leq 0$, y que contiene al punto $1+i$.

5. la región acotada por el rayo $v=1,\ -\infty<u\leq 0$, el segmento de recta $u=0,\ 0\leq v\leq 1$, el segmento de recta $v=0,\ 0\leq u\leq 1$, y el rayo $\arg(z-1)=\pi/4$, y que contiene al punto $1+i$.

7. $f'(z)=A(z+1)^{-1/2}z^{-1/2}(z-1)^{-1/2}$

9. $f'(z)=A(z+1)^{-1/3}z^{-1/3}$

## Ejercicios 7.4, página 384

1. $\phi(x,y)=\dfrac{1}{\pi}[\text{Arg}(z+1)-2\text{Arg}(z)+\text{Arg}(z-1)]$

3. $\phi(x,y)=5+\dfrac{1}{\pi}[\text{Arg}(z+2)-2\text{Arg}(z+1)+\text{Arg}(z)-5\text{Arg}(z-1)]$

5. $\phi(x,y)=\dfrac{2x-1}{\pi}\left[\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right)-\tan^{-1}\left(\dfrac{x-2}{y}\right)\right]+\dfrac{y}{\pi}\log_e\left[\dfrac{(x-2)^2+y^2}{x^2+y^2}\right]$

7. $$\phi(x,y)=\dfrac{y}{\pi}+\dfrac{x^2-y^2}{\pi}\left[\tan^{-1}\left(\dfrac{x-1}{y}\right)-\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right)\right]+\dfrac{xy}{\pi}\log_e\left[\dfrac{(x-1)^2+y^2}{x^2+y^2}\right]$$

9. (b) $\phi(x,y)=e^{-y}\cos x$

## Ejercicios 7.5, página 398

1. (a) $w=z^2$ (b) $\phi(x,y)=\dfrac{1}{\pi}[-\text{Arg}\,(z^2+1)-\text{Arg}\,(z^2)+2\text{Arg}\,(z^2-1)]$

3. (a) $w = \left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^2$

(b) $\phi(x,\ y) = 1 + \dfrac{1}{\pi}\left\{2\text{Arg}\left[\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^2 + 1\right] + \text{Arg}\left[\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^2\right] - 2\text{Arg}\left[\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^2 - 1\right]\right\}$

5. (a) $w = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}z\right)$

(b) $\phi(x,\ y) = 1 + \dfrac{1}{\pi}\left\{-3\text{Arg}\left[\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}z\right) + 1\right] + 3\text{Arg}\left[\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}z\right)\right] - \text{Arg}\left[\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}z\right) - 1\right]\right\}$

7. (a) $w = \dfrac{1}{z}$ (b) $\phi(x, y) = \dfrac{-2x}{x^2 + y^2} + 2$

9. (a) $w = \dfrac{2z - 1 - \sqrt{3}}{(4 + 2\sqrt{3})\,z + 1 + \sqrt{3}}$

(b) $\phi(x, y) = \dfrac{10}{\log_e (7 - 4\sqrt{3})}\log_e\left|\dfrac{2z - 1 - \sqrt{3}}{(4 + 2\sqrt{3})\,z + 1 + \sqrt{3}}\right|$

11. (a) $w = \text{sen}^{-1} z$ (b) $\phi(x,\ y) = 5 + \dfrac{10}{\pi}\text{Re}\left[\text{sen}^{-1}\, z\right]$

13. $\Omega\ (z) = z^4$

15. $\Omega\ (z) = \cosh z$

17. (a) $z = \pi i - \frac{1}{2}[\text{Ln}(w + 1) + \text{Ln}(w - 1)]$

(b) $z(t) = \pi i - \frac{1}{2}[\text{Ln}(t + 1 + ic_2) + \text{Ln}(t - 1 + ic_2)]$

19. (a) $z = \dfrac{1}{\pi}\left[\left(w^2 - 1\right)^{1/2} + \cosh^{-1} w\right]$

(b) $z(t) = \dfrac{1}{\pi}\left\{\left[(t + ic_2)^2 - 1\right]^{1/2} + \cosh^{-1}(t + ic_2)\right\}$

21. $\Omega\ (z) = \text{Ln}\left(z^4 + 4\right) - \text{Ln}\left(z^4 - 16\right)$

## Capítulo 7 Preguntas de repaso, página 403

1. falso
3. falso
5. verdadero
7. verdadero
9. falso
11. verdadero
13. verdadero
15. verdadero
17. sentido
19. triplica
21. circunferencia
23. $\dfrac{z - z_1}{z - z_3}\dfrac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$
25. $\pi/2,\ 3\pi/4$
27. $\pi/5$
29. $\left(\dfrac{1 + t + ic_2}{1 - t - ic_2}\right)^2$

# Índices

# Índice de símbolos

# Índice

G